Автоматы и конечно-определенные полугруппы.

И. А. Иванов -Погодаев   А. Я. Белов -Канель

29 сентября 2019 г.

1 Введение.

В настоящем проекте ставится задача построения систем, задаваемых конечным образом, но обладающих достаточно сложной структурой и экзотическими свойствами. Это интересно в связи с традиционными вопросами высшей алгебры о структуре конечно-определенных алгебраических систем: групп, полугрупп, колец. Например, важным вопросом является описание условий на ниль-кольцо, при которых оно будет нильпотентным. Интересен также аналогичный вопрос о полугруппах. Для того, чтобы подобраться к полугруппам, нужно будет изучить несколько определений и примеров.

Для перехода к полугруппам полезна тренировка на автоматах с конечной памятью (цикл А). Цикл В служит для использования техники в конечно-определенных полугруппах, основной результат этого цикла (построение конечно-определенной полугруппы с нецелой размерностью Гельфанда-Кириллова) имеет самостоятельный интерес.

2 Цикл А. Автоматы и совместные стратегии.

В первых (вводных) задачах цикла изучается стандартный конечный автомат: робот,перемещающийся по клеточной плоскости. Робот это механизм, производящий заранее определенный набор действий по определенной программе. Робот может делать следующее:

1. Перемещаться вперед (в соседнюю клетку);
2. Поворачиваться на месте на 90 градусов;
3. Ставить флажок в клетку, где находится (если флажок у него есть);
4. Проверять наличие флажка в своей клетке.
5. Брать флажок из своей клетки.

Наличие у робота флажков (и их количество) оговаривается заранее. Программа состоит из пронумерованного упорядоченного набора инструкций для робота, причем некоторые инструкции могут заключаться в переходе к другой инструкции. Мы будем ставить для робота задачи обхода, состоящие в том чтобы обойти, то есть побывать в каждой клетке некоторой области.

Сначала выясним некоторые возможности робота.

Пример. Докажем, что робот с двумя флажками может обойти ленту - бесконечную полосу с шириной в 1 клетку. Пусть в начале робот находится в клетке с номером 0 с двумя флажками. Построим программу робота.

1. Поставить флажок.

2. Перейти в клетку 1.

3. Поставить флажок.

Теперь нужно организовать “челночное” движение робота между флажками, с попутным увеличением расстояния между ними. То есть, середина отрезка между флажками остается на месте, а флажки робот “расталкивает” в разные стороны. Этого добиваемся с помощью следующей программы:

4. Повернуться на месте 2 раза. (разворачиваемся на 180 градусов)

5. Пройти вперед.

6. Проверить наличие флажка.

7. Если флажка нет – перейти к 5.

8. Взять флажок и перейти на одну клетку вперед.

9. Положить флажок и перейти к 4.

Легко видеть, что робот побывает в каждой клетке ленты.

Интересен вопрос, может ли робот без флажков обойти ленту? Оказывется, нет. Чтобы доказать это, необходимо формализовать конструкцию робота. Ясно, что действие, которое робот выполнит в следующий момент, полностью зависит от номера инструкции, которую должен выполнить в данный момент робот и от наличия-отсутствия в клетке флажка. Назовем эти факторы *внутренним состоянием робота.* Ясно, что у робота конечное число возможных внутренних состояний. Выполнив какое-либо действие, робот, вообще говоря, его меняет. По принципу Дирихле, через какое-то время внутреннее состояние робота повторится. Пусть, прошло t секунд и, по сравнению с первым моментом, когда у него было такое состояние, робот сдвинулся вправо на расстояние a. Отметим, что прошло конечное время, и поэтому существует клетка K, левее начальной, где робот еще не был. Поскольку состояние робота такое же, как t секунд назад, еще через t секунд робот сдвинется еще на a вправо, опять не посетив эту клетку. Легко видеть, что далее робот будет действовать, периодически сдвигаясь вправо, и клетку K он не посетит никогда.

A0. *Докажите, что робот с одним флажком ленту обойти не сможет.*

Указание. Рассмотрите отдельно случаи: 1) когда робот не удаляется от флажка на расстояние большее некоторого N; и 2) когда робот отходит от флажка сколь угодно далеко.

A1. *Докажите, что робот с 4 флажками может обойти плоскость.*

A2. *Докажите, что робот с 3 флажками может обойти плоскость. Может ли робот с 3 флажками обойти трехмерное пространство?*

A3. Пусть некоторые границы клеток непроходимы для робота. Робот может видеть барьеры между клетками (проверять на их наличие любую из сторон клетки, где он находится).

Пусть непроходимая для робота линия делит плоскость на полуплоскости. Докажите, что робот с 1 флажком может обойти полуплоскость.

A4. *Докажите, что робот с 1 флажком не может обойти плоскость с четырьмя разрезами (рис.1), а с двумя флажками – может.*

A5. Пусть робот ходит по вершинам графа (возможно, бесконечного).

a) *Докажите, что робот с 1 флажком не может обойти бесконечное дерево (граф без циклов), каждая вершина которого имеет степень* 3.

b) *Докажите, что робот с 2 флажками не может обойти дерево (граф без циклов), каждая вершина которого имеет степень* 3.

A6. *Докажите, что робот с 2 флажками не может обойти плоскость.*

Указание. Используйте идеи, применяющиеся при доказательстве в A0, A4.

Пусть робот без флажков движется в первой четверти плоскости. Границы (оси координат - непроходимые стенки и робот может их обнаруживать.

A7. *Пусть в начале робот находится в клетке с координатами* $(2^n, 0)$. *Составьте универсальную по n (независящую от n) программу, переводящую робота в клетку* $(3^n, 0)$ *с последующей остановкой в ней.*

Указанный в этой задаче переход будем называть *переходом от* 2^n *к* 3^n.

A8. *По аналогии с предыдущей задачей, осуществите следующие переходы:*
a) от 2^n *к* 6^n;
b) от 2^n *к* 2^{2^n};
c) от $2^n * 3^m$ *к* $2^n * 3^m * 5^{mn}$;
d) от $2^n * 3^m$ *к* $2^n * 3^m * 5^{m+n}$;
e) от 2^n *к* $2^{[\sqrt{n}]}$;
f) от 2^n *к* 2^{n^2};
g) от 2^n *к* 2^{k_n}, где k_n есть n-ая цифра десятичного разложения $\sqrt{2}$;
h) от 2^n *к* 2^{k_n}, где k_n есть n-ая цифра десятичного разложения π?

A9. *Докажите, что робот с 3 флажками может обойти n-мерное клеточное пространство.*

A10. *Докажите, что робот с 3 флажками может обойти бесконечное дерево, каждая вершина которого имеет степень* 3.

Подведение итогов. *Составьте таблицу, отражающую возможность обхода различных областей (лента, плоскость, полуплоскость, четверть, пространство, дерево) с помошью* $0, 1, 2, 3$ *флажков.*

Теперь мы переходим к изучению цепи конечных автоматов, перед которыми стоит некоторая общая задача.

Общая постановка. Имеется цепь стрелков, каждый из которых может общаться только с двумя своими непосредственными соседями. Цепь состоит из конечного числа стрелков N (мы установим его потом), два крайних стрелка имеют только по одному соседу. Один из крайних стрелков получает команду, после чего стрелки должны договориться и одновременно произвести выстрел.

A11. *Пусть количество стрелков* $N = 4$*. Существуют ли правила поведения стрелков, обеспечивающие решение этой задачи, если каждый стрелок может только толкать локтями одного или двух своих соседей?*

A12. *Пусть количество стрелков* $N = 5$ *и стрелки не толкаются локтями, а могут передавать друг другу сообщения* 2 *видов (a или b). Кроме того, каждый стрелок может хранить конечный объем информации - каждый помнит одно число от* 1 *до* 16*. То есть, каждый стрелок знает инструкции, которые мы даем ему и кроме того, в текущий момент он может запоминать число от* 1 *до* 16*. При этом инструкции имеют вид:*

"если у тебя число 6 *– передай "a" вправо и запомни* 8*"*

или

"получил "b" слева + у тебя 7 *– передай "a" влево и запомни* 5*".*

Можно ли задать инструкции так, чтобы стрелки выполнили задачу?

Мы обсудили частные случаи цепей стрелков в условиях ограничения количеством памяти и типов сигналов. Пусть теперь количество стрелков конечно, но заранее неизвестно, а память и количество типов сигналов для обмена ограничены.

A13. *(Задача Майхилла о стрелка́х). В ряд выстроены* N *стрелков. Каждый стрелок может запоминать конечный объем информации и знает конечный набор слов. Стрелки могут общаться между собой: за* 1 *секунду времени каждый может сказать своим соседям слева и справа несколько слов из того набора, который он знает (передать сигнал). У каждого стрелка в ружье заряжена пуля. Перед взводом поставлена задача : выстрелить одновременно. Можно ли дать каждому стрелку конечный набор инструкций (какой сигнал и куда передавать в зависимости от полученых сигналов до этого), чтобы взвод справился с поставленной задачей, если начальная команда дается крайнему слева стрелку, а* N *заранее не известно?*

Для формализации данной задачи полезно предствлять себе стрелков в виде конечных автоматов: устройств содежащих k ячеек памяти, в каждой из которых записано число "0″ или "1″. Каждый автомат может принимать и отправлять p разных сигналов, причем, если нужно, может работать налево и направо в один и тот же момент (в том числе передавать и принимать сигналы одновременно). Иструкции автомату - это набор правил, по которым автомат меняет состояние своих ячеек памяти в зависимости от их текущего состояния и принятых сигналов, а также набор правил, по которым автомат отправляет сигналы в зависимости от текущего состояния своих ячеек памяти. Будем называть это текущее состояние – внутренним состоянием автомата.

Указание. Можно организовать два сигнала: один передается далее, как только получен (в следующую секунду), а другой - с задержкой на 2 секунды. Тогда первый сигнал будет распространяться в три раза быстрее второго. В момент, когда сигнал доходит до крайнего справа стрелка, тот посылает его обратно. Определите "место встречи" сигналов и введите дополнительные инструкции для стрелков, для этого случая (получения сигналов одновременно с разных сторон).

A14. *В условиях предыдущей задачи, организуйте стрелков так, чтобы они одновременно выстрелили не позже, чем через 2N-2 секунды.*

3 Цикл B. Конечно-определенные полугруппы.

Правила передачи сигналов автоматами допускают формализацию в терминах алгебры. Сначала введем необходимые определения.

Язык полугрупп. Пусть есть некоторый конечный алфавит A: множество букв $a, b, c...$. Из букв алфавита можно составлять слова: конечные последовательности букв, например $abbc$, a, $cabcabcbbb$ и т.п. Будем называть произведением слов A и B слово, получающееся приписыванием слова B справа к слову A. Таким образом, алфавит задает множество слов, с определенной на нем операцией произведения.

Полугруппой будем называть множество элементов с заданной на нем операцией произведения $*$ (результатом применения операции для двух элементов является элемент из этого же множества) и выполненным для любых элементов a, b, c свойством $a*(b*c) = (a*b)*c$. Это свойство называется *свойством ассоциативности.*

> **Примеры.** Множество натуральных чисел образует полугруппу, относительно сложения. Множество рациональных чисел образует полугруппу относительно умножения, а относительно деления - нет, так как делить на нуль нельзя.

Задаваемое алфавитом множество слов является полугруппой относительно операции приписывания одного слова к другому. (Ассоциативность, очевидно, соблюдается). Более точно, такое множество слов называется *свободной* полугруппой. Если алфавит букв, из которых составляются слова, конечный, то полугруппа называется *конечно-порожденной.* (То есть полугруппа конечно порождена, если можно выбрать конечное множество элементов, а остальные элементы представить в виде произведений выбранных.) Мы будем рассматривать только конечные алфавиты и конечно-порожденные полугруппы.

N-ой степенью слова X называется слово, получающееся выписыванием слова X N раз подряд.

Задача. Докажите, что если произведение слов U и V равно произведению слов V и U, то U и V представляются в виде степеней какого-то слова A.

Определяющие соотношения. Пусть теперь в произвольном слове разрешено заменять одно подслово на другое. Например, ab разрешено заменять на bca. Тогда слова ab и bca считаются эквивалентными или "одинаковыми". Кроме того, считаются одинаковыми все слова, приводимые одно к другому последовательными заменами подслов на эквивалентные им. То есть, если $ab = bca$, то $aaab = aabca = abcaca = bcacaca$, и значит, $aaab$ и $bcacaca$ эквивалентные слова.

Таким образом, получаются *классы эквивалентности*: совокупности попарно эквивалентных слов. Элементами полугруппы будут являться сами классы эквивалентности. Чтобы найти произведение двух элементов-классов, берут из каждого класса по одному представителю-слову, находят слово- произведение. Это слово входит в какой-то класс эквивалентности. Он и объявляется произведением элементов-классов. Легко проверить, что результат не зависит от выбора представителей (слов из классов).

На практике, в качестве элементов полугруппы рассматривают слова. Просто некоторые из них считают равными.

Что же нужно сделать, чтобы задать полугруппу? Для этого задаются *определяющие соотношения*, это пары равных (эквивалентных), по определению, слов. Все слова, которые можно получить друг из друга последовательными заменами подслов на им эквивалентные, сами считаются равными.

> **Пример.** Выясним устройство полугруппы с определяющими соотношениями: $ba = abb$; $aa = a$.
>
> Возьмем произвольное слово. В случае если в где-нибудь в слове стоят подряд более одной буквы a, можно применить второе соотношение. Следовательно, слово приводится к виду:
>
> $$b^{k_1}ab^{k_2}a\dots ab^{k_n}, \qquad \text{где } k_1 \geq 0, k_n \geq 0, k_2, k_3, \dots k_{n-1} > 0.$$
>
> Далее, все буквы a, пользуясь первым соотношением, можно "перегнать" влево, приведя слово к виду a^nb^k. Теперь опять применяем второе соотношение и приводим слово к

виду ab^n. Таким образом, любое слово, в которое входит хоть одна буква a приводится к виду ab^n. Значит, все элементы полугруппы имеют вид $a^k b^n$, $k = 0$ или 1, $n \geq 0$. Следовательно, данная полугруппа описывается парами чисел (n, k), причем $n = 0$ или 1, $k \geq 0$. Легко видеть, что произведение пар подчиняется правилам $(n, k_1) * (0, k_2) = (n, k_1 + k_2)$, $(n, k_1) * (1, k_2) = (1, 2k_1 + k_2)$.

Полугруппа с конечным множеством определяющих соотношений называется *конечно-определенной*. Далее мы будем обсуждать только конечно-определенные полугруппы. *Нулевым* элементом (*нулем*) полугруппы называется такой элемент 0, для которого при любом элементе x выполнено $0 * x = x * 0 = 0$. Легко видеть, что если нуль есть, то он один. Полугруппа, содержащая нуль, называется *полугруппой с нулем.* Полугруппа, состоящая из конечного числа элементов называется *конечной.*

Определяющие отношения в полугруппах служат для задания законов, по которым можно преобразовывать слова. Полугруппы и автоматы, в какой-то степени, родственные объекты. Автоматы могут анализировать данные и производить какие-либо действия в зависимости от полученной информации. Полугруппы могут анализировать и "обрабатывать" слова некоторых типов посредством определяющих отношений. Например, можно обнулять некоторые слова. Применяя "обнуляющие" соотношения, можно запрещать ненужные нам комбинации, и оставлять в рассмотрении только слова удобного вида.

Пример. Построим конечно-определенную полугруппу, все ненулевые слова в которой имеют вид $a^n b^k c^l$, где $n, k, l \geq 0$. В данном случае алфавит состоит из трех букв, a, b, c. Введем определяющие отношения $ba = 0, ca = 0, cb = 0$. Сразу видно, что если в слове присутствует c, то только в конце слова, это следует из соотношений $ca = 0, cb = 0$. Отметим, что в конце слова может быть несколько c, то есть c^l. Аналогично, из соотношения $ba = 0$ следует, что после b может быть только c. Получаем требуемый стандартный вид.

В задаче Майхилла стрелки обменивались информацией, посылая друг другу сигналы. В полугруппе можно воспользоваться похожей конструкцией приема и передачи сигнала. Сигналом в данном случае служит специальная буква, перемещающаяся внутри массива других букв благодаря заданным законам.

Пример. Пусть есть конечный алфавит L и A, B - буквы из L. Построим конечно-определенную полугруппу, без ненулевых слов, содержащих A и B одновременно. Пусть, например, алфавит состоит из букв A, B, c, d, e, t. Введем соотношения $A = At$, $A = tA$, $tc = ct$, $td = dt$, $te = et$, $tB = 0$, $Bt = 0$.

Возьмем произвольное слово, содержащее одновременно и A и B. Докажем, что оно равно нулю. Пусть, для определенности, слово содержит A слева от B (другой случай разбирается аналогично). Выделим в нашем слове подслово вида AXB, где X состоит из букв c, d, e, t. Согласно введенным соотношениям, $AXB = AtXB = AXtB = 0$.

B0. *Образуют ли полугруппы:*

a) Отрицательные числа по умножению;

b) Натуральные числа относительно операции взятия суммы квадратов;

c) Квадраты на плоскости относительно пересечения;

d) Слова в алфавите a, b с первой буквой a;

e) числа, представимые в виде суммы двух кубов натуральных чисел относительно умножения;

f) множество движений пространства, переводящие в себя единичный куб, относительно последовательного применения?

B1. *Опишите полугруппу, задаваемую соотношениями $bab = 0$; $baa = baca$; $ca = ac$; $cbb = 0$; $bbb = 0$. Конечна ли она?*

B2. *Докажите, что если полугруппа конечна, то в ней найдется элемент a, такой, что $a * a = a$.*

Элемент полугруппы a, удовлетворяющий соотношению $a^2 = a$ называется *идемпотентным элементом*, или *идемпотентом.*

B3. *В алфавите индейцев N букв. Из них индейцы составляют слова. Известно, что любое слово, повторенное дважды, означает то же самое, что и само слово, а замена подслова на его квадрат не меняет смысла всего слова. Например,* **коророва** *означает то же, что и* **корова***. Докажите, что в языке индейцев конечное число понятий, если:*

a) $N = 2$;

b) $N = 3$;

c) N - произвольное натуральное число.

Примечание. Переформулировка утверждения этой задачи на языке полугрупп звучит так: *Идемпотентная конечно-порожденная полугруппа конечна.*

B4. *Пусть есть конечный алфавит L и A, B, C - буквы из L. Постройте конечно-определенную полугруппу, без ненулевых слов, содержащих A, B C одновременно.*

B5. *Пусть $R_1, R_2, R_3, a, b, c, d \in L$. Постройте конечно-определенную полугруппу, все ненулевые слова в которой представляются в виде подслова слова вида $a^{n_1}R_1b^{n_2}R_2c^{n_3}R_3d^{n_4}$, где $n_i \geq 0$.*

B6. *Пусть $a, b \in L$. Постройте конечно-определенную полугруппу, такую, что количество вхождений a в ненулевое слово с длиной большей 1 не меньше квадрата вхождений b в то же слово.*

Функцией роста $G_S(n)$ полугруппы S называется функция аргумента n выражающая количество ненулевых различных слов длины не более n (При подсчете в качестве длины берется длина самого короткого из класса эквивалентных слов.) Может случиться так, что $G_S(n)$ - функция, эквивалентная многочлену или рациональной функции от n. В этом случае определена *размерность Гельфанда-Кириллова* полугруппы, равная показателю степени при старшем коэффициенте $G_S(n)$.

B7. *Постройте конечно-определенную полугруппу с нецелой размерностью Гельфанда-Кириллова.*

B8. *Постройте конечно-определенную полугруппу с размерностью Гельфанда-Кириллова, равной $2,5$.*

B9. *Пусть дано число $\alpha > 2.5$ такое, что существует алгоритм определения его десятичных знаков. (Конструктивное число. Например, π является таким числом). Докажите, что существует конечно-определенная полугруппа с размерностью Гельфанда-Кириллова, равной α.*