Модальная логика. Лекция 8: Полимодальная логика и теорема Макинсона

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

24 апреля 2020 года

Полимодальная логика

Строим формулы из переменных, связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ и $\Box_1, \ldots, \Box_n$.

Полимодальная логика

Строим формулы из переменных, связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ и $\Box_1, \ldots, \Box_n$.
Вместо $I = \{1, \ldots, n\}$ можно рассматривать любое множество.

Полимодальная логика

Строим формулы из переменных, связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ и $\Box_1, \ldots, \Box_n$. Вместо $I = \{1, \ldots, n\}$ можно рассматривать любое множество.

Определение

Нормальная полимодальная логика — *это любое множество формул* $L \subseteq \mathrm{Fm}$, *содержащее аксиому дистрибутивности для каждого* $i \in I$

$$\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q),$$

и замкнутое относительно MP, Sub, Nec_i: $\dfrac{A}{\Box_i A}$ *для всех* $i \in I$.

Полимодальная логика

Строим формулы из переменных, связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ и $\Box_1, \ldots, \Box_n$.
Вместо $I = \{1, \ldots, n\}$ можно рассматривать любое множество.

Определение

Нормальная полимодальная логика — это любое множество формул $L \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее аксиому дистрибутивности для каждого $i \in I$

$$\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q),$$

и замкнутое относительно MP, Sub, Nec_i: $\dfrac{A}{\Box_i A}$ *для всех* $i \in I$.

Логика непротиворечива, если $L \neq \mathrm{Fm}$. Иначе говоря: $\bot \notin L$.

Полимодальная логика

Строим формулы из переменных, связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ и $\Box_1, \ldots, \Box_n$.
Вместо $I = \{1, \ldots, n\}$ можно рассматривать любое множество.

Определение

Нормальная полимодальная логика — это любое множество формул $L \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее аксиому дистрибутивности для каждого $i \in I$

$$\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q),$$

и замкнутое относительно MP, Sub, Nec_i: $\dfrac{A}{\Box_i A}$ для всех $i \in I$.

Логика непротиворечива, если $L \neq \mathrm{Fm}$. Иначе говоря: $\bot \notin L$.

Семантика. Шкала Крипке $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, где $R_i \subseteq W \times W$.
Модель Крипке $M = (F, V)$.

Полимодальная логика

Строим формулы из переменных, связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ и $\Box_1, \dots, \Box_n$.
Вместо $I = \{1, \dots, n\}$ можно рассматривать любое множество.

Определение

Нормальная полимодальная логика — это любое множество формул $L \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее аксиому дистрибутивности для каждого $i \in I$

$$\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q),$$

и замкнутое относительно MP, Sub, Nec_i: $\dfrac{A}{\Box_i A}$ *для всех* $i \in I$.

Логика непротиворечива, если $L \neq \mathrm{Fm}$. Иначе говоря: $\bot \notin L$.

Семантика. Шкала Крипке $F = (W, R_1, \dots, R_n)$, где $R_i \subseteq W \times W$.
Модель Крипке $M = (F, V)$. $\quad \mathrm{Logic}(F) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid F \models A\}$.

Полимодальная логика

Строим формулы из переменных, связок $\neg, \wedge, \vee, \to$ и $\Box_1, \ldots, \Box_n$.
Вместо $I = \{1, \ldots, n\}$ можно рассматривать любое множество.

Определение

Нормальная полимодальная логика — это любое множество формул $L \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее аксиому дистрибутивности для каждого $i \in I$

$$\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q),$$

и замкнутое относительно MP, Sub, Nec_i: $\dfrac{A}{\Box_i A}$ *для всех $i \in I$.*

Логика непротиворечива, если $L \neq \mathrm{Fm}$. Иначе говоря: $\bot \notin L$.

Семантика. Шкала Крипке $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, где $R_i \subseteq W \times W$.
Модель Крипке $M = (F, V)$. $\quad \mathrm{Logic}(F) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid F \models A\}$.

$\mathrm{Logic}(F)$ — нормальная полимодальная логика (непротиворечивая).

Теорема Макинсона

$F_\circ$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема Макинсона

$F_\circ$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Теорема Макинсона

$F_\circ$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Теорема (Макинсон, 1966)

Всякая непротиворечивая одномодальная нормальная логика L содержится в **Triv** *или в* **Ver**.

Теорема Макинсона

$F_\circ$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) \;=\; \mathbf{Triv} \;=\; \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) \;=\; \mathbf{Ver} \;=\; \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) \;=\; \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Теорема (Макинсон, 1966)

Всякая непротиворечивая одномодальная нормальная логика L содержится в **Triv** *или в* **Ver**.

Мы покажем, что уже для бимодального случая это неверно.

Теорема Макинсона

$F_\circ$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Теорема (Макинсон, 1966)

Всякая непротиворечивая одномодальная нормальная логика L содержится в **Triv** *или в* **Ver**.

Мы покажем, что уже для бимодального случая это неверно.

Не существует конечного (и даже бесконечного) семейства конечных (и даже бесконечных) бимодальных шкал $(F_j)_{i\in J}$, такого что всякая непротиворечивая нормальная логика L содержится в логике некоторой из шкал F_j.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная одномодальная логика L общезначима на некоторой шкале F

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная одномодальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной,

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная одномодальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, одноточечной).

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная одномодальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, одноточечной).

(!) Существует непротиворечивая нормальная полимодальная логика, не общезначимая ни на какой шкале, даже бесконечной!

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная одномодальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, одноточечной).

(!) Существует непротиворечивая нормальная полимодальная логика, не общезначимая ни на какой шкале, даже бесконечной!

Следствие 2

Всякая непр. нормальная одномодальная логика L содержится в некоторой непр. полной по Крипке логике L'.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная одномодальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, одноточечной).

(!) Существует непротиворечивая нормальная полимодальная логика, не общезначимая ни на какой шкале, даже бесконечной!

Следствие 2

Всякая непр. нормальная одномодальная логика L содержится в некоторой непр. полной по Крипке логике L'. $L' = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная одномодальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, одноточечной).

(!) Существует непротиворечивая нормальная полимодальная логика, не общезначимая ни на какой шкале, даже бесконечной!

Следствие 2

Всякая непр. нормальная одномодальная логика L содержится в некоторой непр. полной по Крипке логике L'. $\quad L' = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.

Определение

Логика L называется полной по Крипке, если для каждой формулы A

$$L \vdash A \iff L \models_{\mathrm{Frames}} A.$$

Здесь: $L \models_{Frames} A$ означает: $\forall F\ (F \models L \;\Rightarrow\; F \models A)$.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная одномодальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, одноточечной).

(!) Существует непротиворечивая нормальная полимодальная логика, не общезначимая ни на какой шкале, даже бесконечной!

Следствие 2

Всякая непр. нормальная одномодальная логика L содержится в некоторой непр. полной по Крипке логике L'. $\quad L' = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.

Определение

Логика L называется полной по Крипке, если для каждой формулы A

$$L \vdash A \quad \Longleftrightarrow \quad L \models_{\mathrm{Frames}} A.$$

Здесь: $L \models_{Frames} A$ означает: $\forall F\ (F \models L \ \Rightarrow\ F \models A)$.
Эквивалетное определение: Логика L называется полной по Крипке, если $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторого непустого класса шкал $\mathbb{F}$.

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двойственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$).

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двойственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$).
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$ — временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$ — временны́е аксиомы

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двойственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$).
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$ — временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$ — временны́е аксиомы

$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$ — аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двойственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$).
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$	— временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$	— временны́е аксиомы
$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$	— аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$
$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	— аксиома МакКинси (не Чёрч-Россер!).

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двойственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$).
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$	— временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$	— временны́е аксиомы
$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$	— аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$
$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	— аксиома МакКинси (не Чёрч-Россер!).

Лемма 1

Пусть $F = (W, R_1, R_2)$. Тогда $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R_1^{-1} \subseteq R_2$.

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двойственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$).
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$	— временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$	— временны́е аксиомы
$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$	— аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$
$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	— аксиома МакКинси (не Чёрч-Россер!).

Лемма 1

Пусть $F = (W, R_1, R_2)$. Тогда $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R_1^{-1} \subseteq R_2$.

Лемма 1'

Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда $F \models$ первые две аксиомы $\iff S = R^{-1}$.

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двоственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$)
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$	— временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$	— временны́е аксиомы
$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$	— аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$
$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	— аксиома МакКинси.

Лемма 2

Пусть $F = (W, R)$. Тогда $F \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p \iff$ отношение R транзитивно и не имеет бесконечно возрастающих цепей (из необязательно попарно различных точек):

$$\neg\exists x_0, x_1, \ldots \in W\colon\; x_0\, R\, x_1\, R\, x_2\, R\, \ldots$$

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двоственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$)
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$	— временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$	— временны́е аксиомы
$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$	— аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$
$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	— аксиома МакКинси.

Лемма 2

Пусть $F = (W, R)$. Тогда $F \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p \iff$ отношение R транзитивно и не имеет бесконечно возрастающих цепей (из необязательно попарно различных точек):

$$\neg\exists x_0, x_1, \ldots \in W\colon\ x_0\, R\, x_1\, R\, x_2\, R\, \ldots$$

В частности, всякая такая шкала F иррефлексивна.

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двоственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$)
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$ — временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$ — временны́е аксиомы
$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$ — аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$
$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ — аксиома МакКинси.

Лемма 3

Пусть $F = (W, R)$. Тогда $F \models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \iff$

$$\forall P \subseteq W \ \ \forall x \in W \ \ \exists y \in R(x)\colon \ \ R(y) \subseteq P \text{ или } R(y) \subseteq \overline{P}.$$

Контрпример: логика Томасона (1972)

Логика будет с двумя модальностями: $\Box$ и $\boxminus$ (двоственные: $\Diamond$ и $\diamondminus$)
Логика Томасона L — расширяет минимальную нормальную бимодальную логику $\mathbf{K}_2$ следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$ — временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$ — временны́е аксиомы
$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$ — аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$
$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ — аксиома МакКинси.

Лемма 3

Пусть $F = (W, R)$. Тогда $F \models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \iff$

$$\forall P \subseteq W \;\; \forall x \in W \;\; \exists y \in R(x)\colon \;\; R(y) \subseteq P \text{ или } R(y) \subseteq \overline{P}.$$

Для транзитивных шкал F получится условие 1 порядка: над каждой точкой найдется R-максимальная точка:

$$\forall x \in W \;\; \exists y \in W\colon (\, x \, R \, y \;\&\; \forall z \,(y \, R \, z \Rightarrow z = y)\,).$$

Непротиворечивость, но неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Непротиворечивость, но неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.
Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.
Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.
Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.
Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.
  Больше ничего от аксиомы Лёба нам не потребуется!!

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.
Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.
  Больше ничего от аксиомы Лёба нам не потребуется!!
- Значит, R тоже транзитивно и иррефлексивно.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.

Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.
  Больше ничего от аксиомы Лёба нам не потребуется!!
- Значит, R тоже транзитивно и иррефлексивно.
- Можем обозначать $F = (W, <, >)$.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.

Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.
  Больше ничего от аксиомы Лёба нам не потребуется!!
- Значит, R тоже транзитивно и иррефлексивно.
- Можем обозначать $F = (W, <, >)$.
- Аксиома МакКинси $\Rightarrow$ шкала $(W, <)$ сериальна! Нет макс. эл-та.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.

Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.
  Больше ничего от аксиомы Лёба нам не потребуется!!
- Значит, R тоже транзитивно и иррефлексивно.
- Можем обозначать $F = (W, <, >)$.
- Аксиома МакКинси $\Rightarrow$ шкала $(W, <)$ сериальна! Нет макс. эл-та.
  Перепишем эту аксиому: $\Diamond\Box\neg p \vee \Diamond\Box p$.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.

Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.
  Больше ничего от аксиомы Лёба нам не потребуется!!
- Значит, R тоже транзитивно и иррефлексивно.
- Можем обозначать $F = (W, <, >)$.
- Аксиома МакКинси $\Rightarrow$ шкала $(W, <)$ сериальна! Нет макс. эл-та.
  Перепишем эту аксиому: $\Diamond\Box\neg p \vee \Diamond\Box p$. Еще перепишем:
  $\Diamond(\Box p \vee \Box\neg p)$.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.
Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.
  Больше ничего от аксиомы Лёба нам не потребуется!!
- Значит, R тоже транзитивно и иррефлексивно.
- Можем обозначать $F = (W, <, >)$.
- Аксиома МакКинси $\Rightarrow$ шкала $(W, <)$ сериальна! Нет макс. эл-та.
  Перепишем эту аксиому: $\Diamond\Box\neg p \vee \Diamond\Box p$. Еще перепишем:
  $\Diamond(\Box p \vee \Box\neg p)$.
  Но $\mathbf{K} \vdash \Diamond A \to \Diamond\top$.

Неполнота логики Томасона

Теорема 1

Логика L не общезначима ни на какой шкале.

Доказательство.

Допустим $F = (W, R, S)$ и $F \models L$. Что можно сказать про F?

- $S = R^{-1}$.
- Аксиома Лёба $\Rightarrow$ S транзитивно и иррефлексивно.
  Больше ничего от аксиомы Лёба нам не потребуется!!
- Значит, R тоже транзитивно и иррефлексивно.
- Можем обозначать $F = (W, <, >)$.
- Аксиома МакКинси $\Rightarrow$ шкала $(W, <)$ сериальна! Нет макс. эл-та.
  Перепишем эту аксиому: $\Diamond\Box\neg p \vee \Diamond\Box p$. Еще перепишем:
  $\Diamond(\Box p \vee \Box\neg p)$.
  Но $\mathbf{K} \vdash \Diamond A \to \Diamond\top$. Значит, $F \models \Diamond\top$.

Неполнота логики Томасона

Лемма

Пусть $(W, <)$ *— иррефлексивная транзитивная шкала без максимального элемента (то есть сериальная).*

Неполнота логики Томасона

Лемма

Пусть $(W, <)$ *— иррефлексивная транзитивная шкала без максимального элемента (то есть сериальная).*
Тогда ее можно разбить на два подмножества: $W = P \cup Q$, $P \cap Q = \varnothing$, *такие что* P *конфинален в* W*:*

$$\forall x \in W \;\; \exists y \in P\colon \; x\, R\, y$$

и Q *конфинален в* W*.*

Неполнота логики Томасона

Лемма

Пусть $(W, <)$ — иррефлексивная транзитивная шкала без максимального элемента (то есть сериальная).
Тогда ее можно разбить на два подмножества: $W = P \cup Q$, $P \cap Q = \varnothing$, такие что P конфинален в W:

$$\forall x \in W \ \ \exists y \in P\colon \ x\,R\,y$$

и Q конфинален в W.

Нужна аксиома выбора (лемма Цорна).

Неполнота логики Томасона

Лемма

Пусть $(W, <)$ — иррефлексивная транзитивная шкала без максимального элемента (то есть сериальная).
*Тогда ее можно разбить на два подмножества: $W = P \cup Q$, $P \cap Q = \varnothing$, такие что P **конфинален** в W:*

$$\forall x \in W \quad \exists y \in P\colon \; x\, R\, y$$

и Q конфинален в W.

Нужна аксиома выбора (лемма Цорна).

Продолжаем док-во теоремы. Покажем, что $F \not\models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$.
Возьмем $P \subseteq W$ из леммы и положим $V(p) = P$.

Неполнота логики Томасона

Лемма

Пусть $(W, <)$ *— иррефлексивная транзитивная шкала без максимального элемента (то есть сериальная).*
Тогда ее можно разбить на два подмножества: $W = P \cup Q$, $P \cap Q = \varnothing$, *такие что* P *конфинален в* W*:*

$$\forall x \in W \;\; \exists y \in P\colon \; x\,R\,y$$

и Q *конфинален в* W*.*

Нужна аксиома выбора (лемма Цорна).

Продолжаем док-во теоремы. Покажем, что $F \not\models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$.
Возьмем $P \subseteq W$ из леммы и положим $V(p) = P$.
Тогда аксиома МакКинси опровергается в F (в любой точке).

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.

Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.

Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.

Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$.

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.

Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.

Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$. Модель: $M = (F, V)$, где $V(p_i) = \varnothing$.

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.
Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.
Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$. Модель: $M = (F, V)$, где $V(p_i) = \varnothing$.

Утв. *Оценка каждой формулы* $V(A)$ *либо конечна, либо коконечна.*

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.

Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.
Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$. Модель: $M = (F, V)$, где $V(p_i) = \varnothing$.

Утв. *Оценка каждой формулы $V(A)$ либо конечна, либо коконечна.*

Докажем, что $M \models \Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$. (Этого достаточно для $M \models L$.)

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.
Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.
Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$. Модель: $M = (F, V)$, где $V(p_i) = \varnothing$.

Утв. *Оценка каждой формулы $V(A)$ либо конечна, либо коконечна.*

Докажем, что $M \models \Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$. (Этого достаточно для $M \models L$.)
Берем любой $x \in \mathbb{N}$. Пусть $M, x \models \Box\Diamond A$.

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.

Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.
Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$. Модель: $M = (F, V)$, где $V(p_i) = \varnothing$.

Утв. *Оценка каждой формулы $V(A)$ либо конечна, либо коконечна.*

Докажем, что $M \models \Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$. (Этого достаточно для $M \models L$.)
Берем любой $x \in \mathbb{N}$. Пусть $M, x \models \Box\Diamond A$.
Тогда A истинна в бесконечном числе точек.

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.
Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.
Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$. Модель: $M = (F, V)$, где $V(p_i) = \varnothing$.

Утв. *Оценка каждой формулы $V(A)$ либо конечна, либо коконечна.*

Докажем, что $M \models \Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$. (Этого достаточно для $M \models L$.)
Берем любой $x \in \mathbb{N}$. Пусть $M, x \models \Box\Diamond A$.
Тогда A истинна в бесконечном числе точек.
Тогда $V(A)$ коконечно.

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.

Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.
Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$. Модель: $M = (F, V)$, где $V(p_i) = \varnothing$.

Утв. *Оценка каждой формулы $V(A)$ либо конечна, либо коконечна.*

Докажем, что $M \models \Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$. (Этого достаточно для $M \models L$.)
Берем любой $x \in \mathbb{N}$. Пусть $M, x \models \Box\Diamond A$.
Тогда A истинна в бесконечном числе точек.
Тогда $V(A)$ коконечно.
Значит, A истинна, начиная с некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$.

Непротиворечивость логики Томасона

Теорема 2

Логика L непротиворечива.

Доказательство.
Мы построим модель Крипке M, такую что $M \models L$.
Шкала: $F = (\mathbb{N}, <, >)$. Модель: $M = (F, V)$, где $V(p_i) = \varnothing$.

Утв. *Оценка каждой формулы $V(A)$ либо конечна, либо коконечна.*

Докажем, что $M \models \Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$. (Этого достаточно для $M \models L$.)
Берем любой $x \in \mathbb{N}$. Пусть $M, x \models \Box\Diamond A$.
Тогда A истинна в бесконечном числе точек.
Тогда $V(A)$ коконечно.
Значит, A истинна, начиная с некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$.
Тогда $M, x \models \Diamond\Box A$.
Q.E.D.

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция.

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*
- Порожденные подшкалы, p-морфизм, несвязная сумма шкал.

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*
- Порожденные подшкалы, p-морфизм, несвязная сумма шкал. **Теорема Гольдблатта-Томасона**: *класс шкал определим в модальном языке* $\Leftrightarrow$ *он замкнут относительно порожденных подшкал, p-морфизмов, несвязных сумм, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений.*

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*
- Порожденные подшкалы, p-морфизм, несвязная сумма шкал. **Теорема Гольдблатта-Томасона**: *класс шкал определим в модальном языке* $\Leftrightarrow$ *он замкнут относительно порожденных подшкал, p-морфизмов, несвязных сумм, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений.*
- Корректность и полнота логики $\mathbf{K}_n$

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*
- Порожденные подшкалы, p-морфизм, несвязная сумма шкал. **Теорема Гольдблатта-Томасона**: *класс шкал определим в модальном языке* $\Leftrightarrow$ *он замкнут относительно порожденных подшкал, p-морфизмов, несвязных сумм, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений.*
- Корректность и полнота логики $\mathbf{K}_n$
- Каноническая модель. Канонические формулы. $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^k\Diamond^\ell p$.

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*
- Порожденные подшкалы, p-морфизм, несвязная сумма шкал. **Теорема Гольдблатта-Томасона**: *класс шкал определим в модальном языке* $\Leftrightarrow$ *он замкнут относительно порожденных подшкал, p-морфизмов, несвязных сумм, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений.*
- Корректность и полнота логики $\mathbf{K}_n$
- Каноническая модель. Канонические формулы. $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^k\Diamond^\ell p$.
- Модальные формулы Салквиста: они выражают 1-порядковые свойства шкал, а задаваемые ими логики — каноничны (и полны)

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*
- Порожденные подшкалы, p-морфизм, несвязная сумма шкал. **Теорема Гольдблатта-Томасона**: *класс шкал определим в модальном языке* $\Leftrightarrow$ *он замкнут относительно порожденных подшкал, p-морфизмов, несвязных сумм, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений.*
- Корректность и полнота логики $\mathbf{K}_n$
- Каноническая модель. Канонические формулы. $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^k \Diamond^\ell p$.
- Модальные формулы Салквиста: они выражают 1-порядковые свойства шкал, а задаваемые ими логики — каноничны (и полны)
- Фильтрация.

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*
- Порожденные подшкалы, p-морфизм, несвязная сумма шкал. **Теорема Гольдблатта-Томасона**: *класс шкал определим в модальном языке* $\Leftrightarrow$ *он замкнут относительно порожденных подшкал, p-морфизмов, несвязных сумм, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений.*
- Корректность и полнота логики $\mathbf{K}_n$
- Каноническая модель. Канонические формулы. $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^k\Diamond^\ell p$.
- Модальные формулы Салквиста: они выражают 1-порядковые свойства шкал, а задаваемые ими логики — каноничны (и полны)
- Фильтрация. Разрешимость полимодальных логик с привычными аксиомами (типа **S5**-аксиом)

Что всё-таки переносится на полимодальные логики?

- Бисимуляция. **Теорема ван Бентема**: *(поли)модальный язык есть в точности тот фрагмент языка первого порядка, который инвариантен относительно бисимуляций.*
- Порожденные подшкалы, p-морфизм, несвязная сумма шкал. **Теорема Гольдблатта-Томасона**: *класс шкал определим в модальном языке* $\Leftrightarrow$ *он замкнут относительно порожденных подшкал, p-морфизмов, несвязных сумм, а его дополнение замкнуто относительно ультра-расширений.*
- Корректность и полнота логики $\mathbf{K}_n$
- Каноническая модель. Канонические формулы. $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^k\Diamond^\ell p$.
- Модальные формулы Салквиста: они выражают 1-порядковые свойства шкал, а задаваемые ими логики — каноничны (и полны)
- Фильтрация. Разрешимость полимодальных логик с привычными аксиомами (типа **S5**-аксиом)
- Конечные шкалы / табличные логики: логика $\mathrm{Logic}(F)$ для конечной шкалы $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$ конечно аксиоматизируема.