Модальная логика. Лекция 6: Характеристическая формула конечного (транзитивного) конуса

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

10 апреля 2020 года

Характеристическая формула: «переменные-точки»

Конечная шкала Крипке $F = (W, R)$, порожденная точкой a_0.
Здесь $W = \{a_0, \ldots, a_n\}$. Тем самым F — конечный конус.

Конечная шкала Крипке $F = (W, R)$, порожденная точкой a_0.
Здесь $W = \{a_0, \ldots, a_n\}$. Тем самым F — конечный конус.

Два способа строить характеристическую формулу конуса F

Характеристическая формула: «переменные-точки»

Конечная шкала Крипке $F = (W, R)$, порожденная точкой a_0.
Здесь $W = \{a_0, \dots, a_n\}$. Тем самым F — конечный конус.

Два способа строить характеристическую формулу конуса F

Способ 1.
«Переменные по точкам»: $\{q_a \mid a \in W\}$ или мы писали $\{q_0, \dots, q_n\}$.

Конечная шкала Крипке $F = (W, R)$, порожденная точкой a_0. Здесь $W = \{a_0, \ldots, a_n\}$. Тем самым F — конечный конус.

Два способа строить характеристическую формулу конуса F

Способ 1.

«Переменные по точкам»: $\{q_a \mid a \in W\}$ или мы писали $\{q_0, \ldots, q_n\}$.
Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{point}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\left(\bigwedge \Gamma_F^{\mathrm{point}}\right) \;\longrightarrow\; \neg q_0$$

Характеристическая формула: «переменные-точки»

Конечная шкала Крипке $F = (W, R)$, порожденная точкой a_0.
Здесь $W = \{a_0, \ldots, a_n\}$. Тем самым F — конечный конус.

Два способа строить характеристическую формулу конуса F

Способ 1.

«Переменные по точкам»: $\{q_a \mid a \in W\}$ или мы писали $\{q_0, \ldots, q_n\}$.
Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{point}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\left(\bigwedge \Gamma_F^{\mathrm{point}}\right) \;\longrightarrow\; \neg q_0$$

Здесь $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ — конечное множество следующих формул:

- $q_0 \vee \ldots \vee q_n$;
- $\neg(q_i \wedge q_j)$ для всех $i \neq j$;
- $q_i \to \Diamond q_j$ для каждой пары точек $\langle a_i, a_j \rangle \in R$;
- $q_i \to \neg\Diamond q_j$ для каждой пары точек $\langle a_i, a_j \rangle \notin R$.

Основная теорема про хар. формулы

Теорема 1.

Пусть F — конечный конус, G — шкала конечной глубины $d = \mathrm{depth}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:

$$\begin{aligned}
&\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F,\\
&\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F,\\
&\textbf{(3)}\ G \not\models \chi^{d}_{\mathrm{point}}(F).
\end{aligned}$$

Основная теорема про хар. формулы

Теорема 1.

Пусть F — конечный конус, G — шкала конечной глубины $d = \mathrm{depth}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\ \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^d_{\mathrm{point}}(F). \end{array}$$

Эта теорема была доказана на предыдущей лекции.

Основная теорема про хар. формулы

Теорема 1.

Пусть F — конечный конус, G — шкала конечной глубины $d = \mathrm{depth}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{(1)} & G \rightarrowtail F, \\
\textbf{(2)} & G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\
\textbf{(3)} & G \not\models \chi^d_{\mathrm{point}}(F).
\end{array}
$$

Эта теорема была доказана на предыдущей лекции.

Условие «шкала $G = (U, S)$ имеет конечную глубину» означает: существует такое $d \geqslant 1$, что $S^*(x) = S^{\leqslant d}(x)$ для всякой точки $x \in U$.

Основная теорема про хар. формулы

Теорема 1.

Пусть F — конечный конус, G — шкала конечной глубины $d = \mathrm{depth}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\
\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\
\textbf{(3)}\ G \not\models \chi^{d}_{\mathrm{point}}(F).
\end{array}
$$

Эта теорема была доказана на предыдущей лекции.

Условие «шкала $G = (U, S)$ имеет конечную глубину» означает: существует такое $d \geqslant 1$, что $S^*(x) = S^{\leqslant d}(x)$ для всякой точки $x \in U$.

Например, если шкала G — транзитивная (даже бесконечная), то это условие выполнится автоматически, ибо ее глубина равна $d = 1$.

Способ 2.

Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.

Способ 2.

Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.
Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{set}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\bigl(\bigwedge \Gamma^{\mathrm{set}}_F\bigr) \;\longrightarrow\; \neg P_{\{a_0\}}$$

Способ 2.

Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.

Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{set}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\left(\bigwedge \Gamma^{\mathrm{set}}_F\right) \;\longrightarrow\; \neg P_{\{a_0\}}$$

Здесь Γ^{set}_F — конечное множество следующих формул:

- P_W

Способ 2.
Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.
Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{set}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\big(\bigwedge \Gamma^{\mathrm{set}}_F\big) \;\longrightarrow\; \neg P_{\{a_0\}}$$

Здесь Γ^{set}_F — конечное множество следующих формул:

- P_W
- $P_{\overline{X}} \;\leftrightarrow\; \neg P_X$ для всех $X \subseteq W$, где $\overline{X} = W \setminus X$;

Характ. формула: «переменные-подмножества»

<u>**Способ 2.**</u>

Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.
Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{set}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\big(\bigwedge \Gamma^{\mathrm{set}}_F\big) \;\longrightarrow\; \neg P_{\{a_0\}}$$

Здесь Γ^{set}_F — конечное множество следующих формул:

- P_W
- $P_{\overline{X}} \;\leftrightarrow\; \neg P_X$ для всех $X \subseteq W$, где $\overline{X} = W \setminus X$;
- $P_{X \cap Y} \;\leftrightarrow\; (P_X \wedge P_Y)$ для всех $X, Y \subseteq W$;

Характ. формула: «переменные-подмножества»

Способ 2.

Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.
Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\text{set}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\left(\bigwedge \Gamma^{\text{set}}_F\right) \;\longrightarrow\; \neg P_{\{a_0\}}$$

Здесь Γ^{set}_F — конечное множество следующих формул:

- P_W
- $P_{\overline{X}} \;\leftrightarrow\; \neg P_X$ для всех $X \subseteq W$, где $\overline{X} = W \setminus X$;
- $P_{X \cap Y} \;\leftrightarrow\; (P_X \wedge P_Y)$ для всех $X, Y \subseteq W$;
- аналогично можно для $\vee$, $\to$, но это лишнее;

Характ. формула: «переменные-подмножества»

Способ 2.

Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.

Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{set}}(F) \ = \ \Box^{\leqslant d}\big(\bigwedge \Gamma^{\mathrm{set}}_F\big) \ \longrightarrow \ \neg P_{\{a_0\}}$$

Здесь Γ^{set}_F — конечное множество следующих формул:

- P_W
- $P_{\overline{X}} \ \leftrightarrow \ \neg P_X$ для всех $X \subseteq W$, где $\overline{X} = W \setminus X$;
- $P_{X \cap Y} \ \leftrightarrow \ (P_X \wedge P_Y)$ для всех $X, Y \subseteq W$;
- аналогично можно для $\vee$, $\to$, но это лишнее;
- $P_{\Diamond X} \ \leftrightarrow \ \Diamond P_X$ для всех $X \subseteq W$.

Характ. формула: «переменные-подмножества»

Способ 2.

Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.
Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{set}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\big(\bigwedge \Gamma^{\mathrm{set}}_F\big) \;\longrightarrow\; \neg P_{\{a_0\}}$$

Здесь Γ^{set}_F — конечное множество следующих формул:

- P_W
- $P_{\overline{X}} \;\leftrightarrow\; \neg P_X$ для всех $X \subseteq W$, где $\overline{X} = W \setminus X$;
- $P_{X \cap Y} \;\leftrightarrow\; (P_X \wedge P_Y)$ для всех $X, Y \subseteq W$;
- аналогично можно для $\vee$, $\to$, но это лишнее;
- $P_{\Diamond X} \;\leftrightarrow\; \Diamond P_X$ для всех $X \subseteq W$.

Напоминание: $\Diamond X \;=\; R^{-1}(X) \;=\; \{a \in W \mid \exists b\colon a\,R\,b \;\&\; b \in X\}$.

Характ. формула: «переменные-подмножества»

Способ 2.

Вводим «переменные по подмножествам»: P_X для каждого $X \subseteq W$.
Характеристическая формула глубины d конечного конуса F:

$$\chi^d_{\mathrm{set}}(F) \;=\; \Box^{\leqslant d}\big(\bigwedge \Gamma^{\mathrm{set}}_F\big) \;\longrightarrow\; \neg P_{\{a_0\}}$$

Здесь Γ^{set}_F — конечное множество следующих формул:

- P_W
- $P_{\overline{X}} \;\leftrightarrow\; \neg P_X$ для всех $X \subseteq W$, где $\overline{X} = W \setminus X$;
- $P_{X\cap Y} \;\leftrightarrow\; (P_X \wedge P_Y)$ для всех $X, Y \subseteq W$;
- аналогично можно для $\vee$, $\to$, но это лишнее;
- $P_{\Diamond X} \;\leftrightarrow\; \Diamond P_X$ для всех $X \subseteq W$.

Напоминание: $\Diamond X \;=\; R^{-1}(X) \;=\; \{a \in W \mid \exists b\colon a\,R\,b \;\&\; b \in X\}$.
Факт. $V(\Diamond A) = \Diamond V(A)$ для всякой формулы A.
Здесь $V(A) = \{x \in W \mid M, x \models A\}$.

Основная теорема про хар. формулы

Теорема 1'.

Пусть F — конечный конус, G — шкала конечной глубины $d = \mathrm{depth}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F,\\
&\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F,\\
&\textbf{(3)}\ G \not\models \chi^{d}_{\mathrm{set}}(F).
\end{aligned}
$$

Теорема 1'.

Пусть F — конечный конус, G — шкала конечной глубины $d = \mathrm{depth}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F,\\
&\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F,\\
&\textbf{(3)}\ G \not\models \chi^{d}_{\mathrm{set}}(F).
\end{aligned}
$$

Эту теорему можно доказать независимо от предыдущей.

Основная теорема про хар. формулы

Теорема 1'.

Пусть F — конечный конус, G — шкала конечной глубины $d = \mathrm{depth}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\ \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^d_{\mathrm{set}}(F). \end{array}$$

Эту теорему можно доказать независимо от предыдущей.

А можно установить взаимосвязь между $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ и Γ_F^{set}.

Взаимосвязь Γ_F^{point} и Γ_F^{set}

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Взаимосвязь Γ_F^{point} и Γ_F^{set}

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Лемма 2 (Из point получаем set).

Пусть построено Γ_F^{point}. Для каждого $X \subseteq W$ положим $P_X := \bigvee_{a \in W} q_a$.

Тогда из Γ_F^{point} (сильно) выводится Γ_F^{set} в логике $\mathbf{K}$:

$$\Gamma_F^{\text{point}} \vdash_{\mathbf{K}}^{*} \Gamma_F^{\text{set}}.$$

Взаимосвязь Γ_F^{point} и Γ_F^{set}

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Взаимосвязь Γ_F^{point} и Γ_F^{set}

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.

Взаимосвязь Γ_F^{point} и Γ_F^{set}

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$.

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ в ИВ:

$$\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\mathrm{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ в ИВ:

$$\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\mathrm{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

То есть $q_a \to \neg q_b$. То есть $\neg(q_a \wedge q_b)$.

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

То есть $q_a \to \neg q_b$. То есть $\neg(q_a \wedge q_b)$.

- Пусть $a\,R\,b$. Тогда $\{a\} \subseteq \Diamond\{b\}$.

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ в ИВ:

$$\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\mathrm{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

То есть $q_a \to \neg q_b$. То есть $\neg(q_a \wedge q_b)$.

- Пусть $a\,R\,b$. Тогда $\{a\} \subseteq \Diamond\{b\}$.

Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\Diamond\{b\}} \leftrightarrow \Diamond P_{\{b\}}$.

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ в ИВ:

$$\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\mathrm{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

То есть $q_a \to \neg q_b$. То есть $\neg(q_a \wedge q_b)$.

- Пусть $a\,R\,b$. Тогда $\{a\} \subseteq \Diamond\{b\}$.

Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\Diamond\{b\}} \leftrightarrow \Diamond P_{\{b\}}$. То есть $q_a \to \Diamond q_b$.

Взаимосвязь Γ_F^{point} и Γ_F^{set}

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

То есть $q_a \to \neg q_b$. То есть $\neg(q_a \wedge q_b)$.

- Пусть $a\,R\,b$. Тогда $\{a\} \subseteq \Diamond\{b\}$.

Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\Diamond\{b\}} \leftrightarrow \Diamond P_{\{b\}}$. То есть $q_a \to \Diamond q_b$.

- Пусть $\neg(a\,R\,b)$. Тогда $a \notin \Diamond\{b\}$,

Взаимосвязь $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ и Γ_F^{set}

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ в ИВ:

$$\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\mathrm{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\mathrm{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

То есть $q_a \to \neg q_b$. То есть $\neg(q_a \wedge q_b)$.

- Пусть $a\,R\,b$. Тогда $\{a\} \subseteq \Diamond\{b\}$.

Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\Diamond\{b\}} \leftrightarrow \Diamond P_{\{b\}}$. То есть $q_a \to \Diamond q_b$.

- Пусть $\neg(a\,R\,b)$. Тогда $a \notin \Diamond\{b\}$, то есть $\Diamond\{b\} \subseteq \overline{\{a\}}$.

Взаимосвязь Γ_F^{point} и Γ_F^{set}

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

То есть $q_a \to \neg q_b$. То есть $\neg(q_a \wedge q_b)$.

- Пусть $a\,R\,b$. Тогда $\{a\} \subseteq \Diamond\{b\}$.

Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\Diamond\{b\}} \leftrightarrow \Diamond P_{\{b\}}$. То есть $q_a \to \Diamond q_b$.

- Пусть $\neg(a\,R\,b)$. Тогда $a \notin \Diamond\{b\}$, то есть $\Diamond\{b\} \subseteq \overline{\{a\}}$.

Выводим: $\Diamond P_{\{b\}} \leftrightarrow P_{\Diamond\{b\}} \to P_{\overline{\{a\}}} \leftrightarrow \neg P_{\{a\}}$.

Лемма 1 (Из set получаем point).

Имеем Γ_F^{set}. Положим $q_i := P_{\{a_i\}}$. Тогда из Γ_F^{set} выводится Γ_F^{point} в ИВ:

$$\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} \Gamma_F^{\text{point}}$$

Наблюдение. $\Gamma_F^{\text{set}} \vdash_{\mathbf{CL}} P_X \to P_Y$ для всех $X \subseteq Y$.

Доказательство леммы 1.

- Из P_W получаем $q_0 \vee \ldots \vee q_n$.
- Пусть $a \neq b$. Тогда $\{a\} \subseteq \overline{\{b\}}$. Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\overline{\{b\}}}, \leftrightarrow \neg P_{\{b\}}$.

То есть $q_a \to \neg q_b$. То есть $\neg(q_a \wedge q_b)$.

- Пусть $a\,R\,b$. Тогда $\{a\} \subseteq \Diamond\{b\}$.

Выводим: $P_{\{a\}} \to P_{\Diamond\{b\}} \leftrightarrow \Diamond P_{\{b\}}$. То есть $q_a \to \Diamond q_b$.

- Пусть $\neg(a\,R\,b)$. Тогда $a \notin \Diamond\{b\}$, то есть $\Diamond\{b\} \subseteq \overline{\{a\}}$.

Выводим: $\Diamond P_{\{b\}} \leftrightarrow P_{\Diamond\{b\}} \to P_{\overline{\{a\}}} \leftrightarrow \neg P_{\{a\}}$. То есть $\Diamond q_b \to \neg q_a$.

Q.E.D.

От формул про точки к формулам про подмножества

Лемма 2 (Из point получаем set).

Пусть построено $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$. Для каждого $X \subseteq W$ положим $P_X := \bigvee\limits_{a \in W} q_a$.

Тогда из $\Gamma_F^{\mathrm{point}}$ (сильно) выводится Γ_F^{set} в логике $\mathbf{K}$:

$$\Gamma_F^{\mathrm{point}} \vdash_{\mathbf{K}}^{*} \Gamma_F^{\mathrm{set}}.$$

От формул про точки к формулам про подмножества

Лемма 2 (Из point получаем set).

Пусть построено Γ_F^{point}. Для каждого $X \subseteq W$ положим $P_X := \bigvee_{a \in W} q_a$.

Тогда из Γ_F^{point} (сильно) выводится Γ_F^{set} в логике $\mathbf{K}$:

$$\Gamma_F^{\text{point}} \vdash^*_{\mathbf{K}} \Gamma_F^{\text{set}}.$$

Самостоятельно. Нужны некоторые теоремы логики $\mathbf{K}$, в частности:

$$\mathbf{K} \vdash \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$$
$$\mathbf{K} \vdash \Diamond\bot \leftrightarrow \bot$$

Транзитивный случай: больше возможностей

Пусть теперь F — конечный транзитивный конус.
Напомним формулу транзитивности: $\Box p \to \Box\Box p$.

Транзитивный случай: больше возможностей

Пусть теперь F — конечный транзитивный конус.
Напомним формулу транзитивности: $\Box p \to \Box\Box p$.
На любой транзитивной шкале общезначимо $\Box^{\leqslant d} A \leftrightarrow A \wedge \Box A$

Транзитивный случай: больше возможностей

Пусть теперь F — конечный транзитивный конус.

Напомним формулу транзитивности: $\Box p \to \Box\Box p$.

На любой транзитивной шкале общезначимо $\Box^{\leqslant d} A \leftrightarrow A \wedge \Box A = \boxdot A$.

Транзитивный случай: больше возможностей

Пусть теперь F — конечный транзитивный конус.
Напомним формулу транзитивности: $\Box p \to \Box\Box p$.
На любой транзитивной шкале общезначимо $\Box^{\leqslant d} A \leftrightarrow A \wedge \Box A = \boxdot A$.
Значит, в характеристической формуле больше не нужен параметр d:

$$\chi_{\mathrm{set}}(F) = \boxdot\left(\bigwedge \Gamma_F^{\mathrm{set}}\right) \to \neg P_{\{a_0\}}$$

Транзитивный случай: больше возможностей

Пусть теперь F — конечный транзитивный конус.
Напомним формулу транзитивности: $\Box p \to \Box\Box p$.
На любой транзитивной шкале общезначимо $\Box^{\leqslant d} A \leftrightarrow A \wedge \Box A = \boxdot A$.
Значит, в характеристической формуле больше не нужен параметр d:

$$\chi_{\mathrm{set}}(F) = \boxdot\left(\bigwedge \Gamma_F^{\mathrm{set}}\right) \to \neg P_{\{a_0\}}$$

Теорема 1' для транзитивного случая:

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала.
Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{aligned} &\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ &\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\ &\textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F). \end{aligned}$$

Транзитивный случай: больше возможностей

Пусть теперь F — конечный транзитивный конус.
Напомним формулу транзитивности: $\Box p \to \Box\Box p$.
На любой транзитивной шкале общезначимо $\Box^{\leqslant d} A \leftrightarrow A \wedge \Box A = \boxdot A$.
Значит, в характеристической формуле больше не нужен параметр d:

$$\chi_{\mathrm{set}}(F) = \boxdot\left(\bigwedge \Gamma_F^{\mathrm{set}}\right) \to \neg P_{\{a_0\}}$$

Теорема 1' для транзитивного случая:

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала.
Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $G \twoheadrightarrow F$,
(2) $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$,
(3) $G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F)$.

В частности, $F \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F)$.

Транзитивный случай: больше возможностей

Пусть теперь F — конечный транзитивный конус.
Напомним формулу транзитивности: $\Box p \to \Box\Box p$.
На любой транзитивной шкале общезначимо $\Box^{\leqslant d} A \leftrightarrow A \wedge \Box A = \boxdot A$.
Значит, в характеристической формуле больше не нужен параметр d:

$$\chi_{\mathrm{set}}(F) = \boxdot\left(\bigwedge \Gamma_F^{\mathrm{set}}\right) \to \neg P_{\{a_0\}}$$

Теорема 1' для транзитивного случая:

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала.
Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{aligned} &\textbf{(1)}\ G \twoheadrightarrow F, \\ &\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\ &\textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F). \end{aligned}$$

В частности, $F \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F)$.
Оказывается, что $\chi_{\mathrm{set}}(F)$ — наислабейшая такая формула!

Теорема о расщеплении: для полных транз. логик

Теорема 1' для транзитивного случая (повтор):

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \\ \textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathsf{set}}(F). \end{array}$$

Теорема о расщеплении: для полных транз. логик

Теорема 1' для транзитивного случая (повтор):

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F,\\
&\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F,\\
&\textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F).
\end{aligned}
$$

Проанализируем эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Теорема о расщеплении: для полных транз. логик

Теорема 1' для транзитивного случая (повтор):

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\ \textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F). \end{array}$$

Проанализируем эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Обозначим $L = \mathrm{Logic}(G)$. Заметим, что $\mathbf{K4} \subseteq L$.

Теорема о расщеплении: для полных транз. логик

Теорема 1' для транзитивного случая (повтор):

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \\ \textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathsf{set}}(F). \end{array}$$

Проанализируем эквивалентность $(2) \Leftrightarrow (3)$.

Обозначим $L = \mathrm{Logic}(G)$. Заметим, что $\mathbf{K4} \subseteq L$.
(2) означает: $L = \mathrm{Logic}(G) \subseteq \mathrm{Logic}(F)$.

Теорема о расщеплении: для полных транз. логик

Теорема 1' для транзитивного случая (повтор):

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{aligned}
&\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F,\\
&\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F,\\
&\textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F).
\end{aligned}$$

Проанализируем эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Обозначим $L = \mathrm{Logic}(G)$. Заметим, что $\mathbf{K4} \subseteq L$.
(2) означает: $L = \mathrm{Logic}(G) \subseteq \mathrm{Logic}(F)$.
(3) означает: $\mathbf{K4} \oplus \chi_{\mathrm{set}}(F) \not\subseteq L$.

Теорема о расщеплении: для полных транз. логик

Теорема 1' для транзитивного случая (повтор):

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\ \textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F). \end{array}$$

Проанализируем эквивалентность $(2) \Leftrightarrow (3)$.

Обозначим $L = \mathrm{Logic}(G)$. Заметим, что $\mathbf{K4} \subseteq L$.
(2) означает: $L = \mathrm{Logic}(G) \subseteq \mathrm{Logic}(F)$.
(3) означает: $\mathbf{K4} \oplus \chi_{\mathrm{set}}(F) \not\subseteq L$.
Значит, можно переформулировать $(2) \Leftrightarrow (3)$ так:

Теорема о расщеплении: для полных транз. логик

Теорема 1' для транзитивного случая:

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\ \textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F). \end{array}$$

Теорема о расщеплении для полных транзитивных логик

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала, $L = \mathrm{Logic}(G)$. Тогда верно ровно одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi_{\mathrm{set}}(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Теорема о расщеплении: для полных транз. логик

Теорема 1' для транзитивного случая:

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$\begin{array}{l} \textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \\ \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \\ \textbf{(3)}\ G \not\models \chi_{\mathrm{set}}(F). \end{array}$$

Теорема о расщеплении для полных транзитивных логик

Пусть F — конечный транзитивный конус, G — транзитивная шкала, $L = \mathrm{Logic}(G)$. Тогда верно ровно одно из двух:

$$\text{либо}\quad \mathbf{K4} \oplus \chi_{\mathrm{set}}(F) \subseteq L, \qquad \text{либо}\quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Далее мы получим это для всех транзитивных (нормальных) логик L.

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Интуитивно: введем частичный порядок на формулах «A сильнее B»:

$$A \leqslant B, \quad \text{если} \quad \mathbf{K4} \oplus A \supseteq \mathbf{K4} \oplus B,$$

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Интуитивно: введем частичный порядок на формулах «A сильнее B»:

$$A \leqslant B, \quad \text{если} \quad \mathbf{K4} \oplus A \supseteq \mathbf{K4} \oplus B, \quad \text{то есть } \mathbf{K4} \oplus A \vdash B.$$

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Интуитивно: введем частичный порядок на формулах «A сильнее B»:

$$A \leqslant B, \quad \text{если} \quad \mathbf{K4} \oplus A \supseteq \mathbf{K4} \oplus B, \quad \text{то есть } \mathbf{K4} \oplus A \vdash B.$$

Теорема 2 говорит: если $F \not\models A$, то $A \leqslant \chi(F)$.

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Интуитивно: введем частичный порядок на формулах «A сильнее B»:

$$A \leqslant B, \quad \text{если} \quad \mathbf{K4} \oplus A \supseteq \mathbf{K4} \oplus B, \quad \text{то есть } \mathbf{K4} \oplus A \vdash B.$$

Теорема 2 говорит: если $F \not\models A$, то $A \leqslant \chi(F)$. То есть:

в множестве $\{A \mid F \not\models A\}$ есть наислабейшая формула: $\chi(F)$.

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Интуитивно: введем частичный порядок на формулах «A сильнее B»:

$$A \leqslant B, \quad \text{если} \quad \mathbf{K4} \oplus A \supseteq \mathbf{K4} \oplus B, \quad \text{то есть } \mathbf{K4} \oplus A \vdash B.$$

Теорема 2 говорит: если $F \not\models A$, то $A \leqslant \chi(F)$. То есть:

в множестве $\{A \mid F \not\models A\}$ есть наислабейшая формула: $\chi(F)$.

Почему слайд назван «Расщепление»? Переформулируем теорему:

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если}\quad F \not\models A,\quad \text{то}\quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Теорема 2' (расщепление для транзитивных конечно акс. логик)

Для любой транзитивной конечно аксиоматизируемой логики,

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Теорема 2' (расщепление для транзитивных конечно акс. логик)

Для любой транзитивной конечно аксиоматизируемой логики,
то есть для любой логики вида $L = \mathbf{K4} \oplus A$,

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Теорема 2' (расщепление для транзитивных конечно акс. логик)

Для любой транзитивной конечно аксиоматизируемой логики, то есть для любой логики вида $L = \mathbf{K4} \oplus A$, имеет место ровно одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Расщепление: для транз. конечно аксиом. логик

Всюду F — конечный транзитивный конус, $\chi(F)$ — его х.ф. (set).

Теорема 2.

(1) $F \not\models \chi(F)$.
(2) Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Теорема 2' (расщепление для транзитивных конечно акс. логик)

Для любой транзитивной конечно аксиоматизируемой логики,
то есть для любой логики вида $L = \mathbf{K4} \oplus A$,
имеет место ровно одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Замечание: для рефл. шкалы F такой: $\bigcirc \to \bigcirc$ слева будет $\mathbf{S5}$.

Док-во теоремы о расщеплении для кон. акс. логик

Теорема 2, пункт (2)

Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Доказательство.
Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_m)$. Имеем $F \not\models A$.

Теорема 2, пункт (2)

Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Доказательство.

Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_m)$. Имеем $F \not\models A$.

Значит, при некоторой оценке V в модели $M = (F, V)$ имеем $M \not\models A$.

Теорема 2, пункт (2)

Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Доказательство.

Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_m)$. Имеем $F \not\models A$.

Значит, при некоторой оценке V в модели $M = (F, V)$ имеем $M \not\models A$.

То есть A ложна в некоторой точке x.

Док-во теоремы о расщеплении для кон. акс. логик

Теорема 2, пункт (2)

Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Доказательство.

Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_m)$. Имеем $F \not\models A$.

Значит, при некоторой оценке V в модели $M = (F, V)$ имеем $M \not\models A$.

То есть A ложна в некоторой точке x.

Поскольку a_0 — корень и шкала транзитивна, то $a_0 = x$ или $a_0 \, R \, x$.

Док-во теоремы о расщеплении для кон. акс. логик

Теорема 2, пункт (2)

Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Доказательство.

Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_m)$. Имеем $F \not\models A$.
Значит, при некоторой оценке V в модели $M = (F, V)$ имеем $M \not\models A$.
То есть A ложна в некоторой точке x.
Поскольку a_0 — корень и шкала транзитивна, то $a_0 = x$ или $a_0 \, R \, x$.
Тогда $M, a_0 \not\models \boxdot A$.

Док-во теоремы о расщеплении для кон. акс. логик

Теорема 2, пункт (2)

Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Доказательство.

Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_m)$. Имеем $F \not\models A$.

Значит, при некоторой оценке V в модели $M = (F, V)$ имеем $M \not\models A$.

То есть A ложна в некоторой точке x.

Поскольку a_0 — корень и шкала транзитивна, то $a_0 = x$ или $a_0 \, R \, x$.

Тогда $M, a_0 \not\models \boxdot A$. Иначе говоря, $\boxed{V(\boxdot A) \subseteq \overline{\{a_0\}}}$

Док-во теоремы о расщеплении для кон. акс. логик

Теорема 2, пункт (2)

Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Доказательство.

Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_m)$. Имеем $F \not\models A$.

Значит, при некоторой оценке V в модели $M = (F, V)$ имеем $M \not\models A$.

То есть A ложна в некоторой точке x.

Поскольку a_0 — корень и шкала транзитивна, то $a_0 = x$ или $a_0\, R\, x$.

Тогда $M, a_0 \not\models \boxdot A$. Иначе говоря, $\boxed{V(\boxdot A) \subseteq \overline{\{a_0\}}}$

Обозначим множества $X_i = V(p_i) \subseteq W$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.

Док-во теоремы о расщеплении для кон. акс. логик

Теорема 2, пункт (2)

Для любой формулы A имеем:

$$\text{если} \quad F \not\models A, \quad \text{то} \quad \mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F).$$

Доказательство.
Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_m)$. Имеем $F \not\models A$.
Значит, при некоторой оценке V в модели $M = (F, V)$ имеем $M \not\models A$.
То есть A ложна в некоторой точке x.
Поскольку a_0 — корень и шкала транзитивна, то $a_0 = x$ или $a_0\, R\, x$.
Тогда $M, a_0 \not\models \boxdot A$. Иначе говоря, $\boxed{V(\boxdot A) \subseteq \overline{\{a_0\}}}$

Обозначим множества $X_i = V(p_i) \subseteq W$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.
Подставим в A вместо переменных p_i переменные P_{X_i}.

Доказательство (продолжение)

Лемма

Из Γ_F^{set} *в логике* **K4** *выводится для любой формулы* $B = B(p_1, \dots, p_m)$*:*

$$B(P_{X_1}, \dots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(B)}.$$

Доказательство (продолжение)

Лемма

Из Γ_F^{set} *в логике* **K4** *выводится для любой формулы* $B = B(p_1, \ldots, p_m)$*:*

$$B(P_{X_1}, \ldots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(B)}.$$

Доказательство: индукция по построению формулы B.

Лемма

Из Γ_F^{set} в логике **K4** *выводится для любой формулы $B = B(p_1, \dots, p_m)$:*

$$B(P_{X_1}, \dots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(B)}.$$

Поскольку $V(\boxdot A) \subseteq \overline{\{a_0\}}$, то из Γ_F^{set} выводится (для $B := \boxdot A$):

$$\boxdot A(P_{X_1}, \dots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(\boxdot A)}, \qquad \longrightarrow P_{\overline{\{a_0\}}}$$

Доказательство (продолжение)

Лемма

Из Γ_F^{set} в логике **K4** *выводится для любой формулы $B = B(p_1, \ldots, p_m)$:*

$$B(P_{X_1}, \ldots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(B)}.$$

Поскольку $V(\boxdot A) \subseteq \overline{\{a_0\}}$, то из Γ_F^{set} выводится (для $B := \boxdot A$):

$$\boxdot A(P_{X_1}, \ldots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(\boxdot A)}, \qquad \longrightarrow P_{\overline{\{a_0\}}}$$

По Теореме о дедукции для **K4** получаем :

$$\mathbf{K4} \vdash \boxdot\left(\bigwedge \Gamma_F^{\mathrm{set}}\right) \longrightarrow \left(\boxdot A(P_{X_1}, \ldots, P_{X_m}) \longrightarrow \neg P_{\{a_0\}}\right).$$

Лемма

Из Γ_F^{set} в логике **K4** *выводится для любой формулы $B = B(p_1, \ldots, p_m)$:*

$$B(P_{X_1}, \ldots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(B)}.$$

Поскольку $V(\boxdot A) \subseteq \overline{\{a_0\}}$, то из Γ_F^{set} выводится (для $B := \boxdot A$):

$$\boxdot A(P_{X_1}, \ldots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(\boxdot A)}, \qquad \longrightarrow P_{\overline{\{a_0\}}}$$

По Теореме о дедукции для **K4** получаем :

$$\mathbf{K4} \vdash \boxdot\left(\bigwedge \Gamma_F^{set}\right) \longrightarrow \left(\boxdot A(P_{X_1}, \ldots, P_{X_m}) \longrightarrow \neg P_{\{a_0\}}\right).$$

Значит,

$$\boxdot A(P_{X_1}, \ldots, P_{X_m}) \vDash^{*}_{\mathbf{K4}} \chi(F).$$

Доказательство (продолжение)

Лемма

Из Γ_F^{set} в логике **K4** *выводится для любой формулы $B = B(p_1, \dots, p_m)$:*

$$B(P_{X_1}, \dots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(B)}.$$

Поскольку $V(\boxdot A) \subseteq \overline{\{a_0\}}$, то из Γ_F^{set} выводится (для $B := \boxdot A$):

$$\boxdot A(P_{X_1}, \dots, P_{X_m}) \longleftrightarrow P_{V(\boxdot A)}, \quad \longrightarrow P_{\overline{\{a_0\}}}$$

По Теореме о дедукции для **K4** получаем :

$$\mathbf{K4} \vdash \boxdot\left(\bigwedge \Gamma_F^{set}\right) \longrightarrow \left(\boxdot A(P_{X_1}, \dots, P_{X_m}) \longrightarrow \neg P_{\{a_0\}}\right).$$

Значит,

$$\boxdot A(P_{X_1}, \dots, P_{X_m}) \not\vdash^{*}_{\mathbf{K4}} \chi(F).$$

Но гипотеза выводится в $\mathbf{K4} \oplus A$.

Доказательство (продолжение)

Лемма

Из Γ_F^{set} *в логике* **K4** *выводится для любой формулы* $B = B(p_1, \ldots, p_m)$*:*

$$B(P_{x_1}, \ldots, P_{x_m}) \longleftrightarrow P_{V(B)}.$$

Поскольку $V(\boxdot A) \subseteq \overline{\{a_0\}}$, то из Γ_F^{set} выводится (для $B := \boxdot A$):

$$\boxdot A(P_{x_1}, \ldots, P_{x_m}) \longleftrightarrow P_{V(\boxdot A)}, \quad \longrightarrow P_{\overline{\{a_0\}}}$$

По Теореме о дедукции для **K4** получаем :

$$\mathbf{K4} \vdash \boxdot\left(\bigwedge \Gamma_F^{\mathrm{set}}\right) \longrightarrow \left(\boxdot A(P_{x_1}, \ldots, P_{x_m}) \longrightarrow \neg P_{\{a_0\}}\right).$$

Значит,

$$\boxdot A(P_{x_1}, \ldots, P_{x_m}) \vdash^{*}_{\mathbf{K4}} \chi(F).$$

Но гипотеза выводится в $\mathbf{K4} \oplus A$. Таким образом $\mathbf{K4} \oplus A \vdash \chi(F)$.

Теорема о расщеплении для любых транзитивных логик

Теорема 3 (расщепление для транзитивных логик)

Для любой транзитивной логики L, то есть $\mathbf{K4} \subseteq L$, одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Теорема о расщеплении для любых транзитивных логик

Теорема 3 (расщепление для транзитивных логик)

Для любой транзитивной логики L, то есть $\mathbf{K4} \subseteq L$, одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Доказательство. Пусть $L \not\subseteq \mathrm{Logic}(F)$. Тогда найдется $A \in L \setminus \mathrm{Logic}(F)$.

Теорема 3 (расщепление для транзитивных логик)

Для любой транзитивной логики L, то есть $\mathbf{K4} \subseteq L$, одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Доказательство. Пусть $L \not\subseteq \mathrm{Logic}(F)$. Тогда найдется $A \in L \setminus \mathrm{Logic}(F)$. Рассмотрим логику $L' = \mathbf{K} \oplus A \subseteq L$.

Теорема о расщеплении для любых транзитивных логик

Теорема 3 (расщепление для транзитивных логик)

Для любой транзитивной логики L, то есть $\mathbf{K4} \subseteq L$, одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Доказательство. Пусть $L \not\subseteq \mathrm{Logic}(F)$. Тогда найдется $A \in L \setminus \mathrm{Logic}(F)$. Рассмотрим логику $L' = \mathbf{K} \oplus A \subseteq L$. Имеем $L' \not\subseteq \mathrm{Logic}(F)$.

Теорема о расщеплении для любых транзитивных логик

Теорема 3 (расщепление для транзитивных логик)

Для любой транзитивной логики L, то есть $\mathbf{K4} \subseteq L$, одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Доказательство. Пусть $L \not\subseteq \mathrm{Logic}(F)$. Тогда найдется $A \in L \setminus \mathrm{Logic}(F)$.
Рассмотрим логику $L' = \mathbf{K} \oplus A \subseteq L$. Имеем $L' \not\subseteq \mathrm{Logic}(F)$.
По Теореме 2' заключаем: $\mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L' \subseteq L$. $\square$

Теорема о расщеплении для любых транзитивных логик

Теорема 3 (расщепление для транзитивных логик)

Для любой транзитивной логики L, то есть $\mathbf{K4} \subseteq L$, одно из двух:

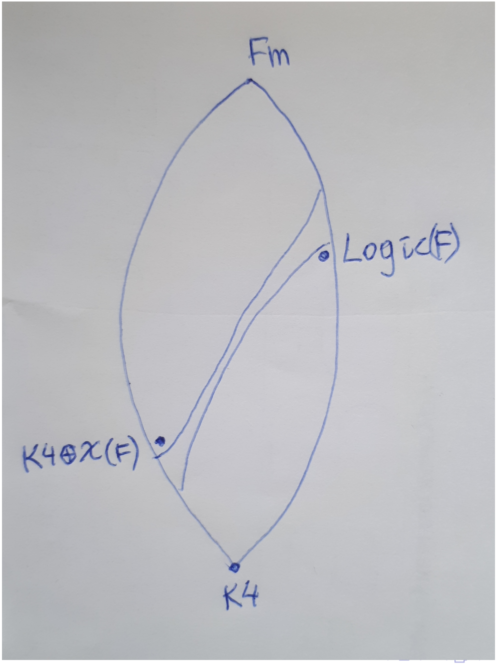
$$\text{либо} \quad \mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Доказательство. Пусть $L \not\subseteq \mathrm{Logic}(F)$. Тогда найдется $A \in L \setminus \mathrm{Logic}(F)$. Рассмотрим логику $L' = \mathbf{K} \oplus A \subseteq L$. Имеем $L' \not\subseteq \mathrm{Logic}(F)$. По Теореме 2' заключаем: $\mathbf{K4} \oplus \chi(F) \subseteq L' \subseteq L$. □

Определение

Шкала F, а также ее логика $L_1 := \mathrm{Logic}(F)$, расщепляет решетку нормальных логик $\{L \mid L \supseteq L_0\}$, если существует такая логика L_2, что для любой логики L из этой решетки имеет место ровно одно из двух:

$$\text{либо} \quad L_2 \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq L_1.$$


Fm
Logic(F)
K4⊕X(F)
K4

Теорема Блока о расщеплении

Теорема (Расщепление решетки всех нормальных логик)

Рассмотрим лишь конечные шкалы F.
Над $\mathbf{K}$ *расщепляют решетку всех нормальных логик только (конечные) шкалы* F, *не имеющие циклов.*

Теорема Блока о расщеплении

Теорема (Расщепление решетки всех нормальных логик)

Рассмотрим лишь конечные шкалы F.
Над $\mathbf{K}$ *расщепляют решетку всех нормальных логик только (конечные) шкалы* F*, не имеющие циклов.*

То есть для любой конечной шкалы без циклов F *(и только для таких шкал) можно построить (эффективно) формулу* A_F*, такую что для любой нормальной логики* L *имеет место ровно одно из двух:*

$$\text{либо} \quad \mathbf{K} \oplus A_F \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

Теорема Блока о расщеплении

Теорема (Расщепление решетки всех нормальных логик)

Рассмотрим лишь конечные шкалы F.
Над $\mathbf{K}$ расщепляют решетку всех нормальных логик только (конечные) шкалы F, не имеющие циклов.

То есть для любой конечной шкалы без циклов F (и только для таких шкал) можно построить (эффективно) формулу A_F, такую что для любой нормальной логики L имеет место ровно одно из двух:

$$\text{либо} \quad \mathbf{K} \oplus A_F \subseteq L, \qquad \text{либо} \quad L \subseteq \mathrm{Logic}(F).$$

В частности, $\mathbf{Ver}$ (логика одноточечной иррефлексивной шкалы) расщепляет решетку всех нормальных логик. А именно, для всякой логики L имеет место ровно одно из двух: $\mathbf{KD} \subseteq L$ либо $L \subseteq \mathbf{Ver}$. (упр.)

Теорема Блока о расщеплении

Теорема (Расщепление решетки всех нормальных логик)

Рассмотрим лишь конечные шкалы F.
*Над **K** расщепляют решетку всех нормальных логик только (конечные) шкалы F, не имеющие циклов.*

В частности, **Ver** (логика одноточечной иррефлексивной шкалы) расщепляет решетку всех нормальных логик. А именно, для всякой логики L имеет место ровно одно из двух: $\mathbf{KD} \subseteq L$ либо $L \subseteq \mathbf{Ver}$. (упр.)

Напротив, **Triv** (логика одноточечной рефлексивной шкалы) не расщепляет решетку всех нормальных логик.

Теорема Блока о расщеплении

Теорема (Расщепление решетки всех нормальных логик)

Рассмотрим лишь конечные шкалы F.
Над **K** *расщепляют решетку всех нормальных логик только (конечные) шкалы F, не имеющие циклов.*

В частности, **Ver** (логика одноточечной иррефлексивной шкалы) расщепляет решетку всех нормальных логик. А именно, для всякой логики L имеет место ровно одно из двух: $\mathbf{KD} \subseteq L$ либо $L \subseteq \mathbf{Ver}$. (упр.)

Напротив, **Triv** (логика одноточечной рефлексивной шкалы) не расщепляет решетку всех нормальных логик.

Указание: Постройте убывающую цепочку логик $L_0 \supset L_1 \supset \ldots$, каждая из которых $L_i \not\subseteq \mathbf{Triv}$, однако их пересечение $\bigcap_{i \geqslant 0} L_i \subseteq \mathbf{Triv}$. Тем самым среди логик, не содержащихся в **Triv**, нет наименьшей.

Теорема (Расщепление решетки всех нормальных логик)

Рассмотрим лишь конечные шкалы F.
Над **K** *расщепляют решетку всех нормальных логик только (конечные) шкалы F, не имеющие циклов.*

В частности, **Ver** (логика одноточечной иррефлексивной шкалы) расщепляет решетку всех нормальных логик. А именно, для всякой логики L имеет место ровно одно из двух: $\mathbf{KD} \subseteq L$ либо $L \subseteq \mathbf{Ver}$. (упр.)

Напротив, **Triv** (логика одноточечной рефлексивной шкалы) не расщепляет решетку всех нормальных логик.

Указание: Постройте убывающую цепочку логик $L_0 \supset L_1 \supset \ldots$, каждая из которых $L_i \not\subseteq \mathbf{Triv}$, однако их пересечение $\bigcap_{i \geqslant 0} L_i \subseteq \mathbf{Triv}$. Тем самым среди логик, не содержащихся в **Triv**, нет наименьшей.

Однако **Triv** расщепляет решетку всех транзитивных логик! Найти.