Модальная логика. Лекция 10: Модальная компактность. Теорема ван Бентема о характеризации модального языка внутри языка первого порядка и ее варианты

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

22 мая 2020 года

Теорема ван Бентема о характеризации

Теорема (ван Бентем, 1976)

Пусть $\alpha(x)$ *— формула первого порядка с одной свободной переменной в сигнатуре* $\{R(x, y); P_0(x), P_1(x), \ldots\}$.

Теорема ван Бентема о характеризации

Теорема (ван Бентем, 1976)

Пусть $\alpha(x)$ *— формула первого порядка с одной свободной переменной в сигнатуре* $\{R(x,y); P_0(x), P_1(x), \ldots\}$*. Тогда:*

$\alpha(x)$ *эквивалентна некоторой модальной формуле* $\iff$
$\alpha(x)$ *инвариантна относительно бисимуляций* $(\simeq)$*.*

Теорема ван Бентема о характеризации

Теорема (ван Бентем, 1976)

Пусть $\alpha(x)$ *— формула первого порядка с одной свободной переменной в сигнатуре* $\{R(x,y); P_0(x), P_1(x), \ldots\}$. *Тогда:*

$\alpha(x)$ *эквивалентна некоторой модальной формуле* $\iff$
$\alpha(x)$ *инвариантна относительно бисимуляций* $(\simeq)$.

Напоминание: модальная формула $A \longmapsto$ ее станд. перевод $A^*(x)$.

Теорема ван Бентема о характеризации

Теорема (ван Бентем, 1976)

Пусть $\alpha(x)$ *— формула первого порядка с одной свободной переменной в сигнатуре* $\{R(x,y); P_0(x), P_1(x), \ldots\}$. *Тогда:*

$\alpha(x)$ *эквивалентна некоторой модальной формуле* $\iff$
$\alpha(x)$ *инвариантна относительно бисимуляций* $(\simeq)$.

Напоминание: модальная формула $A \longmapsto$ ее станд. перевод $A^*(x)$.

Лемма о стандартном переводе

Для любой отм. модели (M, w) имеем: $M, w \models A \Leftrightarrow M \models^1 A^*(w)$.

Теорема ван Бентема о характеризации

Теорема (ван Бентем, 1976)

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка с одной свободной переменной в сигнатуре $\{R(x,y); P_0(x), P_1(x), \ldots\}$. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$
$\alpha(x)$ инвариантна относительно бисимуляций ($\simeq$).

Напоминание: модальная формула $A \longmapsto$ ее станд. перевод $A^*(x)$.

Лемма о стандартном переводе

Для любой отм. модели (M,w) имеем: $M,w \models A \Leftrightarrow M \models^1 A^*(w)$.

$(M,a) \simeq (N,b)$, если $\exists$ бисимуляция Z между M и N, такая что $a\,Z\,b$.

Теорема ван Бентема о характеризации

Теорема (ван Бентем, 1976)

Пусть $\alpha(x)$ *— формула первого порядка с одной свободной переменной в сигнатуре* $\{R(x,y); P_0(x), P_1(x), \ldots\}$. *Тогда:*

$\alpha(x)$ *эквивалентна некоторой модальной формуле* $\iff$
$\alpha(x)$ *инвариантна относительно бисимуляций* $(\simeq)$.

Напоминание: модальная формула $A \longmapsto$ ее станд. перевод $A^*(x)$.

Лемма о стандартном переводе

Для любой отм. модели (M, w) имеем: $M, w \models A \Leftrightarrow M \models^1 A^*(w)$.

$(M, a) \simeq (N, b)$, если $\exists$ бисимуляция Z между M и N, такая что $a\,Z\,b$.

Определение

Формула $\alpha(x)$ инвариантна отн. некоторого $\sim$, если для любых отмеченных моделей $(M, a) \sim (N, b)$ имеем: $M \models \alpha(a) \Leftrightarrow N \models \alpha(b)$.

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) если $a\,Z\,a'$, то $M, a \models p \Leftrightarrow M', a' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) если $a\,Z\,a'$, то $M, a \models p \Leftrightarrow M', a' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.

(zig) $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b \implies$ существует $b' \in W'$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a'\,R'\,b'$

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) если $a\,Z\,a'$, то $M, a \models p \Leftrightarrow M', a' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.

(zig) $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b \implies$ существует $b' \in W'$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a'\,R'\,b'$

(zag) $a\,Z\,a'$ и $a'\,R'\,b' \implies$ существует $b \in W$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a\,R\,b$

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

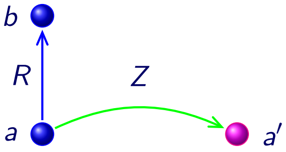
Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) если $a\,Z\,a'$, то $M, a \models p \Leftrightarrow M', a' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.

(zig) $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b \implies$ существует $b' \in W'$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a'\,R'\,b'$

(zag) $a\,Z\,a'$ и $a'\,R'\,b' \implies$ существует $b \in W$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a\,R\,b$



Условие **(zig)**

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

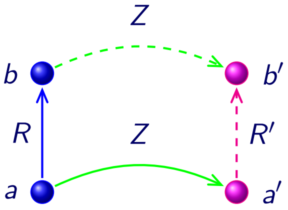
Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) если $a\,Z\,a'$, то $M, a \models p \Leftrightarrow M', a' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.

(zig) $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b \implies$ существует $b' \in W'$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a'\,R'\,b'$

(zag) $a\,Z\,a'$ и $a'\,R'\,b' \implies$ существует $b \in W$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a\,R\,b$



Условие **(zig)**

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

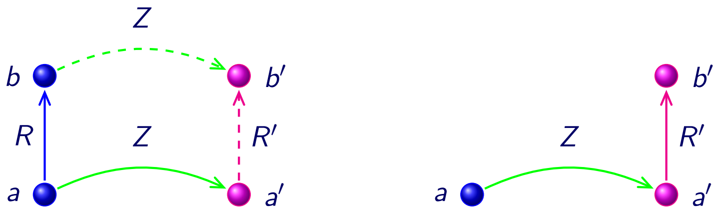
Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) если $a\,Z\,a'$, то $M, a \models p \Leftrightarrow M', a' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.

(zig) $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b \implies$ существует $b' \in W'$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a'\,R'\,b'$

(zag) $a\,Z\,a'$ и $a'\,R'\,b' \implies$ существует $b \in W$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a\,R\,b$



Условие **(zig)** Условие **(zag)**

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

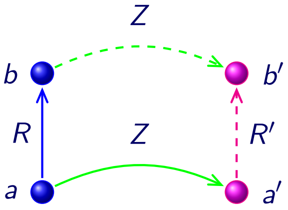
Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

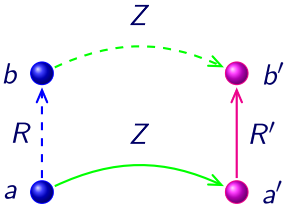
(var) если $a\,Z\,a'$, то $M, a \models p \Leftrightarrow M', a' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.

(zig) $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b \implies$ существует $b' \in W'$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a'\,R'\,b'$

(zag) $a\,Z\,a'$ и $a'\,R'\,b' \implies$ существует $b \in W$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a\,R\,b$



Условие **(zig)**



Условие **(zag)**

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Доказательство. Дано: каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Доказательство. Дано: каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Утв. *Тогда Γ является $\mathbf{K}$-непротиворечивым множеством формул.*

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Доказательство. Дано: каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Утв. *Тогда Γ является $\mathbf{K}$-непротиворечивым множеством формул.*

Если бы $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$, такое что $\mathbf{K} \vdash \neg \bigwedge \Delta$,

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Доказательство. Дано: каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Утв. *Тогда* Γ *является* $\mathbf{K}$*-непротиворечивым множеством формул.*

Если бы $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$, такое что $\mathbf{K} \vdash \neg\bigwedge\Delta$, то формула $\neg\bigwedge\Delta$ была бы общезначима,

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Доказательство. Дано: каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Утв. *Тогда Γ является $\mathbf{K}$-непротиворечивым множеством формул.*

Если бы $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$, такое что $\mathbf{K} \vdash \neg\bigwedge\Delta$, то формула $\neg\bigwedge\Delta$ была бы общезначима, а значит, Δ не было бы выполнимым.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Доказательство. Дано: каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Утв. *Тогда Γ является $\mathbf{K}$-непротиворечивым множеством формул.*

Если бы $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$, такое что $\mathbf{K} \vdash \neg \bigwedge \Delta$, то формула $\neg \bigwedge \Delta$ была бы общезначима, а значит, Δ не было бы выполнимым.

Тогда $\Gamma \subseteq x$ для некоторого *максимального* $\mathbf{K}$-*непротиворечивого* множества $x \in W_{\mathbf{K}}$.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Доказательство. Дано: каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Утв. *Тогда Γ является* $\mathbf{K}$*-непротиворечивым множеством формул.*

Если бы $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$, такое что $\mathbf{K} \vdash \neg \bigwedge \Delta$, то формула $\neg \bigwedge \Delta$ была бы общезначима, а значит, Δ не было бы выполнимым.

Тогда $\Gamma \subseteq x$ для некоторого *максимального* $\mathbf{K}$*-непротиворечивого* множества $x \in W_{\mathbf{K}}$. По теореме о канонической модели $M_{\mathbf{K}}, x \models \Gamma$.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Доказательство. Дано: каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо.

Утв. *Тогда Γ является $\mathbf{K}$-непротиворечивым множеством формул.*

Если бы $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$, такое что $\mathbf{K} \vdash \neg\bigwedge\Delta$, то формула $\neg\bigwedge\Delta$ была бы общезначима, а значит, Δ не было бы выполнимым.

Тогда $\Gamma \subseteq x$ для некоторого *максимального* $\mathbf{K}$-*непротиворечивого* множества $x \in W_{\mathbf{K}}$. По теореме о канонической модели $M_{\mathbf{K}}, x \models \Gamma$.
Тем самым Γ выполнимо. ◁

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Определение

Класс отм. моделей $\mathbb{M}$ модально компактен, если (экв. определения):

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Определение

Класс отм. моделей $\mathbb{M}$ модально компактен, если (экв. определения):

- для всякого множества модальных формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$, если каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$, то и всё Γ выполнимо в $\mathbb{M}$.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Определение

Класс отм. моделей $\mathbb{M}$ **модально компактен**, если (экв. определения):

- для всякого множества модальных формул $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$, если каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$, то и всё Γ выполнимо в $\mathbb{M}$.
- для всякого $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$, замкнутого относительно конъюнкции, если каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в $\mathbb{M}$, то и Γ выполнимо в $\mathbb{M}$.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Определение

Класс отм. моделей $\mathbb{M}$ **модально компактен**, если (экв. определения):

- для всякого множества модальных формул $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$, если каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$, то и всё Γ выполнимо в $\mathbb{M}$.
- для всякого $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$, замкнутого относительно конъюнкции, если каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в $\mathbb{M}$, то и Γ выполнимо в $\mathbb{M}$.

Легко доказать эквивалентность этих двух определений.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть Γ — некоторое множество модальных формул.
Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо,
то и всё множество формул Γ выполнимо.

Определение

Класс отм. моделей $\mathbb{M}$ **модально компактен**, если (экв. определения):

- для всякого множества модальных формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$, если каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$, то и всё Γ выполнимо в $\mathbb{M}$.
- для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$, замкнутого относительно конъюнкции, если каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в $\mathbb{M}$, то и Γ выполнимо в $\mathbb{M}$.

Легко доказать эквивалентность этих двух определений.
(2)$\Rightarrow$(1): взять замыкание множества Γ относительно $\wedge$.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ. То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M, a \models \Sigma$.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ. То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M, a \models \Sigma$. Докажем мод. компактность $\mathbb{M}$.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ. То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$. Докажем мод. компактность $\mathbb{M}$. Берем $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Пусть каждое конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$.

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ. То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M, a \models \Sigma$. Докажем мод. компактность $\mathbb{M}$. Берем $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Пусть каждое конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$. Тогда каждое конечное $(\Gamma' \cup \Sigma') \subseteq (\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ.
То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M, a \models \Sigma$. Докажем мод. компактность $\mathbb{M}$.
Берем $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Пусть каждое конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$.
Тогда каждое конечное $(\Gamma' \cup \Sigma') \subseteq (\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
По теореме о компактности всё $(\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ.
То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$. Докажем мод. компактность $\mathbb{M}$.
Берем $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Пусть каждое конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$.
Тогда каждое конечное $(\Gamma' \cup \Sigma') \subseteq (\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
По теореме о компактности всё $(\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
Это и означает, что Γ выполнимо в классе $\mathbb{M}$. $\triangleleft$

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ.
То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$. Докажем мод. компактность $\mathbb{M}$.
Берем $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Пусть каждое конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$.
Тогда каждое конечное $(\Gamma' \cup \Sigma') \subseteq (\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
По теореме о компактности всё $(\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
Это и означает, что Γ выполнимо в классе $\mathbb{M}$. $\triangleleft$

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ.
То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M, a \models \Sigma$. Докажем мод. компактность $\mathbb{M}$.
Берем $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Пусть каждое конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$.
Тогда каждое конечное $(\Gamma' \cup \Sigma') \subseteq (\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
По теореме о компактности всё $(\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
Это и означает, что Γ выполнимо в классе $\mathbb{M}$. $\triangleleft$

Это же верно для множеств формул $\Phi(x) \subseteq \mathrm{FO}$ и отм. моделей (M, a).

Теорема о компактности для модальной логики

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Если каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо, то и всё множество формул Γ выполнимо.

Следствие

Всякий класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$, заданный некоторым множеством модальных формул $\Sigma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$, модально компактен.

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ задан множеством модальных формул Σ.
То есть: $(M, a) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M, a \models \Sigma$. Докажем мод. компактность $\mathbb{M}$.
Берем $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_{\mathrm{ML}}$. Пусть каждое конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{M}$.
Тогда каждое конечное $(\Gamma' \cup \Sigma') \subseteq (\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
По теореме о компактности всё $(\Gamma \cup \Sigma)$ выполнимо (где-нибудь).
Это и означает, что Γ выполнимо в классе $\mathbb{M}$. $\triangleleft$

Это же верно для множеств формул $\Phi(x) \subseteq \mathrm{FO}$ и отм. моделей (M, a).

Сл. Если класс $\mathbb{M}$ задан мн-вом $\Phi(x) \subseteq \mathrm{FO}$, то $\mathbb{M}$ мод. компактен.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$
$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$

$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Это верно для любой пары языков $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, говорящих про одни и те же структуры, если в языках имеются конъюнкция $(\wedge)$ и отрицание $(\neg)$ и имеет место теорема о компактности (для $\mathcal{L}'$, а значит, и для $\mathcal{L}$).

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$
$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности ($\equiv_{\mathsf{ML}}$).

Доказательство.

($\Rightarrow$) Тривиально: всякая модальная формула A, а значит, и эквивалентная ей $\alpha(x)$, инвариантна относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$

$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности ($\equiv_{\mathsf{ML}}$).

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$

$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности ($\equiv_{\mathsf{ML}}$).

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.

Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$?

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$

$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.

Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$? Его теорией!

$$\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M}).$$

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$

$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.

Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$? Его теорией!

$$\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M}).$$

1) Почему $\mathbb{M}$ задается множеством Σ?

2) Почему $\mathbb{M}$ задается одной формулой из Σ?

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$
$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $\quad (M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.

Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$? Его теорией!

$$\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M}).$$

1) Почему $\mathbb{M}$ задается множеством Σ?
2) Почему $\mathbb{M}$ задается одной формулой из Σ?

2) Класс $\mathbb{M}$ задан и $\alpha(x)$, и Σ,

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$

$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $\quad (M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.

Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$? Его теорией!

$$\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M}).$$

1) Почему $\mathbb{M}$ задается множеством Σ?

2) Почему $\mathbb{M}$ задается одной формулой из Σ?

2) Класс $\mathbb{M}$ задан и $\alpha(x)$, и Σ, а значит, и $\Sigma^*(x)$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$

$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $\quad (M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.

Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$? Его теорией!

$$\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M}).$$

1) Почему $\mathbb{M}$ задается множеством Σ?

2) Почему $\mathbb{M}$ задается одной формулой из Σ?

2) Класс $\mathbb{M}$ задан и $\alpha(x)$, и Σ, а значит, и $\Sigma^*(x)$. Тем самым $\alpha(x) \models \Sigma^*(x)$ и $\Sigma^*(x) \models \alpha(x)$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:

$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$

$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.

Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$? Его теорией!

$$\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M}).$$

1) Почему $\mathbb{M}$ задается множеством Σ?

2) Почему $\mathbb{M}$ задается одной формулой из Σ?

2) Класс $\mathbb{M}$ задан и $\alpha(x)$, и Σ, а значит, и $\Sigma^*(x)$. Тем самым $\alpha(x) \models \Sigma^*(x)$ и $\Sigma^*(x) \models \alpha(x)$. По теореме о компактности (для FO) $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Sigma$, такое что $\Delta^*(x) \models \alpha(x)$ и $\alpha(x) \models \Delta^*(x)$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:
$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$
$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности ($\equiv_{\mathsf{ML}}$).

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.
Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$? Его теорией!

$$\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M}).$$

1) Почему $\mathbb{M}$ задается множеством Σ?
2) Почему $\mathbb{M}$ задается одной формулой из Σ?

2) Класс $\mathbb{M}$ задан и $\alpha(x)$, и Σ, а значит, и $\Sigma^*(x)$. Тем самым $\alpha(x) \models \Sigma^*(x)$ и $\Sigma^*(x) \models \alpha(x)$. По теореме о компактности (для FO) $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Sigma$, такое что $\Delta^*(x) \models \alpha(x)$ и $\alpha(x) \models \Delta^*(x)$.
Следовательно, $\alpha(x)$ эквивалентна модальной формуле $A = \bigwedge \Delta$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x)$ — формула первого порядка. Тогда:
$\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$
$\alpha(x)$ инвариантна относительно модальной эквивалентности $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство.
$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отмеченных моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \;\Leftrightarrow\; M \models \alpha(w)$.
Каким множеством модальных формул Σ задать $\mathbb{M}$? Его теорией!

$$\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M}).$$

1) Почему $\mathbb{M}$ задается множеством Σ?
2) Почему $\mathbb{M}$ задается одной формулой из Σ?

2) Класс $\mathbb{M}$ задан и $\alpha(x)$, и Σ, а значит, и $\Sigma^*(x)$. Тем самым $\alpha(x) \models \Sigma^*(x)$ и $\Sigma^*(x) \models \alpha(x)$. По теореме о компактности (для FO) $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Sigma$, такое что $\Delta^*(x) \models \alpha(x)$ и $\alpha(x) \models \Delta^*(x)$.
Следовательно, $\alpha(x)$ эквивалентна модальной формуле $A = \bigwedge \Delta$.
Осталось **1)**.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти ($\equiv_{\mathsf{ML}}$).

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$. Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$. Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M})$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \Longleftrightarrow M, a \models \Sigma$?

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \Longleftrightarrow M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$. Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен. Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$. Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$ Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти ($\equiv_{\mathrm{ML}}$).

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? ($\Rightarrow$) тривиально. Осталось ($\Leftarrow$)
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Достаточно проверить, что каждая $A \in T$ выполнима в $\mathbb{M}$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Достаточно проверить, что каждая $A \in T$ выполнима в $\mathbb{M}$. Имеем: $M, a \models A$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Достаточно проверить, что каждая $A \in T$ выполнима в $\mathbb{M}$. Имеем: $M, a \models A$. Допустим, A не выполнима в $\mathbb{M}$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Достаточно проверить, что каждая $A \in T$ выполнима в $\mathbb{M}$. Имеем: $M, a \models A$. Допустим, A не выполнима в $\mathbb{M}$. Тогда $\mathbb{M} \models \neg A$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Достаточно проверить, что каждая $A \in T$ выполнима в $\mathbb{M}$. Имеем: $M, a \models A$. Допустим, A не выполнима в $\mathbb{M}$. Тогда $\mathbb{M} \models \neg A$. Тогда $(\neg A) \in \Sigma$. Но $M, a \models \Sigma$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \Longleftrightarrow M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Достаточно проверить, что каждая $A \in T$ выполнима в $\mathbb{M}$. Имеем: $M, a \models A$. Допустим, A не выполнима в $\mathbb{M}$. Тогда $\mathbb{M} \models \neg A$. Тогда $(\neg A) \in \Sigma$. Но $M, a \models \Sigma$. Тогда $M, a \models \neg A$, противоречие.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathsf{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathsf{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \Longleftrightarrow M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Итак, $\exists$ отмеченная модель $(N, b) \in \mathbb{M}$, такая что $M, b \models T$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Итак, $\exists$ отмеченная модель $(N, b) \in \mathbb{M}$, такая что $M, b \models T$.

Утверждение 2. $(N, b) \equiv_{\mathrm{ML}} (M, a)$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Итак, $\exists$ отмеченная модель $(N, b) \in \mathbb{M}$, такая что $M, b \models T$.

Утверждение 2. $(N, b) \equiv_{\mathrm{ML}} (M, a)$.

$M, a \models A \Rightarrow A \in T \Rightarrow N, b \models A$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Итак, $\exists$ отмеченная модель $(N, b) \in \mathbb{M}$, такая что $M, b \models T$.

Утверждение 2. $(N, b) \equiv_{\mathrm{ML}} (M, a)$.

$M, a \models A \Rightarrow A \in T \Rightarrow N, b \models A$.
$M, a \not\models A \Rightarrow M, a \models \neg A$

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Итак, $\exists$ отмеченная модель $(N, b) \in \mathbb{M}$, такая что $M, b \models T$.

Утверждение 2. $(N, b) \equiv_{\mathrm{ML}} (M, a)$.

$M, a \models A \Rightarrow A \in T \Rightarrow N, b \models A$.
$M, a \not\models A \Rightarrow M, a \models \neg A \Rightarrow \ldots \Rightarrow N, b \models \neg A \Rightarrow N, b \not\models A$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$ $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти ($\equiv_{\mathrm{ML}}$).

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? ($\Rightarrow$) тривиально. Осталось ($\Leftarrow$)
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Итак, $\exists$ отмеченная модель $(N, b) \in \mathbb{M}$, такая что $M, b \models T$.

Утверждение 2. $(N, b) \equiv_{\mathrm{ML}} (M, a)$.

$M, a \models A \Rightarrow A \in T \Rightarrow N, b \models A$.
$M, a \not\models A \Rightarrow M, a \models \neg A \Rightarrow \ldots \Rightarrow N, b \models \neg A \Rightarrow N, b \not\models A$.

Ввиду замкнутости класса $\mathbb{M}$ отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$ заключаем $(M, a) \in \mathbb{M}$.

Теорема ван Бентема, слабая версия

Пусть $\alpha(x) \in \mathrm{FO}(x)$. Тогда: $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff \alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквив-ти $(\equiv_{\mathrm{ML}})$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$. Обозначим задаваемый ею класс отм. моделей $\mathbb{M}$: $(M, w) \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M \models \alpha(w)$.
Класс $\mathbb{M}$ задан ф-лой $\alpha(x) \Rightarrow$ он FO-компактен $\Rightarrow$ он ML-компактен.
Покажем: $\mathbb{M}$ задается своей модальной теорией: $\Sigma := \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(\mathbb{M})$.
Почему $(M, a) \in \mathbb{M} \iff M, a \models \Sigma$? $(\Rightarrow)$ тривиально. Осталось $(\Leftarrow)$
Рассмотрим $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M, a)$. Очевидно, T замкнута отн. $\wedge$.

Утверждение 1. *Множество формул T выполнимо в $\mathbb{M}$.*

Итак, $\exists$ отмеченная модель $(N, b) \in \mathbb{M}$, такая что $M, b \models T$.

Утверждение 2. $(N, b) \equiv_{\mathrm{ML}} (M, a)$.

$M, a \models A \Rightarrow A \in T \Rightarrow N, b \models A$.
$M, a \not\models A \Rightarrow M, a \models \neg A \Rightarrow \ldots \Rightarrow N, b \models \neg A \Rightarrow N, b \not\models A$.

Ввиду замкнутости класса $\mathbb{M}$ отн. $\equiv_{\mathrm{ML}}$ заключаем $(M, a) \in \mathbb{M}$. $\triangleleft$

Как заменить $\equiv_{\mathrm{ML}}$ на $\simeq$?

Вспомним: если $(M, a) \simeq (N, b)$, то $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$.

Как заменить $\equiv_{\mathrm{ML}}$ на $\simeq$?

Вспомним: если $(M, a) \simeq (N, b)$, то $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$.
Обратно не всегда верно.

Как заменить $\equiv_{\mathsf{ML}}$ на $\simeq$?

Вспомним: если $(M, a) \simeq (N, b)$, то $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$.
Обратно не всегда верно.
Если $\alpha(x)$ инвариантна относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$,

Как заменить $\equiv_{\mathsf{ML}}$ на $\simeq$?

Вспомним: если $(M, a) \simeq (N, b)$, то $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$.
Обратно не всегда верно.
Если $\alpha(x)$ инвариантна относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$,
то $\alpha(x)$ инвариантна относительно $\simeq$.

Как заменить $\equiv_{\mathsf{ML}}$ на $\simeq$?

Вспомним: если $(M, a) \simeq (N, b)$, то $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$.
Обратно не всегда верно.
Если $\alpha(x)$ инвариантна относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$,
то $\alpha(x)$ инвариантна относительно $\simeq$.
Мы докажем, что верно и обратное!

Как заменить $\equiv_{\mathsf{ML}}$ на $\simeq$?

Вспомним: если $(M, a) \simeq (N, b)$, то $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$.
Обратно не всегда верно.
Если $\alpha(x)$ инвариантна относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$,
то $\alpha(x)$ инвариантна относительно $\simeq$.
Мы докажем, что верно и обратное!
Существенно, что речь идет о формуле первого порядка, а не о произвольном классе отмеченных моделей. Значит, нужна специфика языка первого порядка.

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$(M, a) \quad \equiv_{\mathrm{ML}} \quad (N, b)$$

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & & (N', b') \\ & & \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathsf{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathsf{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$(M', a') \quad \simeq \quad (N', b')$$

$$(M, a) \quad \equiv_{\mathsf{ML}} \quad (N, b)$$

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathsf{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathsf{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathsf{FO}} & & \equiv_{\mathsf{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathsf{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Лемма

Формула первого порядка $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквивалентности $\equiv_{\mathrm{ML}}$ $\iff$ она инвариантна отн. бисимуляции $\simeq$.

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M,a) \equiv_{ML} (N,b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{FO}$) (а значит и $\equiv_{ML}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M',a') \simeq (N',b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M',a') & \simeq & (N',b') \\ \equiv_{FO} & & \equiv_{FO} \\ (M,a) & \equiv_{ML} & (N,b) \end{array}$$

Лемма

Формула первого порядка $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквивалентности $\equiv_{ML}$ $\Longleftrightarrow$ она инвариантна отн. бисимуляции $\simeq$.

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инв. отн. бисимуляции $\simeq$.

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Лемма

Формула первого порядка $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквивалентности $\equiv_{\mathrm{ML}} \iff$ она инвариантна отн. бисимуляции $\simeq$.

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инв. отн. бисимуляции $\simeq$. Кроме того, очевидно, что $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{FO}}$.

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M,a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N,b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M',a') \simeq (N',b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M',a') & \simeq & (N',b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M,a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N,b) \end{array}$$

Лемма

Формула первого порядка $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквивалентности $\equiv_{\mathrm{ML}} \iff$ она инвариантна отн. бисимуляции $\simeq$.

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инв. отн. бисимуляции $\simeq$. Кроме того, очевидно, что $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{FO}}$. Берем любые $(M,a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N,b)$. Достраиваем по лемме о манёвре.

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Лемма

Формула первого порядка $\alpha(x)$ инвариантна отн. модальной эквивалентности $\equiv_{\mathrm{ML}} \iff$ она инвариантна отн. бисимуляции $\simeq$.

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть $\alpha(x)$ инв. отн. бисимуляции $\simeq$.
Кроме того, очевидно, что $\alpha(x)$ инвариантна отн. $\equiv_{\mathrm{FO}}$.
Берем любые $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$. Достраиваем по лемме о манёвре.
Теперь с формулой $\alpha(x)$ совершаем «манёвр» от истинности на (M, a) к истинности на (N, b). $\triangleleft$

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathsf{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathsf{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$
\begin{array}{ccc}
(M', a') & \simeq & (N', b') \\
\equiv_{\mathsf{FO}} & & \equiv_{\mathsf{FO}} \\
(M, a) & \equiv_{\mathsf{ML}} & (N, b)
\end{array}
$$

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathsf{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathsf{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathsf{FO}} & & \equiv_{\mathsf{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathsf{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$,

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$, причем ультрафильтр U (над $\mathbb{N}$) взять счетно неполным,

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$, причем ультрафильтр U (над $\mathbb{N}$) взять счетно неполным, то есть $\exists X_0, X_1, \ldots \in U$ такие что $\bigcap_{i \geqslant 0} X_i \notin U$. (Над $\mathbb{N}$ достаточно неглавный.)

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$, причем ультрафильтр U (над $\mathbb{N}$) взять счетно неполным, то есть $\exists X_0, X_1, \ldots \in U$ такие что $\bigcap_{i \geqslant 0} X_i \notin U$. (Над $\mathbb{N}$ достаточно неглавный.) Тогда получатся модально насыщенные модели Крипке M^U и N^U.

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$, причем ультрафильтр U (над $\mathbb{N}$) взять счетно неполным, то есть $\exists X_0, X_1, \ldots \in U$ такие что $\bigcap_{i \geqslant 0} X_i \notin U$. (Над $\mathbb{N}$ достаточно неглавный.)
Тогда получатся модально насыщенные модели Крипке M^U и N^U.
А на таких моделях $\simeq$ совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$. $\triangleleft$

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathsf{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathsf{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathsf{FO}} & & \equiv_{\mathsf{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathsf{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$, причем ультрафильтр U (над $\mathbb{N}$) взять счетно неполным, то есть $\exists X_0, X_1, \ldots \in U$ такие что $\bigcap_{i \geqslant 0} X_i \notin U$. (Над $\mathbb{N}$ достаточно неглавный.) Тогда получатся модально насыщенные модели Крипке M^U и N^U. А на таких моделях $\simeq$ совпадает с $\equiv_{\mathsf{ML}}$. ◁

Другие способы построения из M модально насыщенной модели M':

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathsf{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathsf{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathsf{FO}} & & \equiv_{\mathsf{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathsf{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$, причем ультрафильтр U (над $\mathbb{N}$) взять счетно неполным, то есть $\exists X_0, X_1, \ldots \in U$ такие что $\bigcap_{i \geqslant 0} X_i \notin U$. (Над $\mathbb{N}$ достаточно неглавный.) Тогда получатся модально насыщенные модели Крипке M^U и N^U. А на таких моделях $\simeq$ совпадает с $\equiv_{\mathsf{ML}}$. ◁

Другие способы построения из M модально насыщенной модели M':

- взять ультра-расширение $M^{\mathfrak{ue}}$,

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M, a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N, b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M', a') \simeq (N', b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M', a') & \simeq & (N', b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M, a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N, b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$, причем ультрафильтр U (над $\mathbb{N}$) взять счетно неполным, то есть $\exists X_0, X_1, \ldots \in U$ такие что $\bigcap_{i \geqslant 0} X_i \notin U$. (Над $\mathbb{N}$ достаточно неглавный.) Тогда получатся модально насыщенные модели Крипке M^U и N^U. А на таких моделях $\simeq$ совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$. ◁

Другие способы построения из M модально насыщенной модели M':

- взять ультра-расширение $M^{\mathfrak{ue}}$,
- взять каноническую модель M_T теории $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M)$.

Лемма о манёвре (Detour Lemma)

Всякие две модально эквивалентные отм. модели $(M,a) \equiv_{\mathrm{ML}} (N,b)$ элементарно эквивалентны ($\equiv_{\mathrm{FO}}$) (а значит и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) некоторым бисимулирующим отм. моделям $(M',a') \simeq (N',b')$:

$$\begin{array}{ccc} (M',a') & \simeq & (N',b') \\ \equiv_{\mathrm{FO}} & & \equiv_{\mathrm{FO}} \\ (M,a) & \equiv_{\mathrm{ML}} & (N,b) \end{array}$$

Доказательство. Надо взять ультрастепень $M' := M^U$ и $N' := N^U$, причем ультрафильтр U (над $\mathbb{N}$) взять счетно неполным, то есть $\exists X_0, X_1, \ldots \in U$ такие что $\bigcap_{i \geqslant 0} X_i \notin U$. (Над $\mathbb{N}$ достаточно неглавный.)
Тогда получатся модально насыщенные модели Крипке M^U и N^U.
А на таких моделях $\simeq$ совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$. ◁

Другие способы построения из M модально насыщенной модели M':

- взять ультра-расширение $M^{\mathfrak{ue}}$,
- взять каноническую модель M_T теории $T = \mathrm{Theory}_{\mathrm{ML}}(M)$.

Но в этих случаях нет гарантии, что $M \equiv_{\mathrm{FO}} M'$.

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$.

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность. Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность. Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$. Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n}A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)
  – класс всех конечных моделей: теорема Розена (1997)

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)
  – класс всех конечных моделей: теорема Розена (1997)
  Нет компактности!

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)
  – класс всех конечных моделей: теорема Розена (1997)
  Нет компактности! Другой инструмент: игры Эренфойхта

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n}A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)
  – класс всех конечных моделей: теорема Розена (1997)
  Нет компактности! Другой инструмент: игры Эренфойхта
  – конечные рефлексивные модели — верно (Мартин Отто)

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)
  – класс всех конечных моделей: теорема Розена (1997)
  Нет компактности! Другой инструмент: игры Эренфойхта
  – конечные рефлексивные модели — верно (Мартин Отто)
  – конечные транзитивные модели — неверно (М. Отто)

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)
  – класс всех конечных моделей: теорема Розена (1997)
  Нет компактности! Другой инструмент: игры Эренфойхта
  – конечные рефлексивные модели — верно (Мартин Отто)
  – конечные транзитивные модели — неверно (М. Отто)
- Для замкнутых формул первого порядка:
  Замкнутая формула первого порядка β эквивалентна переводу модальной формулы A, то есть $\forall x\, A^*(x) \iff$

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность. Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)
  – класс всех конечных моделей: теорема Розена (1997)
  Нет компактности! Другой инструмент: игры Эренфойхта
  – конечные рефлексивные модели — верно (Мартин Отто)
  – конечные транзитивные модели — неверно (М. Отто)
- Для замкнутых формул первого порядка:
  Замкнутая формула первого порядка β эквивалентна переводу модальной формулы A, то есть $\forall x\, A^*(x) \iff \beta$ сохраняется при взятии несвязных сумм моделей и взятии образов относительно сюръективных бисимуляций (de Rijke, Sturm, 2001)

Где еще работает Теорема ван Бентема (1976)

- Полимодальный язык: $\Box_1, \Box_2, \ldots$
- Темпоральный язык: $\Box$ и $\boxminus$. Универсальная модальность.
  Градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n} A$.
  Надо каждый раз менять понятие бисимуляции!
- Сужение класса моделей (слева и справа в форм. теоремы):
  – любой элементарный класс моделей $\mathbb{M}$ — верно (несложно)
  – класс всех конечных моделей: теорема Розена (1997)
  Нет компактности! Другой инструмент: игры Эренфойхта
  – конечные рефлексивные модели — верно (Мартин Отто)
  – конечные транзитивные модели — неверно (М. Отто)
- Для замкнутых формул первого порядка:
  Замкнутая формула первого порядка β эквивалентна переводу модальной формулы A, то есть $\forall x\, A^*(x) \iff \beta$ сохраняется при взятии несвязных сумм моделей и взятии образов относительно сюръективных бисимуляций (de Rijke, Sturm, 2001)
- Для формул 1 порядка $\alpha(x_1, \ldots, x_k)$ с несколькими переменными.