Полнота и финитная аппроксимируемость логики $\mathbf{K}^{\boxplus}$

Kozen & Parikh (1981); переработано Е.З. (2015)

Синтаксис: $A \ ::= \ \bot \mid p \mid A \to B \mid \Box A \mid \boxplus A$. Множество формул: $\mathsf{Fm}(\Box, \boxplus)$.
Семантика-1: шкала $F = (W, R)$, модальности $\Box$ и $\boxplus$ отвечают отношениям R и R^+.
Семантика-2: шкала $F = (W, R, S)$, модальности $\Box$ и $\boxplus$ отвечают отношениям R и S.
Аксиоматика: аксиомы логики $\mathbf{K}$ для $\Box$ и $\boxplus$, правила MP, Sub, Nec (для $\Box$ и $\boxplus$) и аксиомы:

$$(\mathsf{A1}) \quad \boxplus p \to \Box p, \qquad (\mathsf{A2}) \quad \boxplus p \to \Box\boxplus p, \qquad (\mathsf{A3}) \quad \boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p).$$

Факт. $(W, R, S) \models (\mathsf{A1}) \wedge (\mathsf{A2}) \wedge (\mathsf{A3}) \iff S = R^+$. (Значит, две семантики равнозначны.)
Будем говорить, что шкала (W, R, S) *плоская*, если $R^+ = S$, *возрастает*, если $R^+ \subseteq S$, *убывает*, если $R^+ \supseteq S$.

Теорема 1. *Логика $\mathbf{K}^{\boxplus}$ финитно аппроксимируема, а значит, полна и разрешима.*

$\mathsf{Sub}(A)$ и $\mathsf{Sub}(\Gamma)$ обозначают множества подмножеств формулы A и множества формул Γ.
Замыкание Фишера–Ладнера множества формул Γ: $\mathsf{FL}(\Gamma) = \mathsf{Sub}(\Gamma) \cup \{\Box A, \Box\boxplus A \mid \boxplus A \in \mathsf{Sub}(\Gamma)\}$.
Пусть Γ — непустое конечное FL-замкнутое множество формул, то есть $\mathsf{FL}(\Gamma) \subseteq \Gamma$, $\Gamma' = \neg\Gamma$.
Формула A называется *непротиворечивой*, если $\mathbf{K}^{\boxplus} \nvdash \neg A$.
Для $x \subseteq \Gamma'$ обозначим через $\widehat{x}$ конъюнкцию всех формул из x. Подмножество $x \subseteq \Gamma'$ — *максимальное непротиворечивое* (МНМ), если формула $\widehat{x}$ непротиворечива и x — максимальное с таким свойством.

Рассмотрим W — множество всех МНМ. Изучим две шкалы $\underline{F} = (W, \underline{R}, \underline{S})$ и $\overline{F} = (W, \overline{R}, \overline{S})$, где

$$\begin{array}{lcl}
x\,\underline{R}\,y & \leftrightharpoons & \text{формула } \ \widehat{x} \wedge \Diamond\widehat{y} \text{ является непротиворечивой;} \\
x\,\underline{S}\,y & \leftrightharpoons & \text{формула } \ \widehat{x} \wedge \diamondplus\widehat{y} \text{ является непротиворечивой;} \\
x\,\overline{R}\,y & \leftrightharpoons & \text{для любой формулы вида } \Box A \ \ (\Box A \in x \implies A \in y); \\
x\,\overline{S}\,y & \leftrightharpoons & \text{для любой формулы вида } \boxplus A \ \ (\boxplus A \in x \implies A \in y).
\end{array}$$

Мы покажем, что $\underline{F} \subseteq \overline{F}$, шкала $\underline{F}$ убывает, шкала $\overline{F}$ возрастает. То есть верны включения:

$$\underline{R} \ \subseteq \ \overline{R} \qquad \text{и} \qquad \underline{S} \ \subseteq \ (\underline{R})^+ \ \subseteq \ (\overline{R})^+ \ \subseteq \ \overline{S}. \tag{$*$}$$

Лемма 2. $\underline{F} \subseteq \overline{F}$. *То есть* $\underline{R} \subseteq \overline{R}$ *и* $\underline{S} \subseteq \overline{S}$. (Это верно для любой (би)модальной логики.)

Доказательство. Докажем $\underline{R} \subseteq \overline{R}$. Пусть $x\,\underline{R}\,y$, то есть формула $\widehat{x} \wedge \Diamond\widehat{y}$ непротиворечива. Докажем $x\,\overline{R}\,y$. Берем $\Box A \in x$. Если бы $A \notin y$, то $\neg A \in y$. Но тогда даже в логике $\mathbf{K}$ из $\widehat{x} \wedge \Diamond\widehat{y}$ следовало бы $\Box A \wedge \Diamond\neg A$, то есть $\bot$.
Включение $\underline{S} \subseteq \overline{S}$ доказывается аналогично. □

Лемма 3. *Шкала $\overline{F}$ возрастает, то есть $(\overline{R})^+ \subseteq \overline{S}$.* (Для этого нужны лишь аксиомы (A1) и (A2).)

Доказательство. Достаточно доказать два включения: $\overline{R} \subseteq \overline{S}$ и $\overline{R} \circ \overline{S} \subseteq \overline{S}$.

1) Пусть $x\,\overline{R}\,y$. Берем $\boxplus A \in x$. По аксиоме (A1) получаем $\Box A \in x$ (ведь $\Box A \in \Gamma$). Отсюда $A \in y$. Итак, $x\,\overline{S}\,y$.

2) Пусть $x\,\overline{R}\,y\,\overline{S}\,z$. Докажем $x\,\overline{S}\,z$. Берем $\boxplus A \in x$. Так как $\Box\boxplus A \in \Gamma$, то по аксиоме (A2) получаем $\Box\boxplus A \in x$, откуда $\boxplus A \in y$ и $A \in z$, что и требовалось.

Это общий факт: для грамматических аксиом максимальные отношения им удовлетворяют [AiML, L.4.1]. □

Для любого подмножества $\alpha \subseteq W$ обозначим модальную формулу $\breve{\alpha} := \bigvee_{x \in \alpha} \widehat{x}$. Заметим: $\vdash \neg\breve{\alpha} \leftrightarrow \bigvee_{y \notin \alpha} \widehat{y}$. Действительно, легко видеть, что $\vdash \bigvee_{x \in W} \widehat{x}$, а также если $x \neq y$, то формула $\widehat{x} \wedge \widehat{y}$ противоречива.

Утверждение 4. *Следующие факты про* $\underline{R}$ *и* $\underline{S}$ *верны для любой логики:*

1. $\vdash \widehat{x} \to \breve{\alpha} \iff x \in \alpha$.
2. $\vdash \widehat{x} \to \Box\breve{\alpha} \iff \underline{R}(x) \subseteq \alpha$.
3. $\vdash \widehat{x} \to \boxplus\breve{\alpha} \iff \underline{S}(x) \subseteq \alpha$.
4. $\vdash \breve{\alpha} \to \Box\breve{\alpha} \iff$ *множество* α *замкнуто по отношению* $\underline{R}$.
5. $\vdash \breve{\alpha} \to \boxplus\breve{\alpha} \iff$ *множество* α *замкнуто по отношению* $\underline{S}$.

Доказательство. 1) ($\Leftarrow$) Очевидно. ($\Rightarrow$) Если $x \notin \alpha$, то $\vdash \widehat{x} \to \neg\breve{\alpha}$. Поэтому если бы еще и $\vdash \widehat{x} \to \breve{\alpha}$, то $\vdash \neg\widehat{x}$.

Оставшиеся пункты — частные случаи следующего факта (и его аналога для $\boxplus$ и $\underline{S}$): для любых $\alpha, \beta \subseteq W$

$$\vdash \breve{\alpha} \to \Box\breve{\beta} \iff \underline{R}[\alpha] \subseteq \beta.$$

Докажем его:

$$\begin{aligned} \nvdash \breve{\alpha} \to \Box\breve{\beta} &\iff \text{формула } \breve{\alpha} \wedge \Diamond\neg\breve{\beta} \text{ непротиворечива} \\ &\iff \text{формула } \textstyle\bigvee_{x \in \alpha, y \notin \beta} \left(\widehat{x} \wedge \Diamond\widehat{y}\right) \text{ непротиворечива} \\ &\iff \exists x \in \alpha\ \exists y \notin \beta\colon\ \text{формула } \widehat{x} \wedge \Diamond\widehat{y} \text{ непротиворечива} \\ &\iff \exists x \in \alpha\ \exists y \notin \beta\colon\ x\,\underline{R}\,y \\ &\iff \underline{R}[\alpha] \nsubseteq \beta. \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 5. *Шкала* $\underline{F}$ *убывает, то есть* $(\underline{R})^+ \supseteq \underline{S}$. (Только здесь нужна аксиома индукции (A3).)

Доказательство. Возьмем любой $x \in W$ и докажем $\underline{S}(x) \subseteq (\underline{R})^+(x)$. Для множества точек $\alpha = (\underline{R})^+(x)$ имеем:

(a) $\vdash \widehat{x} \to \Box\breve{\alpha}$, поскольку, очевидно, $\underline{R}(x) \subseteq \alpha$.
(b) $\vdash \breve{\alpha} \to \Box\breve{\alpha}$, поскольку, очевидно, множество α замкнуто по отношению $\underline{R}$.
(c) $\vdash \Box\breve{\alpha} \to \boxplus\breve{\alpha}$, выводится из предыдущего, пользуясь ***аксиомой индукции*** (A3).
(d) $\vdash \widehat{x} \to \Box\breve{\alpha}$, получили из (a) и (c). Значит, $\underline{S}(x) \subseteq \alpha = (\underline{R})^+(x)$. $\square$

Приступаем к доказательству Теоремы. Пусть $\mathbf{K}^{\boxplus} \nvdash \neg A_0$. Предъявим *конечную* модель $M = (W, R, R^+, V)$, в которой выполнима формула A_0. Положим $\Gamma := \mathsf{FL}(\{A_0\})$, $\Gamma' = \neg\Gamma$, и пусть

- W — множество всех МНМ $x \subseteq \Gamma'$,
- R — любое (!) отношение из интервала $\underline{R} \subseteq R \subseteq \overline{R}$,
- V — каноническая оценка: $x \models p \Leftrightarrow p \in x$, для $p \in \mathsf{Var}(\Gamma)$.

Так как формула A_0 $\mathbf{K}^{\boxplus}$-непротиворечива, то $A_0 \in x_0$ для некоторого $x_0 \in W$. По Лемме 6, $M, x_0 \models A_0$.

Заметим, пользуясь ($*$), что $\underline{S} \subseteq (\underline{R})^+ \subseteq R^+ \subseteq (\overline{R})^+ \subseteq \overline{S}$.

Лемма 6 (Каноническая, или о фильтрации)**.** $M, x \models A \iff A \in x$, *для любых* $A \in \Gamma$ *и* $x \in W$.

Доказательство. Индукция по A. Все случаи тривиальны, кроме модальных.

Случай $\Box$. Имеем:

$$\begin{aligned} x \models \Box A &\overset{\text{(def)}}{\iff} \forall y\,(x\,R\,y \ \Rightarrow\ y \models A) \\ &\overset{\text{(I.H.)}}{\iff} \forall y\,(x\,R\,y \ \Rightarrow\ A \in y) \\ &\overset{(?)}{\iff} \Box A \in x. \end{aligned}$$

Импликация $\overset{(?)}{\Longleftarrow}$: пусть $\Box A \in x$. Если $x\,R\,y$, то $x\,\overline{R}\,y$, откуда $A \in y$ по определению $\overline{R}$.

Импликация $\overset{(?)}{\Longrightarrow}$: пусть $\Box A \notin x$. Тогда $\neg\Box A \in x$. Поэтому формула $\widehat{x} \wedge \neg\Box A$, а значит, и эквивалентная ей формула $\widehat{x} \wedge \Diamond\neg A$ непротиворечива.

Факт. Для любой формулы $B \in \Gamma'$ имеем: $\vdash B \leftrightarrow \bigvee_{B \in y} \widehat{y}$.

Значит, формула $\widehat{x} \wedge \Diamond \bigvee_{\neg A \in y} \widehat{y}$ непротиворечива. Она эквивалентна дизъюнкции: $\bigvee_{A \notin y} \left(\widehat{x} \wedge \Diamond\widehat{y}\right)$. Поэтому хотя бы один дизъюнкт $\widehat{x} \wedge \Diamond\widehat{y}$ непротиворечив. Итак, мы нашли такой y, что $A \notin y$ и $x\,\underline{R}y$, а значит, $x\,R\,y$.

Случай $\boxplus$. Аналогично, пользуясь вместо включений $\underline{R} \subseteq R \subseteq \overline{R}$ включениями $\underline{S} \subseteq R^+ \subseteq \overline{S}$. $\square$

Спасибо за внимание!