Спецкурс «Модальная логика» (осень 2020): Вопросы к экзамену

Лектор: с.н.с. Е.Е.Золин

1. Исчисление для минимальной нормальной логики **K**. Его корректность относительно семантики Крипке, включая корректность правила подстановки. Теорема корректности для произвольных модальных логик.

   [Ссылки на конспекты появятся позже. Скоро появится список задач.]

2. Модальная теория. Лемма о теории $T + A$. Лемма о непротиворечивости $T + A$ или $T + \neg A$. Лемма Линденбаума для модальных теорий. Лемма о свойствах полных непротиворечивых теорий.

3. Каноническая модель Крипке непротиворечивой нормальной логики. Лемма об истинности модальных формул в ее точках. Теорема об истинности модальных формул в канонической модели. Полнота по Крипке логики **K**.

4. Эквивалентные определения полной по Крипке логики. Канонические логики, их полнота по Крипке. Канонические модальные формулы. Каноничность логики, аксиоматизируемой каноническими формулами.

5. Лемма о теории $T + \Gamma$, где T — теория, а $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$. Лемма о степени канонического отношения $x\,(R_L)^n\,y$ (эквивалентное задание этого отношения через формулы вида $\Box^n A$).

6. Модальная (i, j, m, n)-формула. Задаваемое ею свойство шкал Крипке. Каноничность (i, j, m, n)-формулы. Каноничность 15 «традиционных» модальных логик. Полимодальные аналоги (i, j, m, n)-формул.

7. Логика Хамберстоуна симметричного замыкания: аксиоматика, выражаемые аксиомами свойства шкал, каноничность аксиом.

8. Несвязная сумма моделей / шкал Крипке. Сохранение истинности / общезначимости модальных формул при этой операции. Замкнутость модально определимых шкал относительно этой операции. Примеры не модально определимых классов шкал (обоснование использует несвязную сумму).

9. Модальный морфизм (или p-морфизм) моделей / шкал Крипке. Сохранение истинности / общезначимости модальных формул при этой операции. Замкнутость модально определимых шкал относительно этой операции. Примеры не модально определимых классов шкал (обоснование использует p-морфизм).

10. Порожденная подмодель / подшкала Крипке. Сохранение истинности / общезначимости модальных формул при этой операции. Замкнутость модально определимых шкал относительно этой операции. Примеры не модально определимых классов шкал (обоснование использует порожденные подшкалы).

11. Всякая полная логика является логикой одной шкалы. Лемма о порожденной канонической подмодели. Эквивалентные определения канонической формулы.

12. Подстановка. Подстановочный вариант модели; истинность формул в нем и в исходной модели. Модально различимая (м.р.) модель, лемма о различении n точек в ней. Конечная м.р. модель, лемма об $M \models A^*$. Если логика истинна в конечной м.р. модели, то она общезначима на ее шкале.

13. Логики **Triv** и **Ver**, их связь с одноточечными шкалами. Слабая теорема Макинсона (с док-вом). Сильная теорема Макинсона (с док-вом).

14. Модальные формулы, ограничивающие высоту и ширину шкалы. Задаваемые ими свойства шкал. Каноничность данных формул. Если в шкале общезначимы эти формулы, то каждая ее порожденная точкой подшкала конечна.

15. Теорема Чагрова (критерий табличности модальной логики). Расширения табличной логики — табличны и их конечное число. Конечная аксиоматизируемость всякой табличной логики.

16. Лемма о модальной диаграмме конечной шкалы. Субредукция шкал. Характеристическая формула Янкова–Файна конечного транзитивного конуса. Основная теорема о хар. формулах для транзитивных шкал.

17. Лемма о накрытии. Критерий ван Бентема модальной определимости классов конечных транзитивных шкал.

18. Характеристическая формула Янкова–Файна для конечного n-транзитивного конуса. Основная теорема о хар. формулах для n-транзитивных шкал. Критерий ван Бентема модальной определимости классов конечных n-транзитивных шкал.

19. Теорема об изоморфизме модально эквивалентных конечных конусов. Лемма о биективном p-морфизме шкал. Связь отношения «логика одной конечной шкалы содержится в логике другой конечной шкалы» с субредукцией шкал; теорема о разрешимости этого отношения.

20. Перечислимость логики, множество аксиом которой разрешимо / перечислимо. Теорема Крейга (рекурсивная аксиоматизируемость логики с перечислимым множеством аксиом).

21. Эквивалентные определения логики, полной относительно конечных шкал (т.е. финитно аппроксимируемой). Теорема Харропа (разрешимость конечно аксиоматизируемой финитно аппроксимируемой логики). Ее обобщение для рекурсивно аксиоматизируемых логик.

22. Построение «конечной канонической модели» нормальной логики L: понятие подформулы, максимального L-непротиворечивого подмножества конечного множества формул, леммы про них, конструкция ККМ, Ключевая лемма об истинности формулы в точке. Построение ККМ для логики **K**, как следствие — разрешимость логики **K**.

23. Фильтрация через множество формул Φ (в узком смысле). Лемма о фильтрации. Расширение логики, допускающей фильтрацию (в узком смысле), замкнутыми формулами. Всякая модель модально эквивалентна некоторой модально различимой модели. Теорема о совпадении понятий «логика, полная относительно конечных шкал» и «логика, полная относительно конечных моделей».

24. Фильтрация через множество формул Φ (в узком смысле). Разрешимость полной логики, допускающей фильтрацию (в узком смысле). Разрешимость логик **K**, **KT**, **KB** через фильтрации. Понятие класса шкал, замкнутого относительно минимальных фильтраций. Модальные формулы, сохраняющиеся при минимальных фильтрациях; примеры (два семейства формул Габбая).

25. Две фильтрации для логики **K4**. Понятие фильтрации через множество формул Φ, согласованной с множеством формул $\Gamma \subseteq \Phi$ (т.е. в широком смысле). Лемма о фильтрации. Понятие логики, допускающей фильтрацию в широком смысле. Логика с аксиомой n-транзитивности ($n \geqslant 2$) допускает фильтрацию (в широком смысле), док-во можно проводить для случая $n = 2$.

26. Грамматика (полу-системы Туэ), выводимость слов в ней. Принцип редукции (необходимостей), задаваемое им условие на шкалы. Грамматическая модальная логика **K**П, ее каноничность и полнота. Теорема о выводимых в **K**П принципах редукции. Существование неразрешимых грамматических логик.

27. Контекстно-свободная грамматика П. П-замыкание шкалы Крипке F, оно является минимальной П-шкалой, содержащей F. Регулярный язык и регулярные выражения; регулярная грамматика; регулярная модальная логика **K**П. Явная формула (через регулярное выражение) для П-замыкания шкалы в случае регулярной грамматики П. Разрешимость регулярных модальных логик (без док-ва).

28. Модальная эквивалентность и бисимуляционная эквивалентность двух отмеченных моделей Крипке. Совпадение этих понятий в случае моделей конечного ветвления. Бесконечная бисимуляционная игра. Теорема об игровой характеризации бисимуляции.

29. Бисимуляционная игра в n раундов. Модальная глубина формулы. Конечность числа попарно неэквивалентных формул ограниченной глубины от конечного множества переменных. Модальная n-эквивалентность отмеченных моделей, теорема об ее игровой характеризации. Теорема об игровой характеризации модальной эквивалентности отмеченных моделей.

30. Модальная «формула выигрышной стратегии второго игрока в n-игре» для данной отмеченной модели — индуктивное построение формулы. Теорема о равносильности четырех утверждений для отмеченных моделей: бисимуляционная n-эквивалентность, модальная n-эквивалентность, игровая n-эквивалентность, истинность выигрышной модальной формулы для n-игры.