Проблемы комбинаторики слов
А. Я. Белов

Комбинаторика слов находит свое применение в самых разных разделах математики. Например, в алгебре при изучении базисов и нормальных форм, в алгебраической топологии, в символической динамике. Ряд проблем, относящихся к комбинаторике слов находится на стыке алгебры и теории динамических систем. Многие проблемы комбинаторики слов представляют самостоятельный интерес.

1 Комбинаторика слов и символическая динамика

Методы символической динамике играют существенную роль в изучении комбинаторных свойств слов, задачах теории чисел и теории динамических систем. Пусть M – компактное метрическое пространство, $U \subset M$ — его открытое подмножество, $f : M \to M$ – гомеоморфизм компакта в себя и $x \in M$ – начальная точка. По последовательности итераций можно построить бесконечное слово W над бинарным алфавитом:

$$w_n = \begin{cases} a, & f^{(n)}(x_0) \in U \\ b, & f^{(n)}(x_0) \notin U \end{cases}$$

которое называется *эволюцией* точки x_0. Символическая динамика исследует взаимосвязь свойств динамической системы (M, f) и комбинаторных свойств слова W_n. Для слов над алфавитом, состоящим из большего числа символов нужно рассмотреть несколько характеристических множеств: $U_1, \ldots, U_n$.

Под *прямой задачей* символической динамики понимается изучение комбинаторных свойств слов, порожденных данной динамической системой, *обратная задача* символической динамики изучает свойства динамической системы, то есть свойства компакта M и преобразования f по комбинаторным свойствам слова W.

Известно, что если слово W *равномерно-рекуррентно*, то полученная динамическая система минимальна, то есть не содержит нетривиальных замкнутых инвариантных траекторий. Свойство *единственности инвариантной меры* переводится на комбинаторный язык так. Пусть u есть подслово равномерно рекуррентного сверхслова W. Предположим, что для любого подслова $u \sqsubset W$ верхняя и нижняя плотности, с которыми оно встречается в слове W совпадают. Тогда соответствующая инвариантная мера единственная.

Можно сформулировать комбинаторные условия на то, что динамическая система является сдвигом тора, в терминах функции рассогласования. (В частности, это означает, что у нее дискретный спектр). Определим *функцию рассогласования* $\rho(U, V)$ как верхнюю плотность множества позиций в словах U, V в которых стоят разные символы.

1.1 Последовательности Штурма и их обобщения

Для уточнения абстрактной постановки задачи исследования соответствия комбинаторных и топологических свойств слов очень важна модельная ситуация, от которой можно отталкиваться при дальнейших исследованиях. Проблематика, связанная с построением слов Штурма очень важна в комбинаторике слов.

Задачи, прямые и обратные, связанные с преобразованием поворота окружности приводят к классу слов, называемых *словами Штурма.* Известно, что если $T(n) < n+1$ при некотором n, то сверхслово W периодично. Слова с предельной функцией роста $T(n) = n+1$ образуют класс так называемых *слов Штурма (Sturmian words)*, другое название – *слова Бетти (Beaty words)*, которые впервые были упомянуты в работе [124] Hedlund, Morse "Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories". Классическая теория слов Штурма описана в обзорах [97], [117]. Последние продвижения в теории слов Штурма описаны в обзоре [98] J.Berstel "Recent results in Sturmian words". А. Т. Колотов [29] пришел к изучению таких слов из чистой алгебры.

Известна классическая

Теорема 1.1 (Теорема эквивалентности ([124],[120]).) *Пусть W – бесконечное рекуррентное слово над бинарным алфавитом $A = \{a, b\}$. Следующие условия "почти" эквивалентны:*

1. *Слово W является словом Штурма, то есть количество различных подслов длины n слова W равно $T_n(W) = n+1$ для любого $n \geq 1$.*

2. *Слово не периодично и является* сбалансированным, *то есть для любых двух подслов $u, v \subset W$ одинаковой длины выполняется неравенство $||v|_a - |u|_a| \leq 1$, где $|w|_a$ обозначает количество вхождений символа a в слово w.*

3. *Слово $W = (w_n)$ является* механическим словом *с иррациональным α, т.е. в качестве M можно взять окружность единичной длины, f будет поворотом на α, $|U| = \alpha$ есть дуга окружности.*

4. *Слово W получается путем предельного перехода последовательности слов, каждое из которых получается из предыдущего путем подстановки вида $a^k b \to b, a^{k+1}b \to a$ либо подстановки вида $b^k a \to a, b^{k+1}a \to b$.*

   Показатель k зависит от шага. Если эти показатели k_i периодически повторяются, то α есть квадратичная иррациональность.

5. *Сверхслово W р.р. и имеет последовательность графов Рози с одной входящей и одной исходящей развилкой.* [1]

Понятие "почти" имеет следующий смысл: имеется счетное множество последовательностей принадлежащих одному классу но не принадлежащим другому и все такие исключительные последовательности описаны. Например, при $\alpha \in \mathbb{Q}$ механические слова не принадлежат первому классу.

Существует несколько различных путей для построения обобщений слов Штурма.

Во-первых, это рассмотрение *сбалансированных* слов над произвольным алфавитом, а также *m-сбалансированных* слов. Сбалансированные непериодические слова над n-буквенным алфавитом изучены в работе [106] Graham "Covering the Positive Integers by disjoints sets of the form $\{n\alpha + \beta\} : n = 1; 2; \ldots$", а позднее в работе [107]. В работах [91],[89] получена конструкция динамической системы, порождающей произвольное непериодическое сбалансированное слово.

[1] Эта характеризация была получена в последующем.

Описание периодических сбалансированных слов связано с *гипотезой Френкеля (Fraenkel's conjecture)*, утверждающей, что все сбалансированные периодические слова над алфавитом $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из n символов имеют вид

$$W = (U_n)^{\infty},$$

где U_n задается рекуррентно:

$$U_n = (U_{n-1}a_nU_{n-1}),\ U_3 = a_1a_2a_1a_3a_1a_2a_1.$$

Для трех буквенного алфавита гипотеза была доказана Р. Тайдеманом ([132, 133]). В настоящий момент гипотеза доказана для алфавитов состоящих не более чем из 7 символов.

Во-вторых, обобщение слов Штурма может быть получено посредством изучения *функции сложности* или *функции роста*. Функция сложности $T_W(n)$ – это количество различных подслов длины n слова W. Для слов Штурма выполняется соотошение $T_W(n+1) - T_W(n) = 1$ для всех $n \geq 1$. Поэтому естественными обобщениями слов Штурма являются слова над конечным алфавитом для которых выполняется соотношение $T_W(n+1) - T_W(n) = 1$ для всех $n \geq k$, где k – некоторое натуральное число. Равносильное условие: $T(n) = n + K$, начиная с некоторого n. Описание таких слов в терминах поворота окружности было получено в работе [90]. Для двубуквенных алфавитов они носят название *квазиштурмовых* слов. Слова с функцией роста, удовлетворяющей соотношению $\lim_{n\to\infty} T(n)/n = 1$ изучены в работе [54] A.Aberkane "Words whose complexity satisfies $\lim p(n)/n = 1$". Слова с функцией роста, удовлетворяющей соотношению $\lim_{n\to\infty} T(n)/n = 1$ изучены в работе [54].

Можно рассмотреть графы Рози с большим числом развилок. Им отвечают слова, у которых функция сложности имеет ассимптотику вида $an + b$. Слова с функцией сложности $T_W(n) = 2n + 1$ изучены в работах P.Arnoux, G.Rauzy ([56, 126]), с функцией роста $T_W(n) = 2n + 1$ в работе G.Rote [130]. Изучением свойств слов с линейным ростом числа подслов также производилось школой V.Berthé, S.Ferenczi и Luca Q.Zamboni ([109], [96]). Продвижение в задачах символической динамики для слов с линейной функцией роста получено в работе [56] P. Arnoux, G.Rauzy "Representation geometrique des suites the complexite $2n + 1$". В этой работе построена динамическая система для слов с функцией роста $T(n) = 2n+1$, обладающих дополнительным комбинаторным свойством. В работе [130] G.Rote, "Sequences with subword complexity 2n" в терминах эволюции графов Рози описаны слова с функцией роста $2n$.

В третьих, обобщение последовательностей Штурма можно получить на пути построения более общей динамики (см. следующий раздел).

Последовательности Штурма связаны с теорией цепных дробей. Последовательность событий в эволюции графов Рози для последовательностей Штурма отвечает выбору неполных частных в разложению угла поворота α в цепную дробь. Соответственно, обобщение на случай большего числа развилок означает обобщение теории цепных дробей. Периодичности разложении числа α в цепную дробь отвечает периодичность подстановочных систем, а эволюции схемы Рози – преобразование динамической системы. Так, замене $a \to ab, b \to b$ при $\alpha < 1/2$ отвечает вырезание дуги α, следующей сразу после отмеченной дуги с последующей подклейкой. При этом множество наилучших приближений не меняется. Аналогичные процессы происходят при индукции Рози при перекладывании отрезков.

При исследовании последовательностей Штурма естественно возникает вопрос о начальной точке. Если начальная точка x_0 находится в середине отмеченной дуги или в противоположной позиции, то слово W оказывается палиндромом. Возникает также вопрос, когда правая половина W лексикографически максимально возможная. Если же число α есть квадратичная иррациональность, то при некоторых начальных положениях x_0 возникают Doll-системы. Интересно, при каких?

Все эти вопросы надо иметь в виду при обобщениях слов Штурма (особенно на перекладывания отрезков).

1.2 Перекладывания отрезков

Рассмотрение общего случая слов у которых графы Рози имеют большее число развилок (но все же их число конечно), т.е. слов с линейной функцией сложности приводит к изучению слов, порождаемых **перекладыванием отрезков.** Известно, что если перекладывание k отрезков *регулярно*, то есть траектория любого из концов отрезка перекладывания не попадает на конец другого отрезка, то слово, порождаемое данным перекладыванием, имеет функцию сложности $T(n) = n(k-1)+1$.

Перекладывания отрезков т.е. кусочно непрерывные преобразования одномерного комплекса естественным образом служат обобщением вращения. Эти преобразования были введены Оселедецом [40], следовавшим идее В. И. Арнольда [6], (см. также [28]). Рози [128] впервые показал, что связь между вращениями круга и последовательностями Штурма обобщается если рассматривать перекладывания отрезков. В связи с этим (в той же работе) он задал вопрос описания последовательностей, связанных с перекладываниями отрезков.

Такие последовательности являются еще одним естественным обобщением слов Штурма. В частном случае, для $k = 3$ отрезков, описание таких последовательностей было получено в работе [108], а работе [110] были изучены частные случаи последовательностей, порождаемых перекладыванием 4-х отрезков. Стоит также отметить работы [55, 58, 59, 60]. В случае произвольного числа отрезков также получен ряд интересных результатов. В работе [109] получен комбинаторный критерий на порождаемость слов, получаемых симметричным перекладыванием отрезков, то есть перекладыванием, связанным с перестановкой $(1 \to k, 2 \to k-1, \dots, k \to 1)$.

Комбинаторный критерий (для общего случая, не обязательно являющегося регулярным) того, что данное сверхслово является перекладыванием отрезков в терминах размеченных графов Рози описано в работе [94]. В этой работе показано следующее:

Теорема 1.2 *Равномерно-рекуррентное слово W порождается перекладыванием отрезков, тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози и Порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда слово обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.*

В работе [111] был независимо получен другой критерий порождаемости слов преобразованием перекладывания отрезков, для важного частного случая: при дополнительном условии: *траектория каждой концевой точки отрезка перекладывания не попадает на концевую отрезка перекладывания, в том числе сама на себя.* В этом случае, как не сложно видеть, слова будут иметь функцию сложности $T(n) = (k-1)n + 1$.

Отметим, что задача о перекладывании отрезков возникает при изучении бильярда в многоугольнике, все углы которого суть рациональные кратные π. В этом случае множество направлений звеньев бильярдной траектории конечно и можно рассмотреть положения на сторонах многоугольника. Множества пар (точка на стороне, направление) задает систему отрезков, а переход к следующему такому состоянию – кусочно линейное их отображение. Инвариантная мера задает длину этих отрезков, так что получается перекладывание.

В связи с теоремой 1.2 возникают вопросы. Прежде всего, верно ли, что если слово получается из перекладывания отрезков и оно рекуррентно, то оно равномерно рекуррентно? Верно ли, что число типов слов возникающих из заданного перекладывания отрезков конечно? Т.е. верно ли что число существенно различных эволюций конечно?

Теория слов Штурма должна хорошо соотноситься с проблемами перекладывания отрезков. Некоторые факты переносятся, но есть и различия. Например, спектр уже не обязательно оказывается дискретным. S.Ferenci поставил задачу получения прямого комбинаторного доказательства того, что если длины отрезков имеют общее положение (с точностью до меры нуль), и перекладывание не сводится к перекладыванию меньшего числа отрезков, то спектр не имеет дискретной компоненты.

Обратимся к условию (5) на последовательности Штурма. Случайному переключению развилок в графе Рози отвечает Гауссова мера на отрезке $[0,1]$ инвариантная относительно преобразования $x \to \{x^{-1}\}$. Теорема 1.2 дает возможность аналогичным образом вводить меру на множестве перекладываний отрезков. Она должна соотноситься с системой представителей Тейхмюллера.

Далее. Теорию цепных дробей можно переносить на теорию перекладываниий отрезков, в частности находить в терминах индукции Рози, моменты наилучшего приближения к данной точке.

Хотелось бы найти или доказать утверждение, что сдвиг окружности, управляемый *doll*-системой, связан с квадратичной иррациональностью. Существуют примеры *doll*-систем, связанной с перекладыванием отрезков и управляемых высшей иррациональностью. Эти примеры следует изучить (см. раздел 1.3).

Они приводят к исследовании фракталов в бильярдах с рациональными углами. Отметим, что внешний бильярд двойственен внутреннему и что компьютерные эксперименты обнаруживают фрактальную картину для случая правильного n-угольника. Ситуация однако, исследована при $n = 3, 4, 6$ (тривиальный случай), $n = 5, 8, 10$.

1.3 Схемы Рози и doll-системы

Графы Рози представляются комбинаторным языком, наиболее приспособленным для задания динамических систем. Другим комбинаторным языком является язык подстановок. Подстановочные динамические системы интенсивно исследовались рядом авторов. В этой связи следует обратиться к характеризации слов Штурма через свойство (4). Что можно сказать про динамические системы для произвольной системы подстановок? В частности, нас интересует случай периодичности системы подстановок. Для поворота окружности периодичность может наблюдаться только для случая ранга 2, т.е. для подстановок собственные значения соответствующей матрицы которых есть квадратичная иррациональность. Для перекладывания отрезков в общем случае возможно появление высших иррациональностей.

В этой связи важно уметь переводить свойство периодичности на язык графов Рози. Эту возможность предоставляет следующая теорема:

Теорема 1.3 ([76]) *Равномерно рекуррентное слово является образом инвариантного слова относительно некоторой подстановки при некотором морфизме тогда и толь ко тогда когда у него есть периодическая схема Рози.*

Из этой теоремы вытекает теорема Вершика-Лившица о периодичности диаграмм Брателли для марковских компактов, порожденных подстановочными системами [136, 137].

Доказательство теоремы Вершика-Лившица основано на явной конструкции. Доказательство теоремы 1.3 сложнее и явная конструкция нам не известна. Оно использует тонкие результатаы Ж.Кассиня.

Теорема 1.3 вместе с техникой доказательства позволила решить проблемы об алгоритмической разрешимости проверки периодичности а также равномерной рекуррентности для $HDOL$-систем. Проблема периодичности була поставлена в 1980 году и была независимо решена И.Митрофановым и Ф.Дюрандом [74, 75, 73, 72]

1.4 Фракталы Рози

Напомним критерий того, что равномерно рекуррентное слово получается из сдвига тора. Итак, пусть W сверхслово, полученное сдвигом тора, T есть оператор сдвига. Тогда функции рассогласования между сдвигами W удовлетворяют следующим свойствам.

1. Существует последовательность $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $\rho(T^{(n_i)}(W), W) \to 0$.
2. Существуют сколь угодно большие пары взаимно простых чисел (n_i, n_j); $n_i, n_j \to \infty$ из этой последовательности.

При этом интересно и важно исследовать такие слова, которые кроме того являются морфическими. Назовем соответствующую $doll$-систему *$doll$-системой евклидова типа.* В случае одномерного тора, по всей видимости, мы получим теорию слов Штурма. Типичным примером является *слово Фибоначчи.* Рассмотрим подстановку $\phi : 0 \to 001, 1 \to 01$. *Слово Фибоначчи* получается из символа 0 как $\phi^{\infty}(0)$. Оно является словом Штурма. *Слово трибоначчи* $\tau^{\infty}(0) = 01020100102010$ получается с помощью подстановки $\tau(0) = 01, \tau(1) = 02, \tau(2) = 0$.

В работе [125] G.Rauzy показал, что ему отвечает вращение 2-мерного тора $\mathbb{T}^2$, разбитого на три фрактальные области, именуемыми *фракталами Рози* отвечающие символам $0, 1, 2$. Теория фракталов Рози обобщается для так называемых *подстановок Пизо.*

Теория фракталов Рози дает другие образцы для исследования и обобщений, помимо теории последовательностей Штурма. В этой ситуации имеется очень красивое соответствие между арифметикой, теорией динамических систем и комбинаторики. Подробности см. [122].

Было бы интересно исследовать каким точкам фракталам Рози отвечают какие сверхслова, в частности какие HDOL-системы.

1.5 Унипотентные преобразования тора

Отметим, что язык графов Рози хорошо описывает одномерные системы. Необходимы и другие модели. Обратные задачи символической динамики, связанные с унипотентным преобразованием тора, изучались в работе [14]. В частности, такие слова, получаются из взятия дробных частей многочленов со старшим иррациональным коэффициентом в целых точках.

Пусть $P(n)$ – многочлен, коэффициент при старшей степени которого иррациональное число. Слово w ($w = (w_n), n \in \mathbb{N}$) состоит из последовательности первых двоичных цифр $\{P(n)\}$ т.е. $w_n = [2\{P(n)\}]$. Обозначим через $T(k)$ число различных подслов длины k слова w. Имеет место следующая

Теорема 1.4 *Существует многочлен $Q(k)$, зависящий только от степени многочлена P, такой, что при достаточно больших k выполнено равенство $T(k) = Q(k)$.*

Аналогичные вопросы исследовались в работе [57], [100]. Исследование бильярда с произвольными углами так же соотносится с теорией перекладывания отрезков, как повороты окружности с унипотентными преобразованиями тора. Возникает вопрос. Верно ли, что число слов растет точно полиномиально? По всей видимости, ответ отрицателен ибо не каждый бильярд эргодичен.

2 Комбинаторика слов и нормальные формы

Исследование комбинаторных и ассимптотических свойств алгебраических объектов имеет важные приложения. Можно выделить работы Фон Неймана, Дэя, Е. С. Голода и И. Р. Шафаревича, М. Громова, Вольфа, Фьюрстенберга, Столингса. Функции роста к.п. групп введены независимо А. А. Шварцем и Дж. Милнором при исследовании накрытий римановых пространств (с неположительной кривизной) см. [16], [17], [18], [44], [114], [123]. С понятием канонической или *нормальной формы* тесно связано понятие *роста*, которое интенсивно изучается. С каждой алгеброй можно связать мономиальную алгебру с таким же нормальным базисом [10].

Функция роста конечно порожденного, но бесконечного объекта измеряет насколько он отличается от конечного. Функции роста интенсивно исследуются в разных разделах математики. Известен классический результат М.Громова, утверждающий что группа с полиномиальным ростом есть расширение нильпотентной группы с помощью конечной. Знаменитая проблема Дж.Милнора утверждает наличие групп промежуточного роста. Она была решена Р. И. Григорчуком. Фундаметальное понятие *голономного D-модуля* в теории дифференциальных операторов формулируется на языке функции роста. Известная конструкция Голода–Шафаревича позволяющая строить ненильпотентные конечно порожденные ниль-кольца основана на анализе рядов Гильберта. В дальнейшем прорыв в этой области был осуществлен А. Смоктунович. Если функция роста полиномиальна, то показатель степени есть *размерность Гельфанда–Кириллова.* Теорема И. Бернштейна утверждает, что размерность Гельфанда–Кириллова нетривиального модуля над алгеброй Вейля $W_n = C[x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n]$ не менее n, если же она равна n, то такой модуль называется *голономным.* Известно, что ряд Гильберта относительно свободной алгебры рационален ([11], [86]). Функциям роста и проблемам рациональности посвящена обширная библиография. Подробный обзор – см. К. И. Бабенко [8]. Функции роста для мономиального случая а также в словах – см. [10]. Для бесконечно порожденного случая аналогом ряда Гильберта являются ряды коразмерности, введенные А.Регевым, которые сейчас интенсивно изучаются.

Задание элемента в алгебре осуществляется с помощью линейной комбинации слов, поэтому наиболее "чистыми" вопросами являются вопросы, относящиеся к комбинаторике слов. К комбинаторике слов сводится изучение роста алгебр и рядов Гильберта. Эффекты, связанные с периодичностью, возникают при рассмотрении вопросов бернсайдовского типа, таких, как теорема Ширшова о высоте, теорема о независимости, нильпотентность радикала PI-алгебры и т.п.

Мономиальные алгебры – это алгебры, все определяющие соотношения которых задаются словами от образующих. Их исследование имеет своей целью выявление идей, необходимых для построения комбинаторной теории колец. Благодаря этому исследованию стала более понятной роль равномерно рекуррентных слов и связь комбинаторной теории колец с символической динамикой.

Комбинаторика слов используется при изучении произвольных алгебр, не обязательно мономиальных. Комбинаторные леммы хорошо работают при изучении канонических базисов алгебр, нормальной формы ее элементов, проблемах бернсайдовского типа.

3 Графы Рози, Базисы Гребнера и ко-рост

Одним из основных инструментов исследования нормальных форм в различных исчислениях является *базис Гребнера* (правильнее говорить *базис Гребнера-Ширшова.* Базисы Гребнера активно исследуются в частности Л. А. Бокутем и его школой. На основе вычисления базисов Гребнера работают многие программы компьютерной алгебры, им посвящена обширная литература.

Пусть A – алгебра с образующими $a_1, \ldots, a_s$, I – идеал соотношений алгебры A. Порядок на образующих индуцирует порядок на множестве мономов (сперва по длине, потом лексикографически). Набор элементов $f_1, \ldots, f_k \in I$ называется *базисом Гребнера идеала* I, если для любого $f \in I$ старший моном $\bar{f}$ содержит для некоторого i подмономом старший член $\bar{f_i}$ элемента f_i. Если при этом старшие члены $\bar{f_i}$ не сравнимы по включению, то базис Гребнера является *редуцированным.* Если вхождения $\bar{f_i}$ перекрываются, то это называется *зацеплением.* Известна так называемая Bergman Diamond-Lemma (на самом деле восходящая к А. И. Ширшову), что если все зацепления редуцируются к нулю, то набор $\{f_i\}$ является базисом Гребнера.

Благодаря конечности базиса Гребнера для D-модулей можно осуществлять переход в конечную характеристику, что привело к прогрессу в проблеме Якобиана [64]. Хотя в случае конечности базиса гребнера проблема равенства разрешима, проблема делителей нуля – вообще говоря, нет [27]. (В мономиальном случае однако она все же разрешима [10], [65].) В общем случае базис Гребнера бесконечен, и его вычисление является алгоритмически неразрешимой задачей. В этой связи представляет интерес исследование *короста* идеала соотношений или роста количества редуцируемых мономов степени n не содержащих редуцируемых подслов.

Поскольку степень композиции меньше суммы степеней зацеляющихся членов, в конечно определенном случае корост либо конечен, либо не менее чем логарифмичен. Это дает надежду построить рекурсивный нормальный базис, который не реализуется в конечно определенной алгебре. Естественным образом определяется корост в словах, в частности исследование кодлины периода длины n или минимального числа запретов, задающих периодическую последовательность. В работе [49] установлена нижняя логарифмическая оценка, и приведены примеры последовательностей периода n с кодлиной порядка логарифма. Точная константа была вычислена в работе П.Лаврова [23] и позднее в работе И.Богданова и Г.Челнокова [24] несколько другим методом.

Эти примеры тесно связаны с последовательностями Штурма. В этой связи представляется интересным короста для равномерно рекуррентных слов а также морфических слов а также взаимосвязь функций роста и короста. Предполагается, что для равномерно рекуррентного слова W корост $K_W(n)$ не менее чем логарифмичен (в смысле верхнего предела), а для морфического равномерно рекуррентного слова он просто логарифмичен. Предполагаетс что оптимальная ситуация достигается в слове Фиббоначчи. По всей видимости, для равномерно-рекуурентного слова экспоненциальность роста влечет экспоненциальность короста. По всей видимости вообще говоря $\underline{\lim} \ln(K_W(n))/n$ и $\overline{\lim} \ln(K_W(n))/n$ могут быть различными величинами.

Такое исследование тесно связано с исследованием графов Рози. Функция короста оказывается тесно связана с перечислением биспециальных слов. Интересно также исследовать взаимосвязь функции роста и короста. Например, выяснить вопрос. Верно ли что промежуточность роста влечет промежуточность короста. Для автоматных мономиальных алгебр корост рационален. А.Кумок (в печати) осуществил оценку максимальной длины обструкции в зависимости от размера автомата для автоматной конечно определенной мономиальной алгебры.

3.1 Комбинаторика полилинейных слов

Значение понятия *n-разбиваемости* выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества, где *полилинейным* называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раз. В. Н. Латышев применил теорему Дилуорса для получения оценки числа не являющихся m-разбиваемыми полилинейных слов степени n, над алфавитом $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Эта оценка: $(m-1)^{2n}$ и она близка к реальности.

Из данной оценки следует выполнимость полилинейных тождеств, отвечающих неприводимому модулю, диаграмма Юнга которого содержит квадрат n^4. Это в свою очередь, во-первых, позволило получить прозрачное доказательство теоремы Регева о том, что тензорное произведение PI-алгебр снова является PI-алгеброй, во-вторых, установить существование разреженного тождества в общем случае, а также тождества Капелли в конечно порожденном случае (тем самым, в частности, доказать теорему о нильпотентности радикала), и в-третьих, осуществить “супертрюк” А. Р. Кемера, сводящий изучение тождеств общих алгебр к изучению супер-тождеств конечно порожденных супералгебр в нулевой характеристике.

Вопросы, связанные с перечислением полилинейных слов, не являющихся n-разбиваемыми, имеют самостоятельный интерес. (Например, существует биекция между не 3-разбиваемыми словами и числами Каталана.) С одной стороны, это чисто комбинаторная задача, с другой стороны, она связана с рядом коразмерностей для алгебры общих матриц. Исследование полилинейных слов представляется чрезвычайно важной. В. Н. Латышев (см. например [71]) поставил проблему конечной базируемости множества старших полилинейных слов для T-идеала относительно взятия надслов и изотонных подстановок. Из этой проблемы вытекает проблема Шпехта для полилинейных многочленов, имеется тесная связь с проблемой слабой нетеровости групповой алгебры бесконечной финитарной симметрической группы над полем положительной характеристики (для нулевой характеристики это было установлено А. Залесским). Для решения проблемы Латышева надо уметь переводить свойства T-идеалов и их носителей на язык полилинейных слов. В работах [10, 12] была попытка осуществить программу перевода структурных свойств алгебр на язык комбинаторики слов. На язык полилинейных слов такой перевод осуществить проще, в дальнейшем можно получить информацию и о словах общего вида.

Для осуществления такого перевода необходимо исследовать случаи матриц второго и третьего порядка а также нематричных многообразий.

Есть основания для оптимизма. Ряд Гильберта относительно свободных алгебр рационален, а размерности однородных компонент в конечно порожденной относительно свободной алгебры (если число образующих достаточно велико) определяют кратности в последовательности ко-характеров [79], так что явные формулы для ряда коразмерностей существуют.

Перечисление не n-разбиваемых полилинейных слов осуществлено в работах см также

Исследования полилинейных слов связано с градуированнной версией проблемы Шпехта. В работе [69] доказана локальная конечная базируемость и локальная представимость многообразий алгебр градуированных конечной группой. При этом требовалось наличие обычного (неградуированного) тождества. По всей видимости, за счет анализа полилинейных слов это условие есть шанс снять. Кроме того, хотелось бы получить обобщение результата [81].

3.2 Конечно определенные объекты

Проблема контроля над определяющими соотношениями и процедурами вывода является важной и актуальной проблемой современной алгебры и математической логике.

Непосредственным методом контроля является построение нормального базиса, но это не всегда возможно. Другим инструментом контроля служит базис Гребнера и diamond-lemma.

Задачи, связанные с доказательством алгоритмической неразрешимости, обычно решаются путем построения интерпретации машины Минского, при этом автоматная головка, осуществляющая вычислительный процесс, обычно только одна и локализована в определенном месте. Более сложным и важным инструментом работы является теория малых сокращений в группах. Для решения многих проблем теории колец крайне желательно иметь аналог теории малых сокращений, т.е. понять что означает *малое зацепление*. К сожалению, мы сейчас далеки от понимания всего этого. Вопросы постороения конечно определенной бесконечной ниль-полугруппы (проблема Шеврина), бесконечномерного конечно определенного ниль-кольца (проблема Латышева), или построения бесконечной конечно определенной периодической группы представляют собой способ говорить о проблеме контроля над соотношениями.

Групповая задача может быть исследована с помощью кольцевой, а для понимания кольцевой ситуации важны полугруппы.

А. Я. Белов и И. А. Иванов-Погодаев анонсировали решение проблемы Шеврина. Доказательство основано на следующих соображениях. Существуют законы примыкания плиток, которые может удовлетворить только непериодическая мозаика. Мозаику можно рассматривать как обобщение слова ибо слово есть расположение букв на отрезке прямой. Элемент полугруппы интерпретируется как путь на мозаике. Если соответствующие последовательности плиток локально определяют друг друга, то эти пути равны и один участок можно перебросить в другой. Если же нет локального продолжения, то соответствующий путь нулевой. Процедура вывода соотношений отвечает выкладыванию плиток, однако язык переброски путей является все же более слабым. Для того, чтобы он оказался достаточно сильным, необходимо чтобы существовало такое $\varepsilon > 0$ что для любого D любые две точки на расстоянии D соединялись семейством перетягиваемых друг в друга геодезических так что точки крайних геодезических находящиеся на расстоянии l от концов находились бы на расстоянии не менее чем $\varepsilon \cdot l$ друг от друга. Отметим, что такое пространство не может быть билипшицево эквивалентно плоскости. Оно представляет собой достаточно сложный комплекс.

3.3 Алгебры и равномерно-рекуррентные слова

Использование сверхслов позволяет проводить неконструктивные комбинаторные рассуждения с помощью соображений компактности (из кусков бесконечного множества конечных слов можно составить одно бесконечное слово).

С этой точки зрения чрезвычайно важным является понятие *равномерно рекуррентного* слова W. Равномерно рекуррентные (р.р.) слова позволяют, к примеру, описать все *почти простые* мономиальные алгебры (т.е. алгебры, любой фактор которых нильпотентен): это алгебры вида A_W, где A — р.р. непериодическое сверхслово. (Через A_W обозначается мономиальная алгебра, все ненулевые слова которой являются подсловами сверхслова W.) Основой доказательства этого факта является лемма, представляющая собой аналог теоремы плотности: для любых двух подслов $u \neq v$ непериодического р.р. слова W существуют подслова $r, t \subset W$ такие, что $rut \subset W$, $rvt \not\subset W$.

Этот результат используется при доказательстве теоремы о совпадении нильрадикала мономиальной алгебры и радикала Джекобсона. Нильрадикал мономиальной алгебры оказывается равным пересечению идеалов, факторы по которым мономиально почти просты. (Мономиальная алгебра называется *мономиально почти простой*, если каждый ее фактор по идеалу, порожденному мономом, нильпотентен.) Мономиально почти простая алгебра — это алгебра вида A_W, где W — произвольное р.р. сверхслово.

С помощью сверхслов получается также описание слабо нетеровых мономиальных алгебр, короткие доказательства теоремы о независимости и теоремы о локальной нильпотентности алгебры Ли, порожденной сэндвичами, что является одним из ключевых шагов в решении проблем Бернсайдовского типа для алгебр Ли. В терминах сверхслов естественно определяется порядок Уфнаровского — правые сверхслова образуют линейно упорядоченное множество.

4 Нормальные формы в алгебрах и теорема Ширшова о высоте.

Теоремы о высоте и о независимости а также теория представлений мономиальных алгебр оказываются тесно связанными, с одной стороны, с комбинаторикой слов и нормальных форм, а с другой — со свойствами первичных ассоциативных алгебр и комбинаторикой матричных единиц. Первым чисто комбинаторным результатом такого рода явилась

Теорема А. И. Ширшова о высоте. *Пусть A — конечно-порожденная* PI-*алгебра. Тогда существует конечный набор элементов Y и число $H \in \mathbb{N}$ такие, что A линейно представима (т.е. порождается линейными комбинациями) множеством элементов вида*

$$v_1^{k_1} v_2^{k_2} \dots v_h^{k_h}, \quad \text{где } h \leq H,\ v_i \in Y$$

В качестве Y можно взять набор слов степени не выше m. Такое Y называется *базисом Ширшова* алгебры A.

Из этой теоремы вытекает положительное решение проблемы Куроша, и других проблем бернсайдовского типа для PI-колец. Ведь если Y – базис Ширшова, и все элементы из Y – алгебраичны, то алгебра A конечномерна. Тем самым теорема Ширшова дает явное указание множества элементов, алгебраичность которых ведет к конечномерности всей алгебры. Как следствие получается, что если A – PI-алгебра степени m и все слова от образующих Aстепени не выше m алгебраичны, то A – локально конечна а также если конечность размерности Гельфанда–Кириллова. В ряде случаев эти импликации можно обобщить. Вместо понятия *высоты* удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты*. Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и "прокладок" ограниченной длины. Существенная высота есть число таких периодических кусков, а обычная еще учитывает "прокладки".

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы:

1. На какие классы колец можно распостранить теорему о высоте? Теорема о высоте была распространена на некоторые классы колец, близких к ассоциативным. С. В. Пчелинцев [41] доказал ее для альтернативного и $(-1, 1)$ случаев, С. П. Мищенко [38] получил аналог теоремы о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством. В работе автора [12] теорема о высоте была доказана для некоторого класса колец, ассимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы PI-алгебры.

2. Над какими Y алгебра A имеет ограниченную высоту? Пусть A — PI-алгебра, и подмножество $M \subseteq A$ является ее s-базисом. Тогда, если все элементы множества M алгебраичны над K, то алгебра A конечномерна (проблема Куроша). Ограниченность существенной высоты над Y влечет "положительное решение проблемы Куроша над Y". Обратное утверждение значительно менее тривиально [10].

3. Как оценить высоту? Первоначальное доказательство А. И. Ширшова хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности, в доказательстве теоремы о свободе), однако оно не давало разумных оценок на высоту. Позднее А. Т. Колотов [31]

получил оценку на $ht(A) \leq s^{s^m}$ $(m = \deg(A),\ s$ – число образующих). Позднее Е. И. Зельманов [20] поставил вопрос о наличии экспоненциальной оценки, которая была получена автором [13]. В дальнейшем была получена субэкспоненциальная оценка.

Теорема 4.1 ([68]) *Высота множества не n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n,l)$, где*

$$\Phi(n,l) = E_1 l \cdot n^{E_2 + 9(2e^2+1)\ln n},$$

где $E_1 = 12^{3(2e^2+1)\ln 12 + 3} + 1, E_2 = 9 + \ln 2 + 6(2e^2+1)\ln 12.$

Из данной теоремы путем некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном l и $n \to \infty$

$$\Phi(n,l) < n^{9(1+2e^2)(1+o(1))\ln n},$$

а при фиксированном n и $l \to \infty$

$$\Phi(n,l) < C(n)l.$$

Следствие 4.2 *Высота l-порождённой* PI*-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n не превышает* $\Phi(n,l)$.

Как следствие получаются субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности l-порожденных ниль-алгебр степени n для произвольной характеристики.

В этой связи возникает естественный

Вопрос. *Можно ли получить полиномиальную оценку для высоты?*

4. Как устроен вектор степеней $(k_1, \ldots, k_h)$? Прежде всего: какие множества компонент этого вектора являются существенными, т.е. какие наборы k_i могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота?

5. Вопрос о более тонком устройстве множества векторов степеней. Верно ли что оно обладает теми или иными свойствами регулярности? Хотя в представимом случае размерность Гельфанда-Кириллова и существенная высота ведут себя хорошо. Тем не менее даже тогда множество векторов степеней может быть устроено плохо — а именно, может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально-полиномиальных диофантовых уравнений. Поэтому существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Однако для относительно свободной алгебры ряд Гильберта рационален.

6. Какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$? Описание дает следующая теорема:

Теорема 4.3 (А. Я. Белов) *Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова u длины не выше $m = \mathrm{Pid}(A)$ — сложности алгебры A — множество Y содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени слова u.*

Отметим, что число n является точной оценкой.

Гипотеза Шестакова была решена В. А. Уфнаровским [45] и Г. П. Чекану [47]. В дальнейшем было показано [12], что в качестве $\{v_i\}$ можно взять множество слов из гипотезы Шестакова. Этот результат был также анонсирован Г. П. Чекану [48]. Затем другое доказательство этого факта было получено В. Дренским.

Первоначальные доказательства теоремы о независимости были достаточно сложными. Применение методов символической динамике, связанных с бесконечными словами или *сверхсловами*, позволило сделать их прозрачными. Техника сверхслов оказалась довольно близкой по духу структурной теории. Ее роль не исчерпывается доказательством утверждений типа теоремы о независимости. С помощью сверхслов доказывается теорема о высоте, нильпотентность алгебры Ли, порожденной сэндвичами [46], совпадение нильрадикала и радикала Джекобсона в мономиальных алгебрах, получается описание базисов алгебр с экстремальной функцией роста $V_A(n) = \frac{n(n+3)}{2}$ а также слабонетеровых, полупростых и полупервичных мономиальных алгебр [10] и получить ряд других комбинаторных результатов, относящихся к теории полугрупп и колец.

Список литературы

[1] С.И. Адян. Проблема Бернсайда и тождества в группах // М., Наука, 1975.

[2] Адян С. И., Разборов А. А. Периодические группы и алгебры Ли. Успехи мат. наук, 1987, т. 42, no 2, стр. 2–68.

[3] С.В. Алешин, О свободной группе конечного автомата.//Вестник Моск. Унив. Сер 1. Мат. и Мех.1983, |4, 12–14.

[4] С.В. Алешин, О суперпозициях автоматных отображений // Кибернетика, Киев, 1975, |1, 29–34.

[5] С.В. Алешин, Конечные автоматы и проблема Бернсайда для периодических групп // Мат. Заметки 11 (1972), 319–328.

[6] В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике// Успехи Мат. Наук, 1963, 18:6(114), стр. 91Ц192

[7] Ю.А. Бахтурин, Тождества в алгебрах Ли // Москва, Наука, 1985, 448 стр.

[8] *Бабенко И. К. Проблемы роста и рациональности в алгебре и топологии.* Успехи мат. наук, 1986, vol 41, no 2, pages 96–142.

[9] А.Я.Белов, Классификация слабо нетеровых мономиальных алгеб // Фунд. и прикл. мат. – 1995.–1.,т1,|4, –С. 1085-1089.

[10] А.Я.Белов, В.В.Борисенко, В.Н.Латышев, Мономиальные алгебры // Итоги науки и техники. Совр. Мат. Прил. Тем. Обзоры т. 26 (алг. 4), М. 2002. 35-214.

[11] *Белов А. Я. О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр.* Успехи мат. наук, 1997, т. 52, no 2, стр. 153–154.

[12] Белов А. Я. *О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n.* Мат. сб., 1988, т. 135, No 31, стр. 373–384.

[13] *Белов А. Я. Теорема о высоте для йордановых и лиевых* PI-*алгебр.* Сиб. школа по многообр. алгебраических систем. Тезисы. — Барнаул, 1988, стр. 12–13.

[14] А.Белов, Г.Кондаков, Обратные задачи символической динамики // Фундаментальная и прикладная математика, T1, |1, 1995

[15] Голод Е. С., Шафаревич И. Р. О башне полей классов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 964, т. 28, no 2, стр. 261–272.

[16] Голод Е. С. О нильалгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, no 2, стр. 273–276.

[17] Григорчук Р. И. К проблеме Милнора о групповом росте. Докл. АН СССР, 1983, т. 271, | 1, стр. 53–54.

[18] Григорчук Р. И. Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1984, т. 48, no 5, стр. 939–985.

[19] Григорчук Р. И. О рядах Гильберта-Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами. Мат. сб., 1989, т. 180, no 2, стр. 207–225.

[20] *Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник — 4-е изд.* — Новосибирск: изд. ин–та матем. СО АН СССР, 1993, 73 стр.

[21] М. И. Харитонов, *Оценки структуры кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте*, Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика., 2013, № 1, 10—16 arXiv:1108.6295

[22] М. И. Харитонов, *Двусторонние оценки существенной высоты в теореме Ширшова о высоте*, Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика., 2, 2012, с. 24–28.

[23] Petr Lavrov, *Number of restrictions required for periodic word in the finite alphabet.* arXiv:1209.0220

[24] Bogdanov, Ilya I.; Chelnokov, Grigory R. *The maximal length of the period of a periodic word defined by restrictions.* arXiv:1305.0460

[25] Mikhail Kharitonov, *Estimates on the number of partially ordered sets.* arXiv:1307.1886

[26] Каргаполов М.И. Мерзляков Ю.И. Основы теории групп, (3е изд., Наука, 1982) 288стр.

[27] *И. А. Иванов-Погодаев. Алгебра с конечным базисом Грёбнера и неразрешимой проблемой делителей нуля.* Фундамент. и прикл. матем., 12:8 (2006), 79–96

[28] А. Б. Каток, А. М. Степин, Аппроксимации в эргодической теории // Успехи Мат.Наук, 1967, 22:5(137), 81Ц106

[29] А.Т. Колотов, Апериодические последовательности и функции роста в алгебрах // Алгебра и логика, 20 (1981), 138–154, 250.

[30] А.Т. Колотов, Алгебры и группы с периодической функцией роста // Алгебра и логика, 19 (1980), 659–668, 745.

[31] А. Г. Колотов *О верхней оценке высоты в конечно порожденных алгебрах с тождествами.* Сиб. мат. ж., 1982, т. 23, N 1, стр. 187–189.

[32] Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986, 232 стр.

[33] *Курош А. Г. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах.* Изв. АН СССР, сер. мат., 1941, т. 5, стр. 233–240.

[34] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, Введение в теорию автоматов // Москва, “Наука”, 1985. 320 стр.

[35] В.Н. Латышев, К теореме Регева о тождествах тензороного произведения PI-алгебр // Успехи матем. наук, 1972, т. 27, | 4, стр. 213–214

[36] Р.Линдон, П.Шупп, Комбинаторная теория групп // М., Мир, 1980.

[37] Михалев А. А. Техника композиции А. И. Ширшова в супералгебрах Ли (некоммутативные базисы Гребнера). Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1994, т. 18,

[38] Мищенко С. П., Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли. Мат. заметки, 1990, ;7, no 4, стр. 83–89.

[39] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. сер. Соврем.алгебра. М.: Наука, 1989, 447 стр.

[40] В.И.Оселедец, О спектре эргодических автоморфизмов // ДАН СССР, 1966, 168, 1009Ц1011.

[41] Пчелинцев С. В. *Теорема о высоте для альтернативных алгебр.* Мат. сб., 1984, т. 124, No 4, стр. 557–567.

[42] Саломаа А. Жемчужины формальных языков. — М.: Мир, 1986, 159 стр.

[43] Я.Г. Синай, Введение в эргодическую теорию // М.: ФАЗИС, 1996. 144 с.

[44] *Трофимов В. И. Об одном признаке экспоненциального роста градуированных алгебр.* В кн.: Исследование алгебраических систем по свойствам их подсистем. — Свердловск, 1980, стр. 152–160.

[45] *Уфнаровский В. А. Теорема о независимости и ее следствия.* Мат. сб., 1985, т. 128, no 1, стр. 124–132.

[46] Уфнаровский В.А. Комбинат. и асимпт. методы в алгебре. // Итоги науки и тех. Серю Совр. Пробл. Мат. Фунд. направл. М. ВИНИТИ. 1990- 57, стр 5–177. (РЖМат, 1990).

[47] *Чекану Г. П. О локальной конечности алгебр.* Мат. исслед. (Кишинев), 1988, N 105, стр. 153–171.

[48] *Чекану Г. П. К теореме Ширшова о высоте.* XIX Всес. алгебр. конф.: Тезисы сообщ. I. — Львов, 1987, стр. 306.

[49] *Г. Р. Челноков О числе запретов, задающих периодическую последовательность* Моделирование и анализ информационных систем, Т.13, N3 (2007) 66–70

[50] Ширшов А. И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах. Мат. сб., 1957, т. 41, no 3, 381–394.

[51] Ширшов А. И. О кольцах с тождественными соотношениями. Мат. сб., 1957, т. 43, no 2, стр. 277–283.

[52] Ширшов А. И. О свободных кольцах Ли. Мат. сб., 1958, т. 45, no 2, стр. 113–122.

[53] Ширшов А. И. О базах свободной алгебры Ли. Алгебра и логика, 1962, т. 1, no 1, стр. 14–19.

[54] A.Aberkane, Words whose complexity satisfies $\lim p(n)/n = 1$ // Theor. Comp. Sci., 307, (2003), 31-46.

[55] P.Ambro z, L. Hákov ; E. Pelantová, Properties of 3iet preserving morphisms and their matrices // ProceedingsWORDS 2007, Eds. P. Arnoux, N. Bedaride, J. Cassaigne, (2007), 18–24.

[56] P. Arnoux and G. Rauzy [1991], Representation geometrique des suites the complexite $2n + 1$ // Bull. Soc. Math. France 119, 199-215.

[57] Arnoux, Pierre; Mauduit, Christian; Shiokawa, Iekata; Tamura, Jun-ichi. *Complexity of sequences defined by billiard in the cube.* Bull. Soc. Math. France 122 (1994), no. 1, 1–12.

[58] P.Balázi, Infnite Words Coding Three-Interval Exchange // diploma work CTU (2003).

[59] P.Balázi, Substitution properties of ternary words coding 3- interval exchange, // ProceedingsWORDS 2003, Eds. T. Harju and J. Karhumдaki, (2003), 119-124.

[60] P. Balázi, Z. Masáková, E. Pelantová, Characterization of substitution invariant 3iet words, submitted to Integers // arXiv:0709.2638, (2007).

[61] A.Belov, T. Gateva-Ivanova, Radicals of monomial algebras // Proceedings of Taiwan-Moscow Algebra Workshop, – С. 159-169, 1994.

[62] A. Belov. Some estimations for nilpotence of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem // *Communications in algebra*, 20 (10):2919–2922, 1992.

[63] *Belov, A., Michailov R. Free subalgebras of Lie algebras close to nilpotent.* Groups, Geometry, and Dynamics, No 1, 2010, pp. 15–29.

[64] *Belov, A.; Kontsevich M.L. Jacobian and Dixmier Conjectures are stably equivalent.* Moscow Mathematical Journal. Vol. 7 (2007) (A special volume dedicated to the 60-th anniversary of A.G.Khovanskii), No 2, pp 209–218.

[65] *А. Я. Белов. Линейные рекуррентные уравнения на дереве.* Матем. заметки, 78:5 (2005), 643–651

[66] *Kanel–Belov A., M.Kharitonov. Subexponential estimates in the height theorem and estimates on numbers of periodic parts of small periods.* Fundam. Prikl. Mat. (Fundamental and Applied Mathematics), 2011/2012, Vol. 17, No 5, p. 21–54 ;

[67] *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Full exposition of Specht's problem.* Serdica Math. J. 38 (2012), 313–370.

[68] *А. Я. Белов, М. И. Харитонов Субэкспоненциальная оценка в теореме Ширшова о высоте.* Матем. Сборник. 2012, vol. 203, N 4, p. 81–102.

[69] *Kanel–Belov A., Eli Aljadeff. Representability and Specht problem for G-graded algebras.* Adv. in Mat., vol. 225, No 5, 2010, pp. 2391–2428.

[70] *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Structure of Zariski-closed algebras.* Trans. Amer. Math.Soc., Vol.362, No 9, Pages 4695–4734.

[71] В. Н. Латышев. *Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств.* Фундамент. и прикл. матем., 12:2 (2006), стр. 101–110

[72] Ivan Mitrofanov *On uniform recurrence of HD0l systems*, arXiv:1111.1999 20 pages.

[73] Ivan Mitrofanov, *A proof for the decidability of HD0L ultimate periodicity.* arXiv:1110.4780 33 pages.

[74] Durand, Fabien. *Decidability of uniform recurrence of morphic sequences.* arXiv:1204.5393

[75] Durand, Fabien. *Decidability of the HD0L ultimate periodicity problem.* arXiv:1111.3268

[76] *А.Белов, И.Митрофанов.* Периодичность схем Рози для морфических последовательностей. в печ.

[77] *A.Ya.Belov, G.V.Kondakov, I.Mitrofanov. Inverse problems of symbolic dynamics.* Banach Center Publ. 94 (2011), 43–60.

[78] *Belov A. J., Ivanov I.A. Construction of semigroups with some exotic properties.* Acta Appl. Math. 85 (2005), no. 1-3, 49–56.

[79] *Berele, Allan. Applications of Belov's theorem to the cocharacter sequence of p.i. algebras.* J. Algebra 298 (2006), no. 1, 208–214.

[80] *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Full quivers of representations of algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 5525–5569.

[81] *Kanel–Belov A., Eli Aljadeff. Hilbert series of PI-relative free g-graded algebras are rational functions.* Bull. London Math. Soc., (2012), 44(3): 520–532, doi:10.1112/blms/bdr116

[82] *Kanel–Belov A., Malev S., Rowen Louis H. The images of non-commutative polynomials evaluated on* 2×2 *matrices.* Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 465–478 (posted in arxiv.:1005.0191v2).

[83] *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Application of full quivers of representations of algebras, to polynomial identities.* Comm. in Algebra, vol. 39: 4536–4551, 2011.

[84] *Kanel–Belov A., Rowen Louis H.; Vishne, Uzi Normal bases of PI-algebras.* Adv. in Appl. Math. 37 (2006), no. 3, 378–389.

[85] *Kanel–Belov A., Rowen Louis H. Perspectives on Shirshov's Height Theorem.* in book: selected papers of A.I.Shirshov, Birkhüser Verlag AG (2009), 3–20.

[86] *Kanel–Belov, Alexei; Rowen, Louis Halle Combinatorial aspects in polynomial identities*. Research Notes in Mathematics, 9. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005. xxii+378

[87] *Belov, A. Local finite basis property and local representability for varieties of associative rings.* Doclady Academii Nauk (Reports (CR) of Acad. of Sci. of Russia). 2010, v.432, No 6, pp. 727–731, (Doklady Mathematics), Engl. transl.: 2010, Vol. 81, No. 3, pp. 458–461.

[88] *Belov, A. Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings.* Izvestia of Russian Academia of science, No 1, 2010, pp. 3–134. English transl.: Izvestiya: Mathematics, vol. 74, No 1, pp. 1–126.

[89] *A.L. Chernyat'ev*, *Balanced Words and Dynamical Systems* // Fundamental and Applied Mathematics, 2007, vol. 13, No 5, pp. 213–224

[90] *A.L. Chernyat'ev*, *Words with Minimal Growth Function* // Vestnik Mosk. Gos. Univ., 2008.

[91] *A.Ya. Belov and A.L. Chernyat'ev*, *Describing Sturmian Words over an n-letter Alphabet* // Math. Met. Appl. IV, MGSU, 1999, pp 122–128.

[92] *Belov A. J. About Non-Specht varieties.* Fund. i prikl. matem., 1999, vol. 5, N 1, pp. 47–66.

[93] *Belov A. J. Counterexamples to the Specht problem.* Mat. sb., 1999, vol. 191, N 3, p.13–24. (Engl. transl. Sbornik: Mathematics 191:3, 329–340.)

[94] *A.Ya. Kanel-Belov, A.L. Chernyat'ev. Describing the set of words generated by interval exchange transformation.* Comm. in Algebra, Vol. 38, No 7, July 2010, pages 2588–2605.

[95] G.M. Bergman, A note on growth functions of algebras and semigroups // Research Note, University of California, Berkeley, 1978.

[96] V. Berthé, S. Ferenczi, L.Zamboni: Interactions between dynamics, arithmetics and combina- torics: the good, the bad, and the ugly, AMS Contemporary Math. 385 (2005), p. 333-364.

[97] J. Berstel, P. Séébold, Sturmian words, in: M. Lothaire (Ed.) // Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Chap. 2).

[98] J.Berstel, Resent results on Sturmian words // Developments in language theory II, 13-24, World Scientific, 1996.

[99] J.Cassaigne. *Special factors with linear subword complexity.* Developments in language theory, II (Magdeburg, 1995), 25-34, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.

[100] *Cassaigne, J. (F-CNRS-IML); Hubert, P. [Hubert, Pascal] (F-CNRS-IML); Troubetzkoy, S. (F-CNRS-IML) Complexity and growth for polygonal billiards.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002), no. 3, 835–847.

[101] X. Droubay, G. Pirillo, Palindromes and sturmian word// Theroret. Comput. Sci., 223:73-85, 1999.

[102] X.Droubay, J.Justin, G.Pirillo, Episturmian words and some construction of de Luca and Rauzy // Theoret. Comp. Sci.,(2001) 539–553.

[103] *Drensky V. Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras.* J. Algebra, 1984, vol 91, no 1, pages 1–17.

[104] *Drensky V. Free algebras and* PI-*algebras.* Springer, 2000, Pages 271.

[105] *H. Furstenberg. Poincaré reccurence and number theory.* Bull. Amer. Math. Soc., 5:211-234, 1981.

[106] R. L. Graham, Covering the Positive Integers by disjoints sets of the form $\{[n\alpha+\beta] : n = 1, 2, \ldots\}$ // J. Combin. Theory Ser A15 (1973) 354-358.

[107] P. Hubert, Well balanced sequences // Theoret. Comput. Sci. 242 (2000) 91Ц108.

[108] S. Ferenczi, C. Holton, L. Zamboni, The structure of three-interval exchange transformations II: a combinatorial description of the trajectories// J. Anal. Math. 89 (2003), p. 239-276.

[109] Ferenczi, L. Zamboni, A new induction for symmetric k-interval exchange transformations and distances theorem, submitted, http://iml.univ-mrs.fr/ ferenczi/fz1.pdf

[110] Ferenczi, L. Zamboni, Examples of 4-interval exchange transformations, preprint (2006), http://iml.univ-mrs.fr/ ferenczi/fz2.pdf

[111] Ferenczi, L. Zamboni, Languages of k-interval exchange transformations, submitted, http://iml.univ-mrs.fr/ ferenczi/fz3.pdf

[112] *Giambruno A., Zaicev M. Exponential Codimentional Growth of* PI-*algebras: an exact estimate.* Adv.in Math., 1999, vol 142, pages 221–243.

[113] *Giambruno A., Zaicev M. Minimal varieties of exponential growth.* Adv.in Math., 142, 1999, vol 142, pages 221–243.

[114] *Gromov M. Groups of polynomial growth and extending maps.* Publ. Math. inst. hautes etud. sci., 1981, vol. 53, pages 53–73.

[115] *Kemer A. R. Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p.* Intern. J. of Algebra and Computations., 1995, vol 5, no 2, pages 189–197.

[116] Krause, G.; Lenagan, T.H.: Growth of algebra and Gelfand-Kirillov dimension // Research Notes in Math., Pitman, London, 1985.

[117] A. de Luca, Sturmian words: structure, combinatorics and their arithmetics // Theoret. Comp. Sci., 183, (1997), 45-82.

[118] A. de Luca and S. Varricchio. Combinatorial properties of uniformly recurrent words and an application to semigroups. // *Inter. J. Algebra Comput.*, 1(2):227–246, 1991.MR 92h:20084.

[119] *Application of Adic representations in the investigations of metric, spectral and topological properties of dynamical systems.* Sanct-Petersburg, 1995, 176 pages.

[120] M. Lothaire, Combinatorics on Words // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983, Vol. 17.

[121] M. Lothaire, Algebraic combinatorics on words. A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski. With a preface by Berstel and Perrin. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 504 pp.

[122] *Mauduit, C. Substitutions, arithmetic and finite automata: an introduction. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics,* 35-52, Lecture Notes in Math., 1794, Springer, Berlin, 2002, 37B10 (11B85) PDF Clipboard Series Chapter

[123] *Milnor J. Problem 5603.* American Mathematical monthy, 1968, vol. 75, No 6, pages 675–686.

[124] M. Morse and G. A. Hedlund [1940], Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories, // Amer. J. Math. 62, 1-42.

[125] G. Rauzy, *Nombres algebriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), p. 147–178.

[126] G. Rauzy, Mots infnis en arithmetique, in: Automata on Infnite Words // Ecole de Printemps d'Informatique Thfeorique, Le Mont Dore, May 1984, ed. M. Nivat and D. Perrin, Lecture Notes in Computer Science, vol. 192, Springer-Verlag, Berlin etc., pp. 165-171, 1985

[127] G. Rauzy, Suites á termes dans un alphabet fini // In *Sémin. Théorie des Nombres,* p. 25-01-25-16, 1982-1983, Exposé No 25.

[128] G. Rauzy, Échanges d'intervalles et transformations induites, (in French), Acta Arith. 34 (1979), p. 315-328.

[129] G. Rozenberg and A. Salomaa // The Mathematical Theory of L Systems, Academic Press, New York etc., 1980

[130] G.Rote, Sequences with subword complexity $2n$ // J. Number Theory 46 (1994) 196–213.

[131] Arto Salomaa.*Jewels of Formal Language Theory* // Computer Science Press, 1981.

[132] R.Tijdeman, Decomposition of the integers as a direct sum of two subsets // in: Number Theory, ed. by S. David, Number Theory Seminar Paris 1992-93, Cambridge University Press, (1995), 261-276

[133] R.Tijdeman, Fraenkel's conjecture for six sequences // Discrete Mathematics, Volume 222, Issue 1-3, 223 - 234, 2000

[134] L. Vuillon, Balanced words // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 10 (2003), no. 5, 787-805

[135] L.Vuillon, A characterization of Sturmian word by return words // European Journal of Combinatorics (2001) 22, 263-275.

[136] Vershik, A. M. *The adic realizations of the ergodic actions with the homeomorphisms of the Markov compact and the ordered Bratteli diagrams.* Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 223 (1995), Teor. Predstav. Din. Sistemy, Kombin. i Algoritm. Metody. I, 120–126, 338; translation in J. Math. Sci. (New York) 87 (1997), no. 6, 4054–4058.

[137] Vershik, A. M.; Livshits, A. N. *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics. Representation theory and dynamical systems,* 185–204, Adv. Soviet Math., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[138] *Belov A. J. Rationality of Hilbert series with respect to free algebras.*, Uspehi mat. nauk, 1997, vol. 55, N 2, p. 153–154. translation in Russian Math. Surveys 52, 1997, N 2, 394–395

[139] H.Weyl, Über der gleichverteilung von zahlen mod 1, // Math. Ann., v. 77, 313-352, 1916.