ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ

1. Нормальные расширения логики **K4.3**.

   Известно, что все они полны по Крипке (Fine, 1974), но не обязательно финитно аппроксимируемы (Kracht, 1993).

   (А) Можно ли по аксиомам такой логики (если их конечное число) алгоритмически распознать ее финитную аппроксимируемость?

   (Б) Можно ли по конечному списку аксиом такой логики узнать, полна ли она относительно строгих линейных порядков?

   (В) Какие из этих логик полны относительно ординалов со строгим порядком?

2. Логика **K2** = **K** + $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$.

   При добавлении аксиомы сериальности $\Diamond\top$ логика становится финитно аппроксимируемой (Fine, 1975), также и при добавлении транзитивности (также известный факт).

   (А) Верно ли, что **K2** финитно аппроксимируема?

   (Б) Верно ли, что **T2** = **K2** + $\Box p \to p$ финитно аппроксимируема?

3. Нормальные расширения логики симметричных шкал Крипке

   KB = **K** + $\Diamond\Box p \to p$.

   мало изучены, ответы на простые вопросы про них неизвестны.

   (А) Верно ли, что все расширения **KB** + Alt_2 (логика симметричных цепей) конечно аксиоматизируемы и финитно аппроксимируемы?

   (Б) Сколько существует расширений у логики **KB** + Alt_3 ?

   (В) Найти модальную логику целочисленной плоскости с отношением соседства $|A-B|=1$; аналогичная задача для n-мерного случая.

   (Г) Исследовать свойства логики «ячеистых графов» **KB2**+Alt_3.

4. Подстановки в модальные формулы.

   Теорема Райтенбурга (1984) утверждает, что последовательные подстановки в интуиционистские формулы почти периодичны с периодом 2: если $A^1(p,q)=A(p,q)$, $A^{n+1}(p,q)=A(A^n(p,q),q)$, то для достаточно больших n, $A^{n+2} \equiv A^n$ в интуиционистской логике. А что

происходит в модальных логиках?
(А) Верно ли аналогичное свойство для **S5**? (гипотеза:да)
(Б) Существует ли такая формула А, что в **S4** все формулы A^n попарно не эквивалентны?

5. Временные логики предикатов.
   (А) Известно, что для временная логика предикатов (со связками «всегда будет» и «всегда было») для рациональной прямой (**Q**,<) перечислима. Аксиоматика ее неизвестна.
   (Б) Известно, что интуиционистская логика предикатов с постоянной областью для вещественной прямой (**R**,≤) конечно аксиоматизируема (Takano, 1987). Верно ли аналогичное утверждение для модальной логики со
   связкой «всегда будет»?
   (В) Известно, что интуиционистские логики предикатов с переменной областью для (**R**,≤) и (**Q**,≤) совпадают (Скворцов, 2009). Верно ли аналогичное утверждение для модальных логик со связкой «всегда будет»?
6. Топологические модальные логики с несколькими модальностями.
   (А) Рассмотрим прямую **R** с 2 топологиями: стандартной и топологией, в которой наименьшая окрестность x — это полуинтервал [E(x),E(x)+1) (где E — целая часть). Ей соответствует модальная логика со связками «сейчас» (типа **S4**) и «сегодня» (типа **S5**). Про нее ничего не известно.
   (Б) Предыдущий пример можно обогатить связками «вчера» и «завтра» с очевидной семантикой: «вчера» для x — это «сегодня» для (x-1), а «завтра» — для (x+1).
   (В) Рассмотрим плоскость $\mathbf{R}^2$ с 2 топологиями: стандартной и топологией, в которой наименьшая окрестность x — это горизонтальная прямая, проходящая через x. Ей также соответствует модальная логика со связками типа **S4** и **S5**, про которую ничего не известно.