Теорема Гольдблатта–Томасона

26 июля 2012 г.

Аннотация

Теорема. Пусть $\mathbb{K}$ — элементарный класс шкал Крипке. Тогда $\mathbb{K}$ модально определим $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}$ замнут относительно взятия порожденных подшкал, p-морфных образов и несвязных сумм, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений.

Теорему можно усилить, потребовав вместо элементарности — замкнутость относительно ультра-степеней.

Доказательство использует факт существования некоторой ω-насыщенной ультрастепени всякой модели первого порядка сигнатуры произвольной мощности. Для счетных сигнатур доказатальство простое (Теорема 8.3 ниже). Однако для произвольных структур известное доказательство чрезвычайно сложное (занимает 9 страниц в книге) и оно устанавливает гораздо большее (κ-насыщенность, где κ — мощность сигнатуры). В то же время, для доказательства вышеозначенной теоремы требуется лишь существование для всякой модели Крипке (в сигнатуре произвольной мощности) некоторой (одновременно) модально насыщенной (Опр. 9.1) и модально компактной (Опр. 9.3) ультрастепени, поэтому есть подозрение на существование простого доказательства данного факта.

1 Синтаксис и семантика

Синтаксис. Модальные формулы: $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi\wedge\psi \mid \Box\varphi$, где $p \in \mathsf{Var}$. $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$.
Семантика Крипке.

Шкала: $F = (W, R)$, где $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W\times W$. Обозначение: $R(x) = \{\, y \mid xRy \,\}$, $R(X) = \{y \mid \exists x \in X\colon xRy\}$.

Модель: $M = (F, \theta) = (W, R, \theta)$, где F — шкала, а $\theta \subseteq W\times\mathsf{Var}$ — *оценка* переменных на шкале F, указывающая в каких мирах какие переменные *истинны*; вместо $w\,\theta\,p$ пишем: $w \models p$ или $M, w \models p$, если нужно подчеркнуть, о какой модели идет речь. Отношение $\models$ распространяется на все формулы по индукции: связки $\neg, \wedge$ трактуются как обычно, $w \models \Box\varphi \;\leftrightharpoons\; \forall x \in R(w)\colon x \models \varphi$. Обозначение: $\theta(\varphi) = \{\, w \mid w \models \varphi \,\}$.

Формула φ *общезначима* на шкале F: $F \Vdash \varphi \leftrightharpoons \forall\theta\colon (F,\theta) \models \varphi$. Отношения $M \models \varphi$ и $F, w \Vdash \varphi$ определяются стандартно. Все эти отношения распространяются также на множества формул и классы шкал и моделей.

Будем обозначать дополнение класса шкал $\mathbb{K}$ через $\overline{\mathbb{K}} = \{\, F \mid \; F \notin \mathbb{K} \,\}$.

Логика класса шкал $\mathbb{K}$ определяется как: $\mathsf{Logic}(\mathbb{K}) = \{\, \varphi \mid \; \mathbb{K} \Vdash \varphi \,\}$.

Класс шкал, задаваемый множеством формул Φ, определяется как: $\mathsf{Frames}(\Phi) = \{\, F \mid \; F \Vdash \Phi \,\}$.

Определение 1.1. Класс шкал $\mathbb{K}$ *модально определим*, если $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(\Phi)$ для некоторого (не обязательно конечного) множества модальных формул Φ.

Определение 1.2. Говорят, что модальная формула

- *выполнима* в модели, если она истинна в некоторой точке этой модели;
- *выполнима* в шкале, если она выполнима в некоторой модели, имеющей данную шкалу;
- *выполнима* в классе шкал, если она выполнима в некоторой шкале из данного класса.

Модель Крипке можно рассматривать как структуру первого порядка $(W, R, P_0, P_1, \ldots)$, где $P_i \subseteq W$. Модальную формулу φ можно перевести в формулу первого порядка $\varphi^*(x)$ от одной свободной переменной по индукции (где y — свежая переменная):

$$p_i^*(x) = P_i(x), \quad (\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*, \quad (\varphi\wedge\psi)^* = \varphi^*\wedge\psi^*, \quad (\Box\varphi)^*(x) = \forall y(xRy \to \varphi^*(y)).$$

Легко видеть, что $M, w \models \varphi \;\Leftrightarrow\; M \models \varphi^*(w)$.

2 Суммы, подшкалы и морфизмы

Определение 2.1. *Несвязная сумма* шкал $\{\, F_i = (W_i, R_i)\,\}_{i\in I}$ — это шкала $F = (W, R) = \biguplus_{i\in I} F_i$, где:

- $W = \{\, \langle i, w\rangle \mid w \in W_i,\ i \in I\,\}$,
- $\langle i, w\rangle\, R\, \langle j, x\rangle \quad \leftrightharpoons \quad (i = j$ и $wRx)$.

Пусть даны шкалы $F = (W, R)$ и $F' = (W', R')$.

Определение 2.2. Шкала F' называется *порожденной* (или *конической*) подшкалой шкалы F, пишем $F' \hookrightarrow F$, если выполнены условия:

- $W' \subseteq W$,
- $R' = R|_{W'}$, то есть $R' = R \cap (W'{\times}W')$,
- $R(W') \subseteq W'$.

Если $W' = R^*(w) = \{w\} \cup R(w) \cup R^2(w) \cup \ldots$, то $F' =: F_w$ называется *корневой* подшкалой с корнем w или подшкалой F, *порожденной* точкой w. *Корневая* шкала (модель) — это шкала (модель), порожденная точкой.

Определение 2.3. *Морфизм шкал* (или *p-морфизм*, *зигзаг-морфизм*) $f\colon F \twoheadrightarrow F'$ — это функция $f\colon W \to W'$, обладающая свойствами, для всех $x, y \in W$ и $y' \in W'$:

(sur) f сюръективно,
(zig) $xRy \Rightarrow f(x)R'f(y)$,
(zag) $f(x)R'y' \Rightarrow \exists y \in W\colon xRy$ и $f(y) = y'$.

Теорема 2.4. *Операции $\uplus$, $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$ сохраняют общезначимость модальных формул. Подробнее:*

- *Пусть $F = \biguplus_{i\in I} F_i$. Если $\forall i \in I$: $F_i \Vdash \varphi$, то $F \Vdash \varphi$.*
- *Пусть $F' \hookrightarrow F$. Если $F \Vdash \varphi$, то $F' \Vdash \varphi$.*
- *Пусть $F \twoheadrightarrow F'$. Если $F \Vdash \varphi$, то $F' \Vdash \varphi$.*

Лемма 2.5. *Всякая шкала есть p-морфный образ несвязной суммы своих корневых подикал: $\biguplus\limits_{a\in W} F_a \twoheadrightarrow F$.*

Доказательство. Пусть $F_a = (W_a, R_a)$, где $W_a = R^*(a)$ и $R_a = R|_{W_a}$. Тогда шкала $F' = (W', R') := \biguplus_{a\in W} F$ состоит из пар вида $\langle w, a\rangle$, где $w \in W_a$, а отношение R' задано как: $\langle w, a\rangle R' \langle v, b\rangle$, если $a = b$ и $w\, R_a\, v$.

Зададим отображение $f\colon W' \to W$ так: $f(\langle w, a\rangle) = w$. Ясно, что f — сюръекция: $f(\langle a, a\rangle) = a$, для $\forall a \in W$.
(zig): $\langle w, a\rangle R' \langle v, b\rangle \;\Rightarrow\; w\, R_a\, v \;\Rightarrow\; wRv \;\Leftrightarrow\; f(\langle w, a\rangle)\, R\, f(\langle v, b\rangle)$.
(zag): Пусть $\langle w, a\rangle Rv$, где $w \in W_a$. Значит, wRv, откуда $v \in W_a$. Тогда $\langle w, a\rangle R' \langle v, a\rangle$ и $f(\langle v, a\rangle) = v$. ☐

$M \leftrightsquigarrow N$ означает, что в M и N истинны одни и те же модальные формулы; аналогично $(M, w) \leftrightsquigarrow (N, v)$.

Лемма 2.6. *Пусть M и N — корневые модели, в корнях которых истинны одни и те же модальные формулы. Тогда в M и N истинны одни и те же формулы. Кратко: если $(M, w) \leftrightsquigarrow (N, v)$, то $M \leftrightsquigarrow N$.*

Доказательство. Пусть M — с корнем a, N — с корнем b. Тогда имеем:

$$M \models \varphi \iff \forall n \in \mathbb{N}\colon M, a \models \Box^n\varphi \iff \forall n \in \mathbb{N}\colon N, b \models \Box^n\varphi \iff N \models \varphi.$$ ☐

Лемма 2.7. $M \leftrightsquigarrow N \iff$ *в M и N выполнимы одни и те же модальные формулы.*

Доказательство. φ истинна в $M \iff \neg\varphi$ не выполнима в M. ☐

3 Ультрафильтры

Определение 3.1. Пусть I — непустое множество. Семейство его подмножеств $\alpha \subseteq 2^I$ называется *фильтром* над I, если оно непусто, замкнуто относительно надмножеств и пересечений; то есть для любых $X, Y \subseteq I$:

(0) $I \in \alpha$;
(1) $X \in \alpha,\ X \subseteq Y \ \Rightarrow\ Y \in \alpha$;
(2) $X, Y \in \alpha \ \Rightarrow\ (X \cap Y) \in \alpha$.

Фильтр α называется *ультрафильтром* над I, если кроме того выполнено следующее условие, для любых $X \subseteq I$:

(3) $\overline{X} \in \alpha \ \Leftrightarrow X \notin \alpha.$ (где $\overline{X} = I \setminus X$).

Факт 3.2. *Фильтр α над I — ультрафильтр $\Leftrightarrow$ α — максимальный по включению фильтр над I.*

Вопрос: как можно построить фильтр или ультрафильтр? В этом поможет следующее понятие.

Определение 3.3. Семейство множеств $Z \subseteq 2^I$ называется *центрированным*, если пересечение любого конечного числа множеств из Z непусто:

$$\forall n \geqslant 1\ \forall X_1, \ldots, X_n \in Z \qquad X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq \varnothing.$$

Теорема 3.4 (Об ультрафильтрах)**.**

(1) *Всякое центрированное семейство Z содержится в некотором фильтре α.*
(2) *Всякий фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство. **(1)** Приведем явную конструкцию: в качестве α возьмем надмножества всевозможных пересечений конечного числа множеств из Z (свойства фильтра проверяются тривиально):

$$\alpha \ := \ \big\{\, Y \subseteq I \ \mid \ \exists n \geqslant 1\ \exists X_1, \ldots, X_n \in Z\colon\ (X_1 \cap \ldots \cap X_n) \subseteq Y \,\big\}.$$

(2) Здесь существование ультрафильтра доказывается неявно, используя лемму Цорна.

Лемма Цорна. *Пусть $(A, \preccurlyeq)$ — частично упорядоченное*[1] *множество, в котором всякая цепь*[2] *имеет верхнюю грань.*[3] *Тогда в A существует максимальный*[4] *элемент.*

Пусть α — фильтр над I. Рассмотрим все фильтры, содержащие его:

$$A = \{\beta \mid \ \beta \text{ — фильтр над } I \text{ и } \alpha \subseteq \beta\}.$$

Оно частично упорядочено отношением $\subseteq$. Более того, всякая цепь $B \subset A$ имеет верхнюю грань — объединение всех фильтров из B снова будет фильтром. По лемме Цорна в A имеется максимальный (по включению) фильтр, который, следовательно, является ультрафильтром, содержащим α. $\square$

[1]То есть отношение $\preccurlyeq$ на A является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным.
[2]То есть линейно упорядоченное подмножество
[3]То есть элемент из A, не обязательно принадлежащий данной цепи, который превосходит все элементы цепи.
[4]То есть такой $w \in A$, что не существует элемента $a \in A$, строго превосходящего его: $w \preccurlyeq a$ и $w \neq a$.

4 Ультра-расширения

Для $Y \subseteq W$ обозначим

$$\begin{array}{lcl} \Diamond Y & := & \{\, x \mid \ \exists y\colon\ xRy \ \&\ y \in Y \,\} = R^{-1}(Y) \\ \Box Y & := & \{\, x \mid \ \forall y\colon\ xRy \ \to y \in Y \,\} = \{x \mid R(x) \subseteq Y\} \end{array}$$

Факт 4.1. $\theta(\Diamond\varphi) = \Diamond\theta(\varphi)$, $\theta(\Box\varphi) = \Box\theta(\varphi)$; $\Diamond\overline{X} = \overline{\Box X}$; $\Box(X \cap Y) = \Box X \cap \Box Y$; $X \subseteq Y \Rightarrow \Box X \subseteq \Box Y$.

Определение 4.2. *Ультра-расширение* модели $M = (W, R, \theta)$ — это модель $M^{\mathfrak{ue}} = (W^{\mathfrak{ue}}, R^{\mathfrak{ue}}, \theta^{\mathfrak{ue}})$, где:

- $W^{\mathfrak{ue}}$ — множество всех ультрафильтров над W;
- $\alpha\, R^{\mathfrak{ue}}\beta$, если выполнено любое из следующих двух эквивалентных условий:
  - $\Box X \in \alpha \Rightarrow X \in \beta$, для всякого $X \subseteq W$,
  - $X \in \beta \Rightarrow \Diamond X \in \alpha$, для всякого $X \subseteq W$;
- $\alpha \models p \ \leftrightharpoons\ \theta(p) \in \alpha$.

Лемма 4.3. $\alpha \models \varphi \iff \theta(\varphi) \in \alpha$, *для любой модальной формулы* φ.

Доказательство. Индукция по построению формулы φ. База индукции (для p) верна по определению $\theta^{\mathfrak{ue}}$.

Для $\neg$ имеем: $\alpha \models \neg\varphi \Leftrightarrow \alpha \not\models \varphi \Leftrightarrow \theta(\varphi) \notin \alpha \Leftrightarrow \overline{\theta(\varphi)} \in \alpha \Leftrightarrow \theta(\neg\varphi) \in \alpha$.

Для $\wedge$ утверждение следует из свойства фильтров: $(X \cap Y) \in \alpha \Leftrightarrow (X \in \alpha$ и $Y \in \alpha)$.

Для $\Diamond$ доказываем обе импликации:

$(\Rightarrow)$ $\alpha \models \Diamond\varphi \Rightarrow \exists\beta\colon \alpha\, R^{\mathfrak{ue}}\beta$ и $\beta \models \varphi$, то есть $\theta(\varphi) \in \beta$. По определению $R^{\mathfrak{ue}}$ имеем $\Diamond\theta(\varphi) \in \alpha$, то есть $\theta(\Diamond\varphi) \in \alpha$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\theta(\Diamond\varphi) \in \alpha$, то есть $\Diamond\theta(\varphi) \in \alpha$. Чтобы доказать $\alpha \models \Diamond\varphi$, нужно построить такой ультрафильтр β, что $\alpha\, R^{\mathfrak{ue}}\beta$ и $\beta \models \varphi$, то есть $\theta(\varphi) \in \beta$. Рассмотрим семейство множеств: $S = \{\theta(\varphi)\} \cup \sharp\alpha$, где $\sharp\alpha = \{\, X \mid \Box X \in \alpha \,\}$. Докажем, что пересечение любого конечного числа множеств из S непусто; этого достаточно, ибо тогда по Теореме об ультрафильтрах S содержится в некотором ультрафильтре β, который очевидно удовлетворяет свойствам $\alpha\, R^{\mathfrak{ue}}\beta$ и $\theta(\varphi) \in \beta$. Заметим, что $\sharp\alpha$ замкнуто относительно конечных пересечений. Поэтому достаточно доказать, что для любого $X \in \sharp\alpha$ верно $X \cap \theta(\varphi) \neq \varnothing$. Допустим противное. Тогда $X \subseteq \overline{\theta(\varphi)}$, откуда $\Box X \subseteq \Box\overline{\theta(\varphi)}$, и значит $\Box X \cap \Diamond\theta(\varphi) = \varnothing$, чего не может быть, поскольку $\Box X$ и $\Diamond\theta(\varphi)$ принадлежат ультрафильтру α. $\Box$

Главный ультрафильтр точки w будем обозначать $\pi_w = \{\, X \subseteq W \mid w \in X \,\}$.

Лемма 4.4. *Для всякой модели* M*, шкалы* F*, точки* w*, формулы* φ *имеем:*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & M^{\mathfrak{ue}}, \pi_w \models \varphi & \iff & M, w \models \varphi \\ (2) & F^{\mathfrak{ue}}, \pi_w \Vdash \varphi & \Longrightarrow & F, w \Vdash \varphi \\ (3) & M^{\mathfrak{ue}} \models \varphi & \Longrightarrow & M \models \varphi \\ (4) & F^{\mathfrak{ue}} \Vdash \varphi & \Longrightarrow & F \Vdash \varphi \end{array}$$

Доказательство. Пункт (1) следует из леммы 4.3. Пункты (2–4) следуют из пункта (1). $\Box$

Следствие 4.5. *Операция взятия ультра-расширения анти-сохраняет общезначимость модальных формул.*

5 Ультра-произведения

Пусть I — непустое множество. Будем называть *I-последовательностью* элементов из S всякую функцию $I \to S$; ее записываем как $a = (a_i)_{i \in I}$, где вместо $a(i)$ мы пишем a_i. *Произведение* множеств W_i по $i \in I$ — это множество всех I-последовательностей, в которых на i-ом месте стоит элемент из W_i:

$$\prod_{i\in I} W_i \;:=\; \{\, a = (a_i)_{i\in I} \;\mid\; a(i) \in W_i \,\}.$$

Пусть дан ультрафильтр U над I. Введем на $\prod_{i\in I} W_i$ отношение эквивалентности:

$$a \overset{U}{\sim} b \;\leftrightharpoons\; \{\, i \mid a_i = b_i \,\} \in U.$$

Класс эквивалентности элемента a будем обозначать $[a]_U$ или просто $[a]$.

Пусть $(M_i)_{i\in I}$ — модели первого порядка некоторой сигнатуры Σ, состоящей из предикатных[5] символов.

Определение 5.1. *Ультра-произведение* моделей $(M_i)_{i\in I}$ по ультрафильтру U — это модель $M = \prod^U_{i\in I} M_i$, определяемая следующим образом:

- ее носитель: $W = \{\, [a] \mid a \in \prod_{i\in I} W_i \,\} = \prod_{i\in I} W_i / \overset{U}{\sim}$ — множество всех классов эквивалентности;
- интерпретация каждого n-местного предикатного символа $P(x, y, \ldots, z)$ в M определяется как:

$$M \models P([a], [b], \ldots, [c]) \quad \leftrightharpoons \quad \{\, i \mid M_i \models P(a_i, b_i, \ldots, c_i) \,\} \in U.$$

Корректность: проверим, что истинность $P([a], \ldots)$ в M не зависит от выбора представителей a и т.д. в их классах эквивалентности. Для простоты обозначений пусть P — одноместный. Допустим $[a] = [a']$. Тогда:

$$\{\, i \mid M_i \models P(a_i) \,\} \cap \{\, i \mid a_i = a'_i \,\} \quad \subseteq \quad \{\, i \mid M_i \models P(a'_i) \,\}.$$

Значит, из $\{\, i \mid M_i \models P(a_i) \,\} \in U$ следует $\{\, i \mid M_i \models P(a'_i) \,\} \in U$. Обратная импликация доказывается аналогично.

Замечание 5.2. Интуитивно конструкцию ультра-произведения можно понимать следующим образом. Подмножества множества I, принадлежащие ультрафильтру U, можно называть *большими*, или содержащими *почти все* элементы из I. Тогда $w \overset{U}{\sim} v$ читается как: последовательности w и v совпадают почти всюду. Отношение $P([a], [b], \ldots, [c])$ имеет место, если $P(a_i, b_i, \ldots, c_i)$ верно почти во всех моделях M_i.

Теорема 5.3 (Лось). *Для любой формулы $A(x, y, \ldots, z)$ и для любых элементов $[a], [b], \ldots, [c] \in W$ имеем:*

$$M \models A([a], [b], \ldots, [c]) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\, i \mid M_i \models A(a_i, b_i, \ldots, c_i) \,\} \in U.$$

В частности, для любой замкнутой формулы A имеем: $M \models A \iff \{\, i \mid M_i \models A \,\} \in U$.

Доказательство. Для атомарных формул P это верно по построению M. Для булевых связок доказывается легко, пользуясь свойствами ультрафильтров: $\overline{X} \in U \Leftrightarrow X \notin U$, и $(X \cap Y) \in U \Leftrightarrow X, Y \in U$. Остался случай $\exists$. Рассмотрим формулу $\exists x\, A(x)$, где в $A(x)$ могут быть и другие параметры (вместо которых уже подставлены элементы соответствующих моделей), будем их опускать.

$$\begin{aligned} M \models \exists x\, A(x) \quad &\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \quad \exists [a] \in W\colon\; M \models A([a]) \\ &\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \quad \exists [a] \in W\colon\; \{\, i \mid M_i \models A(a_i) \,\} \in U \\ &\overset{\mathbf{(3)}}{\Longleftrightarrow} \quad \{\, i \mid \exists b_i \in W_i\colon\; M_i \models A(b_i) \,\} \in U \\ &\overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \quad \{\, i \mid M_i \models \exists x\, A(x) \,\} \in U \end{aligned}$$

Здесь (1) и (4) по определению семантики квантора $\exists$, (2) по предположению индукции. Осталось проверить (3). Обозначим $X_a := \{\, i \mid M_i \models A(a_i) \,\}$ и $X := \{\, i \mid \exists b_i \in W_i\colon\; M_i \models A(b_i) \,\}$.

($\Rightarrow$) Очевидно, $X_a \subseteq X$ (достаточно положить $b_i := a_i$ для всех $i \in X_a$). Поэтому из $X_a \in U$ следует $X \in U$.

($\Leftarrow$) Построим $a = (a_i)_{i\in I}$, где $a_i \in W_i$. Для каждого $i \in X$ положим $a_i := b_i$, а для каждого $i \notin X$ пусть a_i будет произвольным элементом из W_i. Тогда очевидно, что $X \subseteq X_a$. Поэтому из $X \in U$ следует $X_a \in U$. $\square$

Замечание 5.4. *Ультра-произведение* моделей Крипке $M_i = (W_i, R_i, \theta_i)$, $i \in I$, по ультрафильтру U — это модель Крипке $M = \prod^U_{i\in I} M_i = (W, R, \theta)$, где W и R определяются как выше, $[w] \models p \leftrightharpoons \{\, i \mid M_i, w_i \models p \,\} \in U$.

Теорема Лося для моделей Крипке M_i и модальных формул φ утверждает:

(1) $M, [w] \models \varphi \iff \{\, i \mid M_i, w_i \models \varphi \,\} \in U$,

(2) $M \models \varphi \iff \{\, i \mid M_i \models \varphi \,\} \in U$.

[5] Можно описать конструкцию и для функциональных символов, констант и равенства, но нам это не пригодится, так как модели Крипке являются моделями первого порядка с одним двуместным и счетным числом одноместных предикатных символов.

Определение 5.5. Если все модели M_i равны одной и той же модели M, то их ультра-произведение $\prod_{i \in I}^{U} M_i$ называется *ультра-степенью* модели M по ультрафильтру U и обозначается M^U.

Непосредственно из Теоремы Лося вытекает

Следствие 5.6. *$M \models A \iff M^U \models A$, для любой замкнутой формулы A.*
В частности, если M — модель Крипке, то $M \leftrightsquigarrow M^U$.

6 Счетно-неполные ультрафильтры

В логике находят применение ультрафильтры следующего вида.

Определение 6.1. Ультрафильтр U над I называется *счетно-неполным*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(а) он не замкнут относительно счетных пересечений: $\exists X_0, X_1, \ldots \in U$, такие что $\bigcap_n X_n \notin U$;
(б) в U есть убывающая цепь с пустым пересечением: $\exists Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \ldots$, такие что $Y_n \in U$ и $\bigcap_n Y_n = \varnothing$;
(в) в U есть счётное семейство множеств, пересечение которых пусто: $\exists Z \subset U$: $\bigcap Z = \varnothing$;
(г) в U есть счётное семейство множеств, такое что каждый элемент из I принадлежит лишь конечному числу этих множеств.

Лемма 6.2. *Пункты* (а), (б), (в), (г) *эквивалентны.*

Доказательство. Очевидны импликации: из (б) следуют остальные три пункта; (г)⇒(в).

(в)⇒(б): Если $Z = \{X_0, X_1, \ldots\}$, где $X_n \in U$ и $\bigcap_n X_n = \varnothing$, то положим $Y_n := X_0 \cap \ldots \cap X_n$. Тогда $Y_n \in U$, $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \ldots$ и $\bigcap_n Y_n = \bigcap_n X_n = \varnothing$.

(а)⇒(в): Обозначим $X := \bigcap_n X_n$. Нам дано: $X \notin U$, значит $\overline{X} \in U$. Теперь взяв $Z = \{X_0', X_1', \ldots\}$, где $X_n' := X_n \cap \overline{X}$, мы получим $X_n' \in U$ и $\bigcap_n X_n' = X \cap \overline{X} = \varnothing$. □

Пример 6.3. Главный ультрафильтр, очевидно, не бывает счетно-неполным. Над счетным множеством I любой неглавный ультрафильтр U будет счетно-неполным: возьмем $X_i := I \setminus \{i\}$. Тогда все $X_i \in U$, а их пересечение пусто. Над любым несчетным множеством I тоже есть счетно-неполные ультрафильтры, как показано ниже.

Следующая конструкция ультрафильтра будет использована в теореме 6.5 и теореме компактности 7.3.

Конструкция 6.4. Пусть A — бесконечное множество. Рассмотрим совокупность всех его конечных подмножеств: $I = \{\, i \subseteq A \mid i \text{ конечное} \,\}$. Для каждого элемента $a \in A$ рассмотрим только те конечные множества, которым этот элемент принадлежит: $X_a = \{\, i \in I \mid a \in i \,\}$. Из них составим семейство $Z := \{\, X_a \mid a \in A \,\}$.

Пересечение любого конечного числа множеств из семейства Z непусто: $(X_{a_1} \cap \ldots \cap X_{a_n}) \ni \{\, a_1, \ldots, a_n \,\}$. Значит, Z содержится в некотором ультрафильтре U над I.

Теорема 6.5. *Над любым бесконечным множеством имеется счетно-неполный ультрафильтр.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Проведем конструкцию 6.4. Множества A и I равномощны (упражнение). Поэтому нам достаточно построить счетно-неполный ультрафильтр над I. Покажем, что построенный выше ультрафильтр U таковым и является.

Возьмем какое-нибудь счетное (бесконечное) подмножество $Z' \subseteq Z$. Согласно пункту (в) определения, нам достаточно доказать, что $\bigcap Z' = \varnothing$. Имеем: всякий $i \in I$ принадлежит лишь тем множествам X_a из Z', для которых $a \in i$, то есть конечному их числу (ибо i конечно). Но Z' бесконечно, значит, i не принадлежит какому-то множеству из Z'; тем самым $i \notin \bigcap Z'$. Поскольку это верно для любого $i \in I$, то $\bigcap Z' = \varnothing$. □

7 Компактность

Определение 7.1. Множество модальных формул Φ называется

- *выполнимым* в классе шкал $\mathbb{K}$, если оно истинно в некоторой точке некоторой модели со шкалой из $\mathbb{K}$;
- *конечно-выполнимым* в классе шкал $\mathbb{K}$, если всякое конечное подмножество $\Phi' \subseteq \Phi$ выполнимо в $\mathbb{K}$.

Определение 7.2. Класс шкал $\mathbb{K}$ называется (*модально*) *компактным*, если для всякого множества модальных формул (в сигнатуре Var любой мощности) из его конечной выполнимости в $\mathbb{K}$ следует его выполнимость в $\mathbb{K}$.

Теорема 7.3. *Если класс шкал $\mathbb{K}$ замкнут относительно ультра-произведений, то он компактен.*

Доказательство. Пусть Φ — бесконечное множество модальных формул. Рассмотрим все его конечные подмножества: $I := \{\, i \subseteq \Phi \mid i \text{ конечное} \,\}$. Предположим, что Φ конечно-выполнимо в классе $\mathbb{K}$, то есть $\forall i \in I\ \exists F_i \in \mathbb{K}$, $\exists \theta_i$, $\exists w_i$ такие, что $M_i, w_i \models i$, где мы обозначили $M_i := (F_i, \theta_i)$. Надо доказать, что Φ выполнимо в $\mathbb{K}$.

Построим ультрафильтр U над I согласно конструкции 6.4. Положим $M := \prod_{i\in I}^{U} M_i = (F, \theta)$. Тогда $F \in \mathbb{K}$ ввиду замкнутости $\mathbb{K}$ относительно ультра-произведений. Возьмем $[w] \in M$ такой, что $w(i) = w_i$ для всех $i \in I$.

Утверждается, что $M, [w] \models \Phi$, то есть $M, [w] \models \varphi$ для каждой формулы $\varphi \in \Phi$. Действительно, множество $\{\, i \mid M_i, w_i \models \varphi \,\}$ принадлежит U, поскольку оно содержит $\{\, i \mid \varphi \in i \,\} = X_\varphi \in Z \subset U$. ☐

Лемма 7.4. *Верны следующие импликации между свойствами замкнутости классов шкал относительно указанных операций (на стрелках указаны дополнительные операции, относительно которых должен быть замкнут класс, чтобы была верна импликация):*

$$\begin{tikzcd}
\text{элементарность} \arrow[r] & \text{ультра-произведения} \arrow[r] \arrow[d, bend left] & \text{компактность} \\
& \text{ультра-степени} \arrow[u, bend left, "{\uplus, \twoheadrightarrow, \hookrightarrow}"] \arrow[ur, "\uplus"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Импликация (УП) $\Rightarrow$ (УС) тривиальна, а (УП) $\Rightarrow$ (К) доказана в теореме компактности 7.3.

(Э) $\Rightarrow$ (УП). Пусть класс $\mathbb{K}$ аксиоматизирован некоторым множеством замкнутых формул первого порядка Γ. Пусть $\{F_i\}_{i\in I}$ — шкалы из $\mathbb{K}$, U — ультрафильтр над I. Обозначим $F = \prod_{i\in I}^{U} F_i$. Тогда для любой формулы $A \in \Gamma$ имеем: $\{\, i \mid F_i \models A \,\} = I \in U$. По теореме Лося $F \models A$. Таким образом, $F \models \Gamma$ и значит $F \in \mathbb{K}$.

(УС)$\wedge$($\uplus$) $\Rightarrow$ (К). Слегка модифицируем доказательство теоремы компактности 7.3: положим $M := (\biguplus_{i\in I} M_i)^U$, а также элемент этой модели $[w]$, где $w(i) := \langle i, w_i \rangle$. В конце будем иметь: $\{\, i \mid \langle i, w_i \rangle \models \varphi \,\} = \{\, i \mid w_i \models \varphi \,\}$.

(УС) $\wedge$ ($\uplus, \twoheadrightarrow, \hookrightarrow$) $\Rightarrow$ (УП). Следует из того, что ультра-произведение шкал $F = (W, R) := \prod_{i\in I}^{U} F_i$ изоморфно некоторой порожденной подшкале F' в ультра-степени несвязной суммы тех же шкал по тому же ультрафильтру: $G = (V, S) := \big(\biguplus_{i\in I} F_i\big)^U$.

Формально, множество W состоит из классов $[w]$ таких I-последовательностей $w = (w_i)_{i\in I}$, в которых $w_i \in W_i$. Множество V состоит из классов $[v]$ таких I-последовательностей $v = (v_i)_{i\in I}$, в которых каждый v_i имеет вид $\langle j, u \rangle$, где $j \in I$ и $u \in W_j$, причем j никак не связано с i. Выделим в V подмножество W', состоящее из классов $[v]$ таких I-последовательностей $v = (v_i)_{i\in I}$, в которых каждый v_i имеет вид $\langle i, u \rangle$, где $u \in W_i$, то есть $v_i \in \{i\} \times W_i$. Пусть $F' := (W', R')$ — ограничение шкалы G на множество W', то есть $R' = S|_{W'}$. Тогда утверждается следующее:

- F' — порожденная подшкала в G, то есть $F' \hookrightarrow G$;
- шкалы F и F' изоморфны: $F \cong F'$.

Первый пункт легко проверяется. Во втором изоморфизмом будет функция f, которая классу $[w]$ сопоставляет класс $[v]$, где $v_i = \langle i, w_i \rangle$ для всех $i \in I$.

Если теперь все $F_i \in \mathbb{K}$, то $G \in \mathbb{K}$ по замкнутости $\mathbb{K}$ относительно ($\uplus$) и (УС), далее $F' \in \mathbb{K}$ по замкнутости $\mathbb{K}$ относительно ($\hookrightarrow$). Наконец, ввиду наличия изоморфизма (а значит, р-морфизма) из F' и F, заключаем, что $F \in \mathbb{K}$ по замкнутости $\mathbb{K}$ относительно ($\twoheadrightarrow$). ☐

8 Насыщенные структуры первого порядка

Как мы видели выше, модель первого порядка и ее ультра-степень неразличимы никакой замкнутой формулой. Чем же тогда они могут различаться с точки зрения языка первого порядка? Насыщенностью, то есть истинностью каких-то множеств формул со свободными переменными на каких-то элементах этих моделей.

Пусть M — модель первого порядка сигнатуры Σ. Ниже $\overline{y}$ — *не более чем счетный* (это важно) список переменных. Всякое множество формул $\Gamma(x, \overline{y})$, в которое вместо $\overline{y}$ подставлены элементы $\overline{c}$ из M, будем называть *типом*[6] и обозначать $\Gamma(x, \overline{c})$. Тип $\Gamma(x, \overline{c})$ назовем *выполнимым* в M, если он истинен на каком-то элементе a из M, то есть $M \models \Gamma(a, \overline{c})$; *конечно-выполнимым* в M, если всякое его конечное подмножество выполнимо в M.

Определение 8.1. Модель M называется *ω-насыщенной*, если для любого типа $\Gamma(x, \overline{c})$ (с любым *не более чем счетным* списком переменных $\overline{y}$) из его конечной выполнимости в M следует его выполнимость в M.

Это некоторая разновидность компактности, но примененная к одной модели и множеству незамкнутых формул. Нам (см. 9.4 и 9.2) будет интересен лишь случай, когда $\overline{y}$ состоит из одной переменной (так называемая *2-насыщенность*); но доказательства проведем для ω-насыщенности, так как это ничего не будет нам стоить.

Теорема 8.2 (О насыщении)**.** *Всякая модель первого порядка (в сигнатуре Σ любой мощности) имеет ультрастепень, являющуюся ω-насыщенной моделью.*

Для счетной сигнатуры Σ эта теорема следует из доказанной выше теоремы 6.5 о существовании счетно-неполного ультрафильтра над множеством любой мощности и доказываемой ниже теоремы 8.3.

Теорема 8.3. *Ультра-произведение любых моделей в* **счетной** *сигнатуре Σ по счетно-неполному ультрафильтру — ω-насыщенно.*

Доказательство. Рассмотрим счетно-неполный ультрафильтр U над I и модели $(M_i)_{i \in I}$ сигнатуры Σ. Обозначим их ультрапроизведение $M := \prod_{i \in I}^{U} M_i$. Через W_i и W обозначим носители M_i и M.

Возьмем любое множество $\Gamma(x, y)$ формул[7] сигнатуры Σ и любой элемент $[b] \in W$. Предположим, что тип $\Gamma(x, [b])$ конечно-выполним в M. Докажем, что он выполним в M, то есть $\exists [a] \in W$ такой, что $M \models \Gamma([a], [b])$.

Множество Γ — счетно: $\Gamma = \{ A_1, A_2, \dots \}$. Обозначим $B_0 := \top$, $B_n := A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ для $n \geqslant 1$.

$B_n(x, [b])$ есть конечный подтип $\Gamma(x, [b])$, значит, он выполним в M, то есть $M \models \exists x\, B_n(x, [b])$. По теореме Лося множество $X_n := \{ i \mid M_i \models \exists x\, B_n(x, b_i) \}$ принадлежит U, для каждого $n \geqslant 0$. Заметим: $X_0 = I$.

Так как U счетно-неполный, то существуют множества $I = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \ldots$ из U, такие что $\bigcap_n Y_n = \varnothing$.

Положим $Z_n := X_n \cap Y_n$. Очевидно: $Z_n \in U$, а также $I = Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \ldots$ и $\bigcap_n Z_n = \varnothing$. Значит, для каждого $i \in I$ имеется наибольший n_i с условием $i \in Z_{n_i}$.

Мы готовы строить искомый $a = (a_i)_{i \in I}$, где $a_i \in W_i$. Для каждого $i \in I$ имеем $i \in Z_{n_i}$, отсюда $i \in X_{n_i}$ и тем самым $M_i \models \exists x\, B_{n_i}(x, b_i)$. Значит, $\exists a_i \in W_i$ такой, что $M_i \models B_{n_i}(a_i, b_i)$ ($\bigstar$) (для любого $i \in I$).

Докажем, что a — искомый: $M \models \Gamma([a], [b])$, то есть $M \models A_n([a], [b])$ для каждого $n \geqslant 1$. По теореме Лося, для этого нужно доказать, что $Z'_n := \{ i \mid M_i \models A_n(a_i, b_i) \} \in U$. Для этого докажем $Z_n \subseteq Z'_n$ (и учтем, что $Z_n \in U$).

Для всякого i, если $i \in Z_n$, то $n \leqslant n_i$ (ибо n_i — наибольший). По ($\bigstar$), имеем $M_i \models B_{n_i}(a_i, b_i)$. Но A_n есть один из конъюнктов в B_{n_i}, в силу $n \leqslant n_i$, значит $M_i \models A_n(a_i, b_i)$, то есть $i \in Z'_n$, что и требовалось. $\square$

Для несчётной сигнатуры аналог данной теоремы нужно доказывать отдельно. В книге [Кейслер, Чэн, «Теория моделей», 1977] дается доказательство на 9 страницах, обобщающее приведенную выше теорему сразу в двух направлениях: на сигнатуры произвольной мощности κ и на понятие κ-насыщенности (где κ — бесконечный кардинал, ограничивающий количество переменных в списке $\overline{y}$). Из них на 7 страницах доказывается существование некоторых особых ультрафильтров (счетно-неполных κ-хороших). Поскольку нам требуется лишь ω-насыщенность (и даже 2-насыщенность), есть надежда получить обозримое доказательство. Особенно обнадеживает фраза из упомянутой книги: «Из мощностных соображений ясно, что условия счетной неполноты ультрафильтра недостаточно для обеспечения ω_2-насыщенности ультрапроизведения моделей по этому ультрафильтру».

Но не сказано, что для ω-насыщенности (в случае несчётных сигнатур) будет недостаточно счётной неполноты ультрафильтра.

Более того, нам нужна даже не сама 2-насыщенность, а следующие из нее *модальную насыщенность* и *модальную компактность* некоторой ультрастепени произвольной модели Крипке (см. следующий раздел); это еще один довод в пользу получения простого доказательства.

---

[6] Формально, тип — это пара $\langle \Gamma, \overline{c} \rangle$, состоящая из множества формул $\Gamma(x, \overline{y})$ и последовательности $\overline{c}$ элементов модели M той же длины, что и список переменных $\overline{y}$.

[7] Для доказательства ω-насыщенности нужно вместо (x, y) всюду писать $(x, \overline{y})$, где $\overline{y}$ — счетный список переменных. Достаточно в приведенном доказательстве всюду заменить y на $\overline{y}$. Лишь появятся двойные индексы, но рассуждение будет прежним. Кроме того, в приложении к модальной логике нам потребуется лишь случай одной переменной y.

9 Модально насыщенные модели Крипке

Мы говорим, что множество модальных формул *выполнимо на множестве* $X \subseteq W$ в модели Крипке M, если оно истинно в некоторой точке из X. Финитная выполнимость на X определяется аналогично.

Определение 9.1. Модель Крипке $M = (W, R, \theta)$ называется *модально насыщенной*, если для любого множества модальных формул Φ и любого мира $w \in W$ из конечной выполнимости Φ на множестве $R(w)$ в M следует выполнимость Φ на множестве $R(w)$ в M.

К модели Крипке, как к структуре первого порядка, применимо также и понятие ω-насыщенности. Следующая теорема раскрывает связь этих двух видов насыщенности.

Лемма 9.2. *Всякая ω-насыщенная модель Крипке является модально насыщенной.*

Доказательство. Фиксируем модель Крипке M, ее мир w, и множество модальных формул Φ. Рассмотрим множество формул первого порядка:

$$\Gamma(x, y) \ := \ \{\, yRx \,\} \cup \{\, \varphi^*(x) \mid \varphi \in \Phi \,\},$$

где $\varphi^*(x)$ — стандартный перевод модальной формулы φ в логику первого порядка. Легко видеть, что

$$\text{множество } \Phi \text{ (конечно) выполнимо на } R(w) \text{ в } M \iff \text{тип } \Gamma(x, w) \text{ (конечно) выполним в } M.$$

Тогда из конечной выполнимости Φ на $R(w)$ в M следует конечная выполнимость $\Gamma(x, w)$ в M, откуда ввиду ω-насыщенности (здесь достаточно 2-насыщенности) модели M вытекает выполнимость $\Gamma(x, w)$ в M и, наконец, выполнимость Φ на $R(w)$ в M. Таким образом, модель M модально насыщена. $\square$

Определение 9.3. Модель Крипке M назовем (*модально*) *компактной*, если любое множество модальных формул, конечно-выполнимое в M, выполнимо в M.

Лемма 9.4. *Всякая ω-насыщенная модель Крипке является компактной.*

Доказательство. Применить ω-насыщенность к типу $\Gamma(x) := \{\, \varphi^*(x) \mid \varphi \in \Phi \,\}$ (без параметров $\overline{y}$). $\square$

В теореме Гольдблатта–Томасона используется лишь существование модальная насыщенной и модальная компактной ультра-степени произвольной модели Крипке.

10 Вспомогательные леммы

Условие $F \Vdash \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$ означает, что всякая формула, общезначимая на $\mathbb{K}$, общезначима и на F; введем для этого отношения специальное обозначение: $\mathbb{K} \models F$. Оно равносильно тому, что всякая формула, выполнимая на F, выполнима и в $\mathbb{K}$. Следующая лемма показывает, что последнее верно и для произвольного множества формул, если класс шкал $\mathbb{K}$ компактен.

Лемма 10.1. *Пусть класс шкал $\mathbb{K}$ компактен. Если $\mathbb{K} \models F$, то всякое множество модальных формул, выполнимое на шкале F, выполнимо и в $\mathbb{K}$.*

Доказательство. Пусть Φ выполнимо на F. Тогда для любого конечного $\Gamma \subseteq \Phi$ формула $\bigwedge \Gamma$ выполнима на F, а значит, и в $\mathbb{K}$, то есть множество Γ выполнимо в $\mathbb{K}$. Итак, Φ конечно-выполнимо в $\mathbb{K}$. По компактности $\mathbb{K}$, Φ выполнимо в $\mathbb{K}$. $\square$

Лемма 10.2. *Для всякого класса шкал $\mathbb{K}$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *класс $\mathbb{K}$ модально определим;*
(б) $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(\mathsf{Logic}(\mathbb{K}))$*;*
(в) $\mathbb{K} \supseteq \mathsf{Frames}(\mathsf{Logic}(\mathbb{K}))$*;*
(г) $\mathbb{K} \models F \Rightarrow F \in \mathbb{K}$*, для любой шкалы F (то есть $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\models$);*

Если кроме того класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\uplus$ и $\twoheadrightarrow$, то можно добавить еще одно условие:

(д) $\mathbb{K} \models F \Rightarrow F \in \mathbb{K}$*, для любой корневой шкалы F.*

Доказательство. Эквивалентность (б) $\Leftrightarrow$ (в) верна, поскольку для любого класса шкал $\mathbb{K}$ имеет место включение $\mathbb{K} \subseteq \mathsf{Frames}(\mathsf{Logic}(\mathbb{K}))$. Эквивалентность (в) $\Leftrightarrow$ (г) очевидна по определению $\mathbb{K} \models F$. Импликации (б) $\Rightarrow$ (а) и (г) $\Rightarrow$ (д) тривиальны. Остается доказать две импликации.

(а) $\Rightarrow$ (в) Если $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(\Phi)$, то $\mathbb{K} \Vdash \Phi$, и значит $\Phi \subseteq \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$, откуда по антимонотонности $\mathsf{Frames}()$ получаем $\mathsf{Frames}(\mathsf{Logic}(\mathbb{K})) \subseteq \mathsf{Frames}(\Phi) = \mathbb{K}$.

(д) $\Rightarrow$ (г) Это вытекает из следующей цепи импликаций, использующей $\biguplus_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F$ (по лемме 2.5):

$$\mathbb{K} \models F \quad\Longrightarrow\quad \forall a \in W\colon\ \mathbb{K} \models F_a \quad\Longrightarrow\quad \forall a \in W\colon\ F_a \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad \textstyle\biguplus_{a \in W} F_a \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad F \in \mathbb{K},$$

где первая очевидна, вторая верна по (д), а последние две — по замкнутости $\mathbb{K}$ относительно $\uplus$ и $\twoheadrightarrow$. $\square$

11 Доказательство теоремы

Теорема 11.1 (Гольдблатт, Томасон, 1974).
Пусть $\mathbb{K}$ — класс шкал, замкнутый относительно ультра-степеней. Тогда:
$\mathbb{K}$ модально определим $\iff$ выполнены условия:

- *$\mathbb{K}$ замкнут относительно*
  - *$\uplus$ (несвязных сумм),*
  - *$\hookrightarrow$ (порожденных подшкал),*
  - *$\twoheadrightarrow$ (p-морфизмов),*
- *$\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно ультра-расширений.*

Доказательство.
($\Longrightarrow$) Следует из 2.4 и 4.5; элементарность класса $\mathbb{K}$ здесь не нужна.
($\Longleftarrow$) По лемме 7.4 класс $\mathbb{K}$ компактен. Для доказательства модальной определимости $\mathbb{K}$, согласно лемме 10.2(д), возьмем любую шкалу $F = (W, R)$ с корнем $w \in W$, такую, что $\mathbb{K} \models F$, и докажем, что $F \in \mathbb{K}$.
Введем пропозиц. переменные $\mathsf{Var}' = \{ P_X \mid X \subseteq W \}$ и естественную модель $M = (F, \theta)$, где $\theta(P_X) := X$.

Наблюдение 1. Следующие формулы истинны в модели M, для любых $X, Y \subseteq W$:

$$P_W, \qquad P_{\overline{X}} \leftrightarrow \neg P_X, \qquad P_{X\cap Y} \leftrightarrow (P_X \wedge P_Y), \qquad P_{\Diamond X} \leftrightarrow \Diamond P_X \tag{$*$}$$

Рассмотрим модальную теорию точки w: $\Phi := \{ \varphi \in \mathcal{L}(\mathsf{Var}') \mid \ M, w \models \varphi \}$.
Очевидно, Φ выполнимо на шкале F. Так как класс $\mathbb{K}$ компактен и $\mathbb{K} \models F$, то по лемме 10.1 Φ выполнимо в классе $\mathbb{K}$, то есть $\exists G = (V, S) \in \mathbb{K}$, $\exists \delta$, $\exists v \in V$, обозначив $N = (G, \delta)$, имеем $N, v \models \Phi$. Без ограничения общности можно считать, что шкала G порождена точкой v, поскольку $\mathbb{K}$ замкнут относительно порожденных подшкал.

Наблюдение 2. Очевидно, что $(M, w) \leftrightsquigarrow (N, v)$. Значит, по лемме 2.6 имеем $M \leftrightsquigarrow N$.

Можно ли из шкалы G получить шкалу F? Мы утверждаем: $\boxed{G^U \twoheadrightarrow F^{\mathfrak{ue}}}$ для некоторого ультрафильтра U. Этого достаточно для доказательства теоремы, ввиду следующей цепочки импликаций, имеющей место по замкнутости класса $\mathbb{K}$:

$$G \in \mathbb{K} \quad\Rightarrow\quad G^U \in \mathbb{K} \quad\Rightarrow\quad F^{\mathfrak{ue}} \in \mathbb{K} \quad\Rightarrow\quad F \in \mathbb{K}.$$

Модель Крипке $N = (V, S, \delta)$ по теореме 8.2 имеет 2-насыщенную (а значит, по леммам 9.2 и 9.4, модально насыщенную и компактную) ультра-степень $N' := N^U = (V', S', \delta')$; обозначим ее шкалу $G' := G^U = (V', S')$.

Наблюдение 3. Поскольку N' — ультра-степень модели N, то $N' \leftrightsquigarrow N \leftrightsquigarrow M$.

Построим функцию $f\colon G^U \to F^{\mathfrak{ue}}$, для всякого $s \in V'$ положив $f(s) = \{ X \subseteq W \mid N', s \models P_X \}$.

Наблюдение 4. Для любых $s \in V'$ и $\alpha \in W^{\mathfrak{ue}}$ имеем: $f(s) = \alpha \iff (N', s) \leftrightsquigarrow (M^{\mathfrak{ue}}, \alpha)$.
($\Rightarrow$) Для любой формулы φ, поскольку $\varphi \leftrightarrow P_{\theta(\varphi)}$ истинно в M, а значит и в N', имеем:

$$M^{\mathfrak{ue}}, f(s) \models \varphi \iff \theta(\varphi) \in f(s) \iff N', s \models P_{\theta(\varphi)} \iff N', s \models \varphi.$$

($\Leftarrow$) Для любого $X \subseteq W$ имеем: $X \in f(s) \iff N', s \models P_X \iff M^{\mathfrak{ue}}, \alpha \models P_X \iff X = \theta(P_X) \in \alpha$.

Осталось проверить, что $f(s)$ — ультрафильтр над W, а также что $f\colon G' \to F^{\mathfrak{ue}}$ является p-морфизмом.

Корректность. Надо проверить, что $f(s)$ — ультрафильтр над W. Это следует из формул ($*$), истинных в M, а значит в N' и в (N', s). Например:

$$X, Y \in f(s) \iff N', s \models P_X \wedge P_Y \iff N', s \models P_{X\cap Y} \iff (X \cap Y) \in f(s).$$

Сюръективность: Возьмем любой ультрафильтр α над W, обозначим $\Gamma_\alpha := \{ P_X \mid X \in \alpha \}$. Надо доказать, что $f(s) = \alpha$, то есть $N', s \models \Gamma_\alpha$, для некоторого $s \in V'$; иначе говоря, выполнимость Γ_α в N'. Ввиду компактности модели N', достаточно доказать конечную выполнимость Γ_α в N', или, что равносильно, в M, ввиду $N' \leftrightsquigarrow M$. Имеем: всякое конечное множество $\{P_{X_1}, \ldots, P_{X_n}\} \subseteq \Gamma_\alpha$ выполнимо в M; действительно,

$$\theta(P_{X_1} \wedge \ldots \wedge P_{X_n}) = X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq \varnothing,$$

ввиду того, что это пересечение конечного числа множеств X_i из ультрафильтра α.

(zig) Пусть $sS't$; докажем: $f(s) R^{\mathfrak{ue}} f(t)$, то есть $\forall X \in f(t)$ верно $\Diamond X \in f(s)$. Если $X \in f(t)$, то $N', t \models P_X$, откуда ввиду $sS't$ имеем $N', s \models \Diamond P_X$. Наконец, по ($*$) заключаем $N', s \models P_{\Diamond X}$, то есть $\Diamond X \in f(s)$.

(zag) Пусть $f(s) = \alpha$ и $\alpha R^{\mathfrak{ue}} \beta$. Надо доказать, что $\exists t \in V'$ такой, что $sS't$ и $f(t) = \beta$.

Рассмотрим модальную теорию точки β: $\Psi := \{\, \psi \mid M^{\mathfrak{ue}}, \beta \models \psi \,\}$. Достаточно доказать, что Ψ выполнимо в некоторой точке t модели N', такой что $sS't$, поскольку это будет означать, что $(N', t) \leftrightsquigarrow (M^{\mathfrak{ue}}, \beta)$ и тем самым $f(t) = \beta$, согласно наблюдению 4. Ввиду модальной насыщенности модели N' достаточно доказать конечную выполнимость Ψ на множестве последователей точки s. Более того, ввиду замкнутости Ψ относительно конечных конъюнкций, достаточно это доказать для одноэлементных подмножеств Ψ.

Итак, для любой формулы $\psi \in \Psi$ имеем: $M^{\mathfrak{ue}}, \beta \models \psi$. Так как $\alpha R^{\mathfrak{ue}} \beta$, то $M^{\mathfrak{ue}}, \alpha \models \Diamond\psi$, то есть $M^{\mathfrak{ue}}, f(s) \models \Diamond\psi$. Отсюда $\theta(\Diamond\psi) \in f(s)$ и $N', s \models P_{\theta(\psi)}$, тем самым $N', s \models \Diamond\psi$. Это означает, что формула ψ истинна в некотором последователе точки s модели N', что и требовалось. $\square$