Спецкурс «Модальная логика» (осень 2020): Задачи

Лектор: с.н.с. Е.Е.Золин

Задачи на «4» (надо решить задачу, имеющуюся в билете; если сдается зачет, то достаточно решить любые 2 задачи, без теории)

1. Найдите условие на шкалу $F = (W, R)$, то есть на отношение R, необходимое и достаточное для включения[1] $\mathsf{Logic}(F) \subseteq \mathsf{Ver}$. Разрешимо ли это условие для конечных шкал?

2. Верно ли включение:[2] $\mathsf{Logic}(\mathbb{N}, \gtrdot) \subseteq \mathsf{Triv}$? Здесь $m \gtrdot n \quad \leftrightharpoons \quad m = n + 1$.

3. Докажите: если $\mathsf{K} \vdash \Box A \vee \Box B$, то $\mathsf{K} \vdash A$ или $\mathsf{K} \vdash B$. Аналогично с n формулами.

4. Докажите: *формула Собочинского* $p \to \Box(\Diamond p \to p)$ общезначима на шкале $\Leftrightarrow$ шкала удовлетворяет условию: $\forall x, y, z \,\big(xRyRz \Rightarrow (x = y \vee y = z)\big)$.

5. Выяснить включения между логиками $L_n = \mathsf{Logic}(F_n)$, для следующих шкал (*решить любые 2 пункта*):
   а) F_n — ориентированный рефлексивный цикл из n точек;
   б) F_n — ориентированный иррефлексивный цикл из n точек;
   в) $F_n = (W, <)$ — строгий иррефлексивный порядок из n точек;
   г) $F_n = (W, \leqslant)$ — строгий иррефлексивный порядок из n точек.

6. Следующие конечные трехэлементные шкалы неизоморфны. Согласно общей теории, тогда их модальные логики различны и даже не сравнимы по включению. Для каких-нибудь $i \neq j$ найдите формулу A, такую что $F_i \models A$, но $F_j \not\models A$, и наоборот. Шкалы $F_i = (W, R_i)$, где $W = \{a, b, c\}$, отношения R_i таковы:

   1) $R_1 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle a,a\rangle\}$;
   2) $R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$;
   3) $R_3 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle b,a\rangle\}$;
   4) $R_4 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle\}$;
   5) $R_5 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle a,a\rangle, \langle c,b\rangle\}$;
   6) $R_6 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,b\rangle\}$.

Задачи на «5» (решите любую задачу на выбор студента; если сдается зачет, то достаточно решить одну задачу, без теории)

7. Решите задачу 6 для трех непересекающихся пар шкал (на выбор).

8. Докажите, что формула Собочинского (см. задачу 4) является канонической.

9. **а)** Найдите условие на шкалу $F = (W, R)$, то есть на отношение R, необходимое и достаточное для того, чтобы $\mathsf{Logic}(F) \subseteq \mathsf{Triv}$. **б)** Разрешимо ли это условие для конечных шкал? **в)*** (необяз) Является ли это условие элементарным, то есть выразимым множеством замкнутых формул первого порядка в сигнатуре $\{R, =\}$? (над всеми / над конечными шкалами)

10. Пусть A_n — приведенная ниже формула (*выберите любой пункт*). Для $\alpha \subseteq \mathbb{N}$ рассмотрим логику $\mathsf{K}_\alpha = \mathsf{K} \oplus \{A_n \mid n \in \alpha\}$. Сколько получилось разных логик K_α — счетное число или континуум?
    а) $p \to \Box^n p$, **б)** $\Box^n p \to p$, **в)** $\Box p \to \Box^n p$, **г)** $\Box^n p \to \Box p$; **д)** $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n \bot$.

---

[1] Напоминание: $\mathsf{Ver} = \mathsf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top)$ — логика одноточечной иррефлексивной шкалы.
[2] Напоминание: $\mathsf{Triv} = \mathsf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$ — логика одноточечной рефлексивной шкалы.

11. Выяснить включения между логиками $L_n = \mathsf{Logic}(F_n)$, а также логиками $\bigcap_{n\geqslant 2} L_n$ и L_ω, для следующих шкал (*выберите любой пункт*):

    а) F_n — симметричный иррефлексивный цикл из n точек;
    здесь считать $L_\omega = (\mathbb{Z}, R)$, где $x\,R\,y \;\leftrightharpoons\; x+1=y$ или $y+1=x$.

    б) F_n — симметричный рефлексивный цикл из n точек;
    здесь считать $L_\omega = (\mathbb{Z}, R)$, где $x\,R\,y \;\leftrightharpoons\; x+1=y$ или $y+1=x$ или $x=y$.

    в) F_n — иррефлексивный кластер из n точек, то есть $(\{1,\ldots,n\},\neq)$;
    здесь считать $L_\omega = (\mathbb{Z},\neq)$.

    г) $F_n = (W,<)$ — строгий иррефлексивный порядок из n точек;
    здесь считать $L_\omega = (\mathbb{Z},<)$.

    д) $F_n = (W,\leqslant)$ — строгий иррефлексивный порядок из n точек;
    здесь считать $L_\omega = (\mathbb{Z},\leqslant)$.

12. На лекциях было доказано, что для всякой (нормальной) логики L либо $\mathsf{KD} \subseteq L$, либо $L \subseteq \mathsf{Ver}$. Напомним: $\mathsf{KD} = \mathsf{K} \oplus \Diamond\top$. Докажите, что для Triv аналогичное утверждение неверно: не существует логики L_0, такой что для всякой L либо $L_0 \subseteq L$, либо $L \subseteq \mathsf{Triv}$. Указание. Один из способов это сделать — предъявите убывающую последовательность логик, не содержащихся в Triv, такую что их пересечение содержится в Triv. Подсказка. Поможет задача 2.