Модальная логика. Лекция 12: Бисимуляционные игры и модальная логика: модальная эквивалентность, бисимуляционная эквивалентность, игровая эквивалентность отмеченных моделей

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

11 декабря 2020 года

Модальная эквивалентность отмеченных моделей

Модальные формулы: $A ::= \bot \mid p_i \mid (A \to B) \mid \Box A$

Модальная эквивалентность отмеченных моделей

Модальные формулы: $A \ ::= \ \bot \ | \ p_i \ | \ (A \to B) \ | \ \Box A$

Модель Крипке $M = (W, R, V)$, $W \neq \varnothing$, $R \subseteq (W \times W)$, $V(p_i) \subseteq W$.

Модальная эквивалентность отмеченных моделей

Модальные формулы: $A \ ::= \ \bot \ | \ p_i \ | \ (A \to B) \ | \ \Box A$

Модель Крипке $M = (W, R, V)$, $W \neq \varnothing$, $R \subseteq (W \times W)$, $V(p_i) \subseteq W$.

Истинность формулы определяется в отмеченной модели: $(M, x) \models A$.

Модальная эквивалентность отмеченных моделей

Модальные формулы: $A ::= \bot \mid p_i \mid (A \to B) \mid \Box A$

Модель Крипке $M = (W, R, V)$, $W \neq \varnothing$, $R \subseteq (W \times W)$, $V(p_i) \subseteq W$.

Истинность формулы определяется в отмеченной модели: $(M, x) \models A$.

Определение: модальная эквивалентность $(M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x')$.

Отмеченные модели (M, x) и (M', x') модально эквивалентны, если в них истинны одни и те же модальные формулы:

$$M, x \models A \iff M', x' \models A \qquad \text{для всякой модальной формулы } A.$$

Модальная эквивалентность отмеченных моделей

Модальные формулы: $A \ ::= \ \bot \ | \ p_i \ | \ (A \to B) \ | \ \Box A$

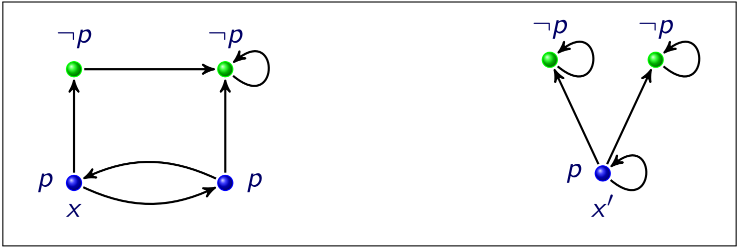
Модель Крипке $M = (W, R, V)$, $W \neq \varnothing$, $R \subseteq (W \times W)$, $V(p_i) \subseteq W$.

Истинность формулы определяется в отмеченной модели: $(M, x) \models A$.

Определение: модальная эквивалентность $(M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x')$.

Отмеченные модели (M, x) и (M', x') модально эквивалентны, если в них истинны одни и те же модальные формулы:

$M, x \models A \iff M', x' \models A$ для всякой модальной формулы A.



Модальная эквивалентность отмеченных моделей

Модальные формулы: $A ::= \bot \mid p_i \mid (A \to B) \mid \Box A$

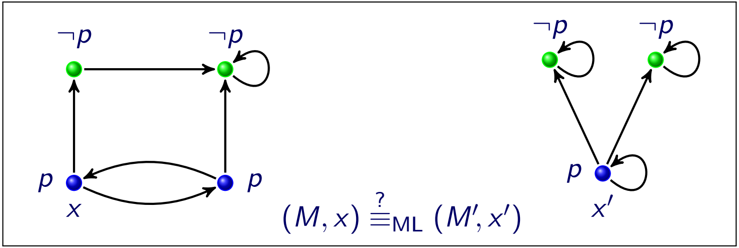
Модель Крипке $M = (W, R, V)$, $W \neq \varnothing$, $R \subseteq (W \times W)$, $V(p_i) \subseteq W$.

Истинность формулы определяется в отмеченной модели: $(M, x) \models A$.

Определение: модальная эквивалентность $(M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x')$.

Отмеченные модели (M, x) и (M', x') модально эквивалентны, если в них истинны одни и те же модальные формулы:

$M, x \models A \iff M', x' \models A$ для всякой модальной формулы A.



Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) $x\,Z\,x' \quad \Longrightarrow \quad M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) $x\,Z\,x' \quad \Longrightarrow \quad M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x\,Z\,x'$ и $x\,R\,y \Longrightarrow$ существует $y' \in W'$, такая что $y\,Z\,y'$ и $x'\,R'\,y'$

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

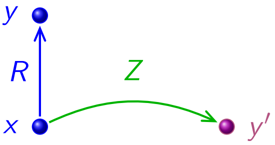
Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) $x\,Z\,x' \quad \Longrightarrow \quad M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x\,Z\,x'$ и $x\,R\,y \quad \Longrightarrow$ существует $y' \in W'$, такая что $y\,Z\,y'$ и $x'\,R'\,y'$



Условие **(zig)**

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

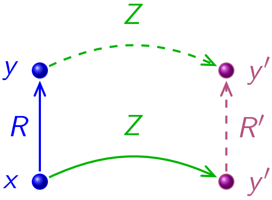
Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) $x\,Z\,x' \implies M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x\,Z\,x'$ и $x\,R\,y \implies$ существует $y' \in W'$, такая что $y\,Z\,y'$ и $x'\,R'\,y'$



Условие **(zig)**

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

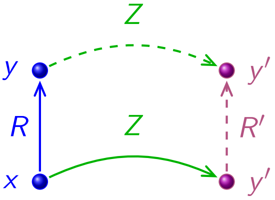
Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

(var) $x \, Z \, x' \implies M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x \, Z \, x'$ и $x \, R \, y \implies$ существует $y' \in W'$, такая что $y \, Z \, y'$ и $x' \, R' \, y'$

(zag) $x \, Z \, x'$ и $x' \, R' \, y' \implies$ существует $y \in W$, такая что $y \, Z \, y'$ и $x \, R \, y$



Условие **(zig)**

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

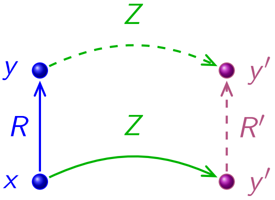
Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

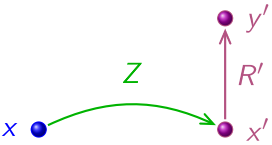
(var) $x\,Z\,x' \implies M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x\,Z\,x'$ и $x\,R\,y \implies$ существует $y' \in W'$, такая что $y\,Z\,y'$ и $x'\,R'\,y'$

(zag) $x\,Z\,x'$ и $x'\,R'\,y' \implies$ существует $y \in W$, такая что $y\,Z\,y'$ и $x\,R\,y$



Условие **(zig)**



Условие **(zag)**

Бисимуляция между двумя моделями Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

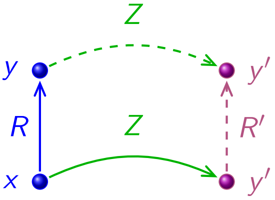
Определение

Бисимуляция — это непустое отношение $Z \subseteq (W \times W')$, такое что

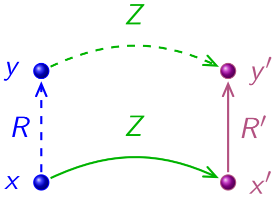
(var) $x\,Z\,x' \quad\Longrightarrow\quad M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x\,Z\,x'$ и $x\,R\,y \Longrightarrow$ существует $y' \in W'$, такая что $y\,Z\,y'$ и $x'\,R'\,y'$

(zag) $x\,Z\,x'$ и $x'\,R'\,y' \Longrightarrow$ существует $y \in W$, такая что $y\,Z\,y'$ и $x\,R\,y$



Условие **(zig)**



Условие **(zag)**

Бисимуляционная эквивалентность

Определение (Бисим. эквивалентность отмеченных моделей)

$(M, x) \simeq (M', x')$, если найдется бисимуляция Z, такая что $x \, Z \, x'$.

Бисимуляционная эквивалентность

Определение (Бисим. эквивалентность отмеченных моделей)

$(M, x) \simeq (M', x')$, если найдется бисимуляция Z, такая что $x \, Z \, x'$.
Другой термин: отм. модели (M, x) и (M', x') — бисимулируют.

Бисимуляционная эквивалентность

Определение (Бисим. эквивалентность отмеченных моделей)

$(M, x) \simeq (M', x')$, если найдется бисимуляция Z, такая что $x \, Z \, x'$.
Другой термин: отм. модели (M, x) и (M', x') — бисимулируют.

Итак, $\simeq$ равно объединению всех бисимуляций между M и M'.

Бисимуляционная эквивалентность

Определение (Бисим. эквивалентность отмеченных моделей)

$(M, x) \simeq (M', x')$, если найдется бисимуляция Z, такая что $x \, Z \, x'$.
Другой термин: отм. модели (M, x) и (M', x') — бисимулируют.

Итак, $\simeq$ равно объединению всех бисимуляций между M и M'.

Упражнение: Само отношение $\simeq$ между M и M' — бисимуляция!
(если оно не пусто)

Бисимуляционная эквивалентность

Определение (Бисим. эквивалентность отмеченных моделей)

$(M, x) \simeq (M', x')$, если найдется бисимуляция Z, такая что $x\,Z\,x'$.
Другой термин: отм. модели (M, x) и (M', x') — бисимулируют.

Итак, $\simeq$ равно объединению всех бисимуляций между M и M'.

Упражнение: Само отношение $\simeq$ между M и M' — бисимуляция! (если оно не пусто)

Иначе говоря, отношение $\simeq$, если оно непусто, есть наибольшая бисимуляция между M и M'.

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

Пусть Z — бисимуляция между M и M', причем $x \, Z \, x'$.

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

Пусть Z — бисимуляция между M и M', причем $x \, Z \, x'$.
Докажем: $M, x \models A \;\Leftrightarrow\; M', x' \models A$.

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

Пусть Z — бисимуляция между M и M', причем $x\,Z\,x'$.
Доказем: $M, x \models A \;\Leftrightarrow\; M', x' \models A$.
Индукция по построению формулы A. Разберем случай $A = \Diamond B$.

$\square$

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

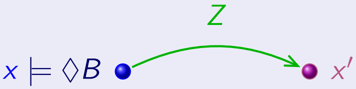
Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

Пусть Z — бисимуляция между M и M', причем $x\,Z\,x'$.
Доказаем: $M, x \models A \;\Leftrightarrow\; M', x' \models A$.
Индукция по построению формулы A. Разберем случай $A = \Diamond B$.



$\square$

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

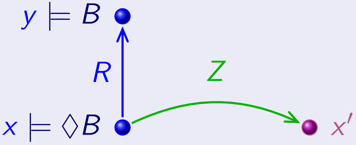
Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

Пусть Z — бисимуляция между M и M', причем $x\,Z\,x'$.
Доказаем: $M, x \models A \ \Leftrightarrow\ M', x' \models A$.
Индукция по построению формулы A. Разберем случай $A = \Diamond B$.



$\square$

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

Пусть Z — бисимуляция между M и M', причем $x\,Z\,x'$.
Доказем: $M, x \models A \ \Leftrightarrow\ M', x' \models A$.
Индукция по построению формулы A. Разберем случай $A = \Diamond B$.

$$\begin{tikzcd}
y \models B \arrow[r, dashed, bend left, "Z"] & y' \\
x \models \Diamond B \arrow[u, "R"] \arrow[r, bend left, "Z"] & x' \arrow[u, dashed, "R'"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

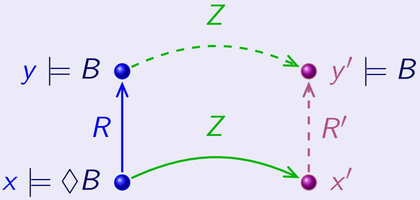
Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

Пусть Z — бисимуляция между M и M', причем $x\,Z\,x'$.
Доказжем: $M, x \models A \;\Leftrightarrow\; M', x' \models A$.
Индукция по построению формулы A. Разберем случай $A = \Diamond B$.



$\square$

Бисимуляция $\Longrightarrow$ модальная эквивалентность

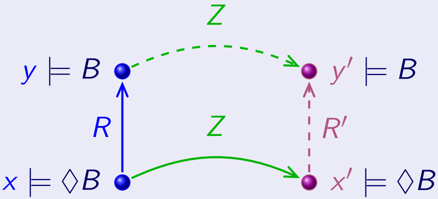
Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

Пусть Z — бисимуляция между M и M', причем $x \, Z \, x'$.
Докажем: $M, x \models A \;\Leftrightarrow\; M', x' \models A$.
Индукция по построению формулы A. Разберем случай $A = \Diamond B$.



□

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathsf{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathsf{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathsf{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathsf{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathsf{ML}}$ будет бисимуляцией!

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \iff (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \iff (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно. Проверим (zig); для (zag) аналогично.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно. Проверим (zig); для (zag) аналогично.
(zig) Пусть $x \equiv_{\mathrm{ML}} x'$ и $x \, R \, y$.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно. Проверим (zig); для (zag) аналогично.
(zig) Пусть $x \equiv_{\mathrm{ML}} x'$ и $x\,R\,y$.
Надо найти последователя точки x', который $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно. Проверим (zig); для (zag) аналогично.
(zig) Пусть $x \equiv_{\mathrm{ML}} x'$ и $x\,R\,y$.
Надо найти последователя точки x', который $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.
Рассмотрим $R'(x') = \{z'_1, \ldots, z'_n\}$ — это конечное множество.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \iff (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно. Проверим (zig); для (zag) аналогично.
(zig) Пусть $x \equiv_{\mathrm{ML}} x'$ и $x \, R \, y$.
Надо найти последователя точки x', который $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.
Рассмотрим $R'(x') = \{z'_1, \ldots, z'_n\}$ — это конечное множество.
Допустим, ни одна из точек z'_i не $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно. Проверим (zig); для (zag) аналогично.
(zig) Пусть $x \equiv_{\mathrm{ML}} x'$ и $x\, R\, y$.
Надо найти последователя точки x', который $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.
Рассмотрим $R'(x') = \{z'_1, \ldots, z'_n\}$ — это конечное множество.
Допустим, ни одна из точек z'_i не $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.
Значит, есть формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что: $y \models A_i$, но $z'_i \not\models A_i$.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \iff (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно. Проверим (zig); для (zag) аналогично.
(zig) Пусть $x \equiv_{\mathrm{ML}} x'$ и $x\, R\, y$.
Надо найти последователя точки x', который $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.
Рассмотрим $R'(x') = \{z'_1, \ldots, z'_n\}$ — это конечное множество.
Допустим, ни одна из точек z'_i не $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.
Значит, есть формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что: $y \models A_i$, но $z'_i \not\models A_i$.
Тогда $\Diamond(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ истинна в точке x, но не в x'.

На конечных моделях бисимуляция совпадает с $\equiv_{\mathrm{ML}}$

M — модель конечного ветвления, если $R(x)$ конечно для всех $x \in W$.

Теорема

Пусть M и M' — модели конечного ветвления.
Тогда для всяких точек $x \in W$ и $x' \in W'$ имеем:

$$(M, x) \simeq (M', x') \iff (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Само отношение $\equiv_{\mathrm{ML}}$ будет бисимуляцией!
(var) очевидно. Проверим (zig); для (zag) аналогично.
(zig) Пусть $x \equiv_{\mathrm{ML}} x'$ и $x \, R \, y$.
Надо найти последователя точки x', который $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.
Рассмотрим $R'(x') = \{z'_1, \ldots, z'_n\}$ — это конечное множество.
Допустим, ни одна из точек z'_i не $\equiv_{\mathrm{ML}}$ точке y.
Значит, есть формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что: $y \models A_i$, но $z'_i \not\models A_i$.
Тогда $\Diamond(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ истинна в точке x, но не в x'. Противоречие. $\square$

Бисимуляция $\not\Longleftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!

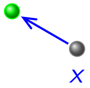
Бисимуляция $\not\Leftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!



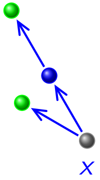
Бисимуляция $\not\Leftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!



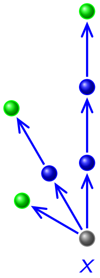
Бисимуляция $\not\Leftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!



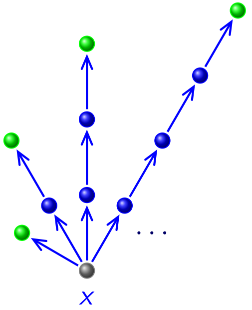
Бисимуляция $\not\Leftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!



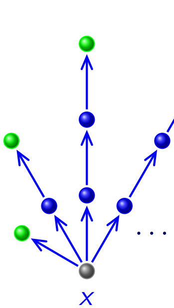
Бисимуляция $\not\Longleftarrow$ модальная эквивалентность

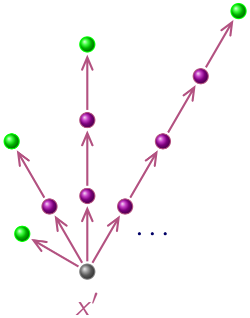
Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!





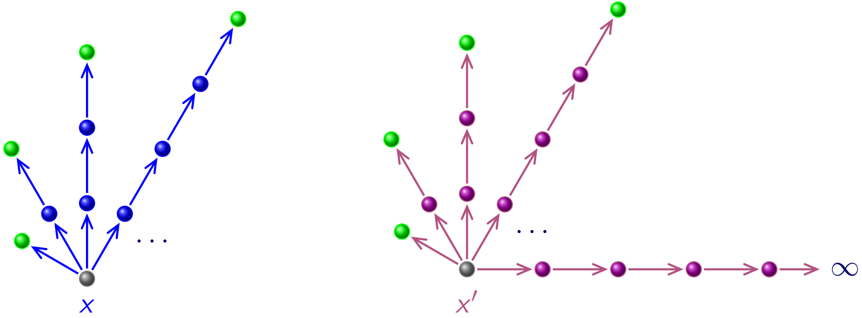
Бисимуляция $\not\Leftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!



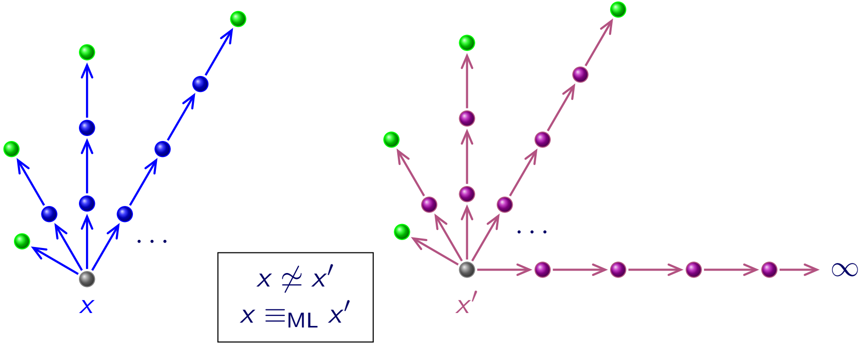
Бисимуляция $\not\Longleftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!



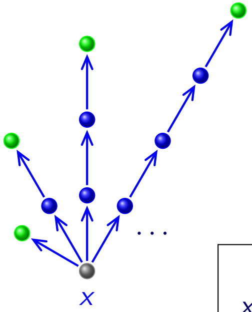
Бисимуляция $\not\Leftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

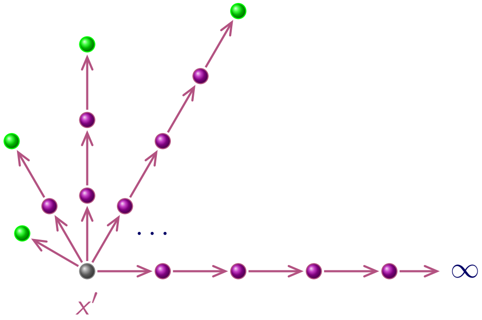
$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!



$x \not\simeq x'$

$x \equiv_{\mathrm{ML}} x'$



Как доказать оба утверждения?

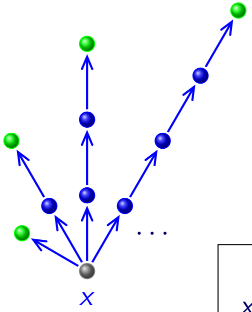
Бисимуляция $\not\Leftarrow$ модальная эквивалентность

Теорема

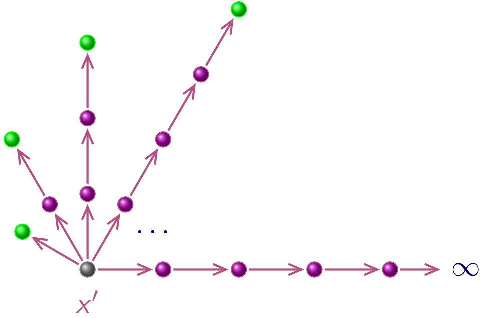
В бисимулирующих точках истинны одни и те же модальные формулы:

$$(M, x) \simeq (M', x') \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathrm{ML}} (M', x').$$

Обратная импликация верна не всегда!



$$\boxed{\begin{array}{c} x \not\simeq x' \\ x \equiv_{\mathrm{ML}} x' \end{array}}$$



Как доказать оба утверждения? ☞ Помогут бисимуляционные игры!

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$
2. В начале «фишки» находятся в точках $x \in W$ и $x' \in W'$.

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$
2. В начале «фишки» находятся в точках $x \in W$ и $x' \in W'$.
3. Ходы делаются по очереди, передвиганием «фишки» по ребру.

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$
2. В начале «фишки» находятся в точках $x \in W$ и $x' \in W'$.
3. Ходы делаются по очереди, передвиганием «фишки» по ребру.
4. Первый игрок выбирает, в какой модели делать ход; второму игроку приходится отвечать в «противоположной модели».

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$
2. В начале «фишки» находятся в точках $x \in W$ и $x' \in W'$.
3. Ходы делаются по очереди, передвиганием «фишки» по ребру.
4. Первый игрок выбирает, в какой модели делать ход; второму игроку приходится отвечать в «противоположной модели».
5. Перед игрой и после каждого хода в текущей позиции (a, a') проверяется $\equiv_{\mathsf{Var}}$, означающее:

   $(M, a) \equiv_{\mathsf{Var}} (M', a')$: $\quad\quad \big(\, M, a \models p \;\Leftrightarrow\; M', a' \models p \,\big)$ для $\forall p \in \mathsf{Var}$.

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$
2. В начале «фишки» находятся в точках $x \in W$ и $x' \in W'$.
3. Ходы делаются по очереди, передвиганием «фишки» по ребру.
4. Первый игрок выбирает, в какой модели делать ход; второму игроку приходится отвечать в «противоположной модели».
5. Перед игрой и после каждого хода в текущей позиции (a, a') проверяется $\equiv_{\mathrm{Var}}$, означающее:
   $(M, a) \equiv_{\mathrm{Var}} (M', a')$: $\quad \big(M, a \models p \;\Leftrightarrow\; M', a' \models p\big)$ для $\forall p \in \mathrm{Var}$.
6. Если $\equiv_{\mathrm{Var}}$ нарушилось, то партию выиграл $\mathbf{1}_{\not\simeq}$.

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$
2. В начале «фишки» находятся в точках $x \in W$ и $x' \in W'$.
3. Ходы делаются по очереди, передвиганием «фишки» по ребру.
4. Первый игрок выбирает, в какой модели делать ход; второму игроку приходится отвечать в «противоположной модели».
5. Перед игрой и после каждого хода в текущей позиции (a, a') проверяется $\equiv_{\mathrm{Var}}$, означающее:

   $(M, a) \equiv_{\mathrm{Var}} (M', a')$: $\qquad \big(\, M, a \models p \;\Leftrightarrow\; M', a' \models p \,\big)$ для $\forall p \in \mathrm{Var}$.
6. Если $\equiv_{\mathrm{Var}}$ нарушилось, то партию выиграл $\mathbf{1}_{\not\simeq}$.
7. Если какой-то игрок не может сделать ход, т.к. нет исходящих рёбер, то партию выиграл его противник.

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$
2. В начале «фишки» находятся в точках $x \in W$ и $x' \in W'$.
3. Ходы делаются по очереди, передвиганием «фишки» по ребру.
4. Первый игрок выбирает, в какой модели делать ход; второму игроку приходится отвечать в «противоположной модели».
5. Перед игрой и после каждого хода в текущей позиции (a, a') проверяется $\equiv_{\mathsf{Var}}$, означающее:
   $(M, a) \equiv_{\mathsf{Var}} (M', a')$: $\quad \big(M, a \models p \;\Leftrightarrow\; M', a' \models p\big)$ для $\forall p \in \mathsf{Var}$.
6. Если $\equiv_{\mathsf{Var}}$ нарушилось, то партию выиграл $\mathbf{1}_{\not\simeq}$.
7. Если какой-то игрок не может сделать ход, т.к. нет исходящих рёбер, то партию выиграл его противник.
8. Если игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ «продержался» бесконечное число ходов, то он выиграл эту партию.

Бесконечная бисимуляционная игра

1. Игру обозначаем $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Двое игроков: $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ и $\mathbf{2}_{\simeq}$
2. В начале «фишки» находятся в точках $x \in W$ и $x' \in W'$.
3. Ходы делаются по очереди, передвиганием «фишки» по ребру.
4. Первый игрок выбирает, в какой модели делать ход; второму игроку приходится отвечать в «противоположной модели».
5. Перед игрой и после каждого хода в текущей позиции (a, a') проверяется $\equiv_{\mathrm{Var}}$, означающее:
   $(M, a) \equiv_{\mathrm{Var}} (M', a')$: $\quad \big(M, a \models p \;\Leftrightarrow\; M', a' \models p\big)$ для $\forall p \in \mathrm{Var}$.
6. Если $\equiv_{\mathrm{Var}}$ нарушилось, то партию выиграл $\mathbf{1}_{\not\simeq}$.
7. Если какой-то игрок не может сделать ход, т.к. нет исходящих рёбер, то партию выиграл его противник.
8. Если игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ «продержался» бесконечное число ходов, то он выиграл эту партию.

Из теории игр: для каждого конкретного выбора отмеченных моделей (M, x) и (M', x'), хотя бы один из игроков имеет выигрышную стратегию в игре $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Описание игры $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».

Описание игры $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».
Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\approx}$ выиграл.

Описание игры $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».

Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathrm{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\approx}$ выиграл.

Далее играются ∞ число раундов:

Описание игры $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».

Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathrm{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\approx}$ выиграл.

Далее играются ∞ число раундов:

Пусть в текущий момент «фишки» находятся в точках a и a'.

Описание игры $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».
Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\approx}$ выиграл.
Далее играются ∞ число раундов:

Пусть в текущий момент «фишки» находятся в точках a и a'.

- Первый игрок $\mathbf{1}_{\not\approx}$ пытается сделать ход в одной из двух моделей (передвинуть фишку a или a' по ребру);

Описание игры $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».

Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.

Далее играются ∞ число раундов:

Пусть в текущий момент «фишки» находятся в точках a и a'.

• Первый игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ пытается сделать ход в одной из двух моделей (передвинуть фишку a или a' по ребру);

– если не может ни в одной из моделей, то $\mathbf{2}_{\simeq}$ выиграл.

Описание игры $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».

Проверка: если $(M,x) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M',x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.

Далее играются ∞ число раундов:

Пусть в текущий момент «фишки» находятся в точках a и a'.

- Первый игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ пытается сделать ход в одной из двух моделей (передвинуть фишку a или a' по ребру);

– если не может ни в одной из моделей, то $\mathbf{2}_{\simeq}$ выиграл.

- Второй игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ пытается сделать ход (передвинуть фишку) в «противоположной» модели;

Описание игры $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».
Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathrm{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.
Далее играются ∞ число раундов:

Пусть в текущий момент «фишки» находятся в точках a и a'.
• Первый игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ пытается сделать ход в одной из двух моделей (передвинуть фишку a или a' по ребру);
– если не может ни в одной из моделей, то $\mathbf{2}_{\simeq}$ выиграл.
• Второй игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ пытается сделать ход (передвинуть фишку) в «противоположной» модели;
– если он не может сделать ход в этой модели, то $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.

Описание игры $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».
Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.
Далее играются ∞ число раундов:

Пусть в текущий момент «фишки» находятся в точках a и a'.
• Первый игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ пытается сделать ход в одной из двух моделей (передвинуть фишку a или a' по ребру);
– если не может ни в одной из моделей, то $\mathbf{2}_{\simeq}$ выиграл.
• Второй игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ пытается сделать ход (передвинуть фишку) в «противоположной» модели;
– если он не может сделать ход в этой модели, то $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.
Теперь фишки оказались в точках b и b', причем $a\,R\,b$ и $a'\,R'\,b'$.

Описание игры $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».
Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.
Далее играются ∞ число раундов:

Пусть в текущий момент «фишки» находятся в точках a и a'.
• Первый игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ пытается сделать ход в одной из двух моделей (передвинуть фишку a или a' по ребру);
– если не может ни в одной из моделей, то $\mathbf{2}_{\simeq}$ выиграл.
• Второй игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ пытается сделать ход (передвинуть фишку) в «противоположной» модели;
– если он не может сделать ход в этой модели, то $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.
Теперь фишки оказались в точках b и b', причем $a\,R\,b$ и $a'\,R'\,b'$.
Проверка: если $(M, b) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', b')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.

Описание игры $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$

В точках x и x' стоят «фишки».
Проверка: если $(M, x) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', x')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.
Далее играются ∞ число раундов:

Пусть в текущий момент «фишки» находятся в точках a и a'.
• Первый игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ пытается сделать ход в одной из двух моделей (передвинуть фишку a или a' по ребру);
– если не может ни в одной из моделей, то $\mathbf{2}_{\simeq}$ выиграл.
• Второй игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ пытается сделать ход (передвинуть фишку) в «противоположной» модели;
– если он не может сделать ход в этой модели, то $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.
Теперь фишки оказались в точках b и b', причем $a\,R\,b$ и $a'\,R'\,b'$.
Проверка: если $(M, b) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', b')$, то игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ выиграл.

Если ∞ число раундов прошло успешно, то $\mathbf{2}_{\simeq}$ выиграл.

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows (M', x')$, если в игре $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ имеет выигрышную стратегию.

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows (M', x')$, если в игре $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_\simeq$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема (Игровая характеризация бисимуляции)

$$(M, x) \rightleftarrows (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \simeq (M', x').$$

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows (M', x')$, если в игре $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_\simeq$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема (Игровая характеризация бисимуляции)

$$(M, x) \rightleftarrows (M', x') \iff (M, x) \simeq (M', x').$$

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Зафиксируем бисимуляцию $Z \subseteq (W \times W')$, т.ч. $x\,Z\,x'$.

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M,x) \rightleftarrows (M',x')$, если в игре $\mathrm{Game}_\infty(\langle M,x\rangle,\langle M',x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_\simeq$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема (Игровая характеризация бисимуляции)

$$(M,x) \rightleftarrows (M',x') \iff (M,x) \simeq (M',x').$$

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Зафиксируем бисимуляцию $Z \subseteq (W \times W')$, т.ч. $x\,Z\,x'$.

Выигрышная стратегия игрока $\mathbf{2}_\simeq$: *на каждый ход игрока* $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ *игрок* $\mathbf{2}_\simeq$ *должен отвечать так, чтобы новые точки находились в отношении* Z.

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M,x) \rightleftarrows (M',x')$, если в игре $\mathrm{Game}_\infty(\langle M,x\rangle,\langle M',x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_\simeq$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема (Игровая характеризация бисимуляции)

$$(M,x) \rightleftarrows (M',x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M,x) \simeq (M',x').$$

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Зафиксируем бисимуляцию $Z \subseteq (W \times W')$, т.ч. $x\,Z\,x'$.

Выигрышная стратегия игрока $\mathbf{2}_\simeq$: *на каждый ход игрока* $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ *игрок* $\mathbf{2}_\simeq$ *должен отвечать так, чтобы новые точки находились в отношении* Z.

Если после n ходов была позиция (a,a'), причем $a\,Z\,a'$, то для любого хода $a \xrightarrow{R} b$ игрока $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ в модели M, есть ответный ход $a' \xrightarrow{R'} b'$ для игрока $\mathbf{2}_\simeq$ в модели M', чтобы поддержать инвариант. $\square$

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows (M', x')$, если в игре $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_\simeq$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема (Игровая характеризация бисимуляции)

$$(M, x) \rightleftarrows (M', x') \iff (M, x) \simeq (M', x').$$

Доказательство.

$(\Longrightarrow)$

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows (M', x')$, если в игре $\mathrm{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_\simeq$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема (Игровая характеризация бисимуляции)

$$(M, x) \rightleftarrows (M', x') \iff (M, x) \simeq (M', x').$$

Доказательство.

($\Longrightarrow$) Само отношение $\rightleftarrows$ является бисимуляцией между M и M'.

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M,x) \rightleftarrows (M',x')$, если в игре $\mathrm{Game}_\infty(\langle M,x\rangle, \langle M',x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_\simeq$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема (Игровая характеризация бисимуляции)

$$(M,x) \rightleftarrows (M',x') \quad\Longleftrightarrow\quad (M,x) \simeq (M',x').$$

Доказательство.

($\Longrightarrow$) Само отношение $\rightleftarrows$ является бисимуляцией между M и M'.
(zig) Если $a \rightleftarrows a'$ и $a\,R\,b$, то
на всякий ход $a \xrightarrow{R} b$ игрока $\mathbf{1}_{\not\simeq}$
игрок $\mathbf{2}_\simeq$ имеет ответный ход $a' \xrightarrow{R'} b'$,
приводящий его к выигрышу, то есть $b \rightleftarrows b'$.

Игровая характеризация бисимуляции

Определение (Игровая эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows (M', x')$, если в игре $\mathsf{Game}_\infty(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема (Игровая характеризация бисимуляции)

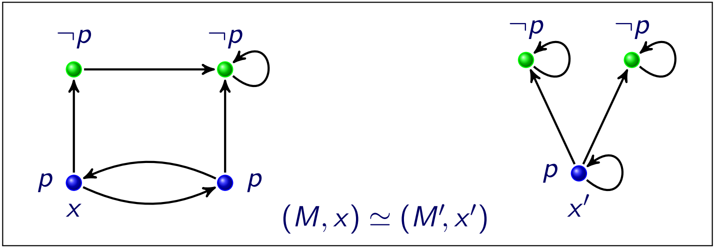
$$(M, x) \rightleftarrows (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \simeq (M', x').$$

Доказательство.

($\Longrightarrow$) Само отношение $\rightleftarrows$ является бисимуляцией между M и M'.
(zig) Если $a \rightleftarrows a'$ и $a \, R \, b$, то
на всякий ход $a \xrightarrow{R} b$ игрока $\mathbf{1}_{\not\simeq}$
игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ имеет ответный ход $a' \xrightarrow{R'} b'$,
приводящий его к выигрышу, то есть $b \rightleftarrows b'$.
(zag) Аналогично. $\square$

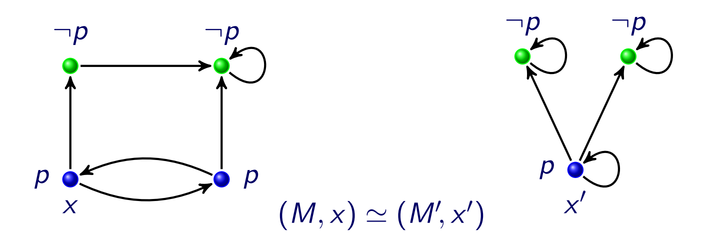
Построение выигрышной стратегии

Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\simeq}$.



Построение выигрышной стратегии

Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\simeq}$.

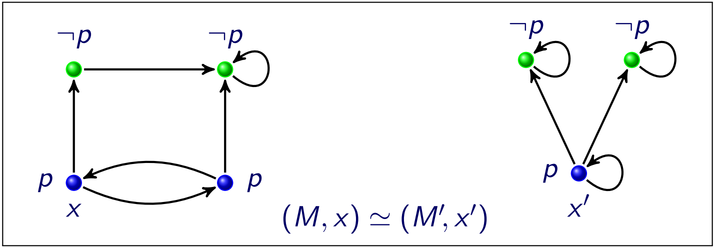


$(M, x) \simeq (M', x')$

Пока игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ бегает по синим точкам, игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ тоже должен оставаться на синих точках.

Построение выигрышной стратегии

Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\simeq}$.

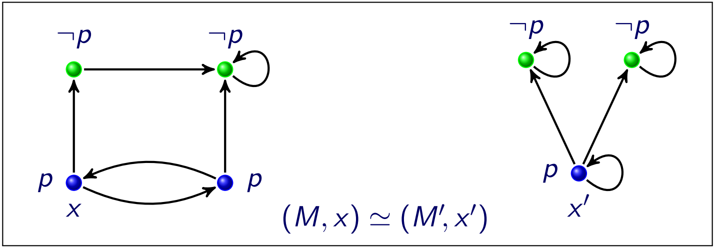


Пока игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ бегает по синим точкам, игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ тоже должен оставаться на синих точках.

Как только игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ шагнёт в зелёную точку, игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ тоже должен шагнуть в зеленую точку (в противоположной модели).

Построение выигрышной стратегии

Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\simeq}$.



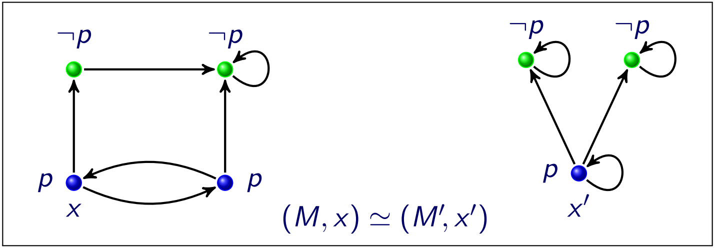
Пока игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ бегает по синим точкам, игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ тоже должен оставаться на синих точках.

Как только игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ шагнёт в зелёную точку, игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ тоже должен шагнуть в зеленую точку (в противоположной модели).

Далее игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ непременно будет оставаться в зеленых точках, и игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ сможет отвечать ему зеленой точкой.

Построение выигрышной стратегии

Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\simeq}$.



Пока игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ бегает по синим точкам, игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ тоже должен оставаться на синих точках.

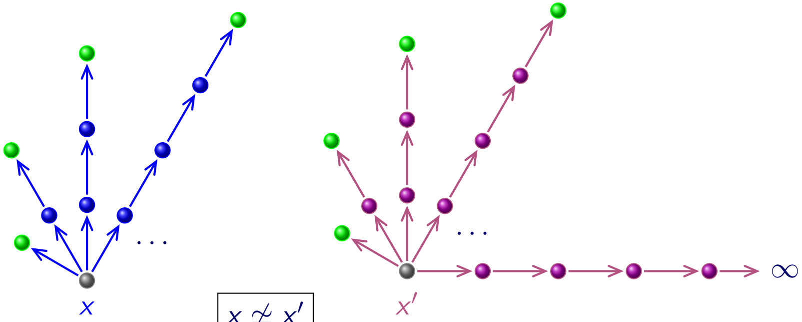
Как только игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ шагнёт в зелёную точку, игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ тоже должен шагнуть в зеленую точку (в противоположной модели).

Далее игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ непременно будет оставаться в зеленых точках, и игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ сможет отвечать ему зеленой точкой.

Так игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ гарантированно выиграет партию.

Построение выигрышной стратегии

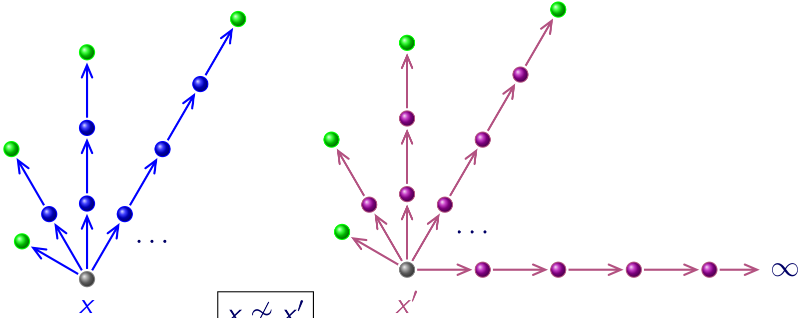
Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{1}_{\not\simeq}$.



$\boxed{x \not\simeq x'}$

Построение выигрышной стратегии

Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{1}_{\not\asymp}$.

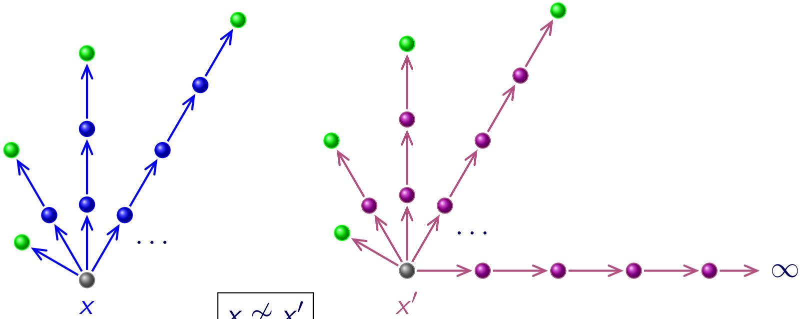


$\boxed{x \not\asymp x'}$

Игрок $\mathbf{1}_{\not\asymp}$ должен сделать 1-й ход на бесконечную ветвь в M'.

Построение выигрышной стратегии

Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{1}_{\not\asymp}$.



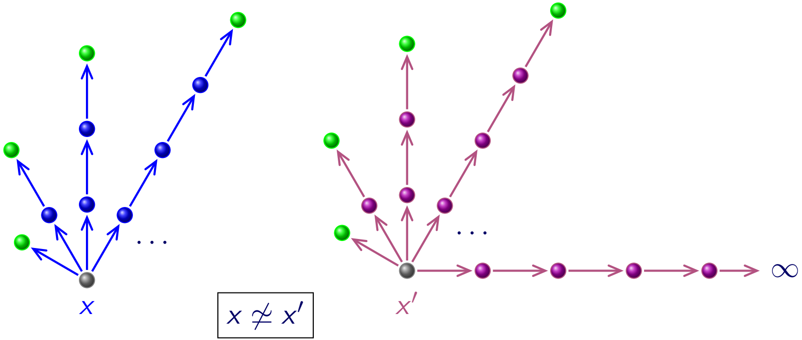
$\boxed{x \not\asymp x'}$

Игрок $\mathbf{1}_{\not\asymp}$ должен сделать 1-й ход на бесконечную ветвь в M'.

На последующих ходах игрок $\mathbf{1}_{\not\asymp}$ продвигает фишку по беск. цепи.

Построение выигрышной стратегии

Предъявите выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{1}_{\not\simeq}$.



Игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ должен сделать 1-й ход на бесконечную ветвь в M'.

На последующих ходах игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$ продвигает фишку по беск. цепи.

Наступит момент, когда игрок $\mathbf{2}_{\simeq}$ достигнет тупика, ему некуда будет двигать фишку. Тем самым партию выиграет игрок $\mathbf{1}_{\not\simeq}$.

Связь между эквивалентностями

На данный момент имеем следующие связи:

$$\boxed{\rightleftarrows} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\simeq} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\equiv_{\mathsf{ML}}}$$

Бисимуляционная игра глубины n

1. Игра $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ для фиксированного $n \geqslant 0$.

Бисимуляционная игра глубины n

1. Игра $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ для фиксированного $n \geqslant 0$.
2. Заранее известно, что игра будет остановлена после n ходов (или ранее, если какому-то из игроков некуда ходить).

Бисимуляционная игра глубины n

1. Игра $\mathrm{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ для фиксированного $n \geqslant 0$.
2. Заранее известно, что игра будет остановлена после n ходов (или ранее, если какому-то из игроков некуда ходить).
3. Игроков теперь будем обозначать $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ и $\mathbf{2}_{\equiv}$.

Бисимуляционная игра глубины n

1. Игра $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ для фиксированного $n \geqslant 0$.
2. Заранее известно, что игра будет остановлена после n ходов (или ранее, если какому-то из игроков некуда ходить).
3. Игроков теперь будем обозначать $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ и $\mathbf{2}_{\equiv}$.
4. Если игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ смог «продержаться» n раундов, то игра останавливается и $\mathbf{2}_{\equiv}$ выиграл.

Бисимуляционная игра глубины n

1. Игра $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ для фиксированного $n \geqslant 0$.
2. Заранее известно, что игра будет остановлена после n ходов (или ранее, если какому-то из игроков некуда ходить).
3. Игроков теперь будем обозначать $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ и $\mathbf{2}_{\equiv}$.
4. Если игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ смог «продержаться» n раундов, то игра останавливается и $\mathbf{2}_{\equiv}$ выиграл.

Определение (Игровая n-эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$, если в игре $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию.

Бисимуляционная игра глубины n

1. Игра $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ для фиксированного $n \geqslant 0$.
2. Заранее известно, что игра будет остановлена после n ходов (или ранее, если какому-то из игроков некуда ходить).
3. Игроков теперь будем обозначать $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ и $\mathbf{2}_{\equiv}$.
4. Если игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ смог «продержаться» n раундов, то игра останавливается и $\mathbf{2}_{\equiv}$ выиграл.

Определение (Игровая n-эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$, если в игре $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию.

Что в модальной логике характеризуют такие игры?

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$\mathrm{d}(p_i) = 0$$

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{d}(p_i) & = & 0 \\
\mathrm{d}(\neg A) & = & \mathrm{d}(A)
\end{array}
$$

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{d}(p_i) & = & 0 \\
\mathrm{d}(\neg A) & = & \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(A \wedge B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\}
\end{array}
$$

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{d}(p_i) & = & 0 \\
\mathrm{d}(\neg A) & = & \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(A \wedge B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \vee B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\}
\end{array}
$$

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{d}(p_i) & = & 0 \\
\mathrm{d}(\neg A) & = & \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(A \wedge B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \vee B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \to B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\}
\end{array}
$$

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{d}(p_i) & = & 0 \\
\mathrm{d}(\neg A) & = & \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(A \wedge B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\, \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \vee B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\, \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \to B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\, \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(\Diamond A) & = & 1 + \mathrm{d}(A)
\end{array}
$$

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{d}(p_i) & = & 0 \\
\mathrm{d}(\neg A) & = & \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(A \wedge B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\ \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \vee B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\ \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \to B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\ \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(\Diamond A) & = & 1 + \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(\Box A) & = & 1 + \mathrm{d}(A)
\end{array}
$$

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{d}(p_i) & = & 0 \\
\mathrm{d}(\neg A) & = & \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(A \wedge B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\, \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \vee B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\, \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \to B) & = & \max\{\mathrm{d}(A),\, \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(\Diamond A) & = & 1 + \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(\Box A) & = & 1 + \mathrm{d}(A)
\end{array}
$$

Какова модальная глубина этой формулы?

$$\Box(p \to \Diamond(q \vee p)) \to \Box(\Box\neg p \wedge \Diamond(q \to \Box p))$$

Модальная глубина модальной формулы

Это максимальная «вложенность» операторов $\Box$ и $\Diamond$.

Определение

Модальная глубина формулы A обозначается $\mathrm{d}(A)$ и определяется индукцией по построению формулы A:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{d}(p_i) & = & 0 \\
\mathrm{d}(\neg A) & = & \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(A \wedge B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \vee B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(A \to B) & = & \max\{\mathrm{d}(A), \mathrm{d}(B)\} \\
\mathrm{d}(\Diamond A) & = & 1 + \mathrm{d}(A) \\
\mathrm{d}(\Box A) & = & 1 + \mathrm{d}(A)
\end{array}
$$

Какова модальная глубина этой формулы? $\mathrm{d}(A) = 3$.

$$\Box(p \to \Diamond(q \vee p)) \to \Box(\Box\neg p \wedge \Diamond(q \to \Box p))$$

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathrm{ML}_n = \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathrm{ML}_n = \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathrm{ML}_n$.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathsf{ML}_n = \{A \in \mathsf{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.

$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathsf{ML}_n$.

Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathsf{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathrm{ML}_n = \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathrm{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathrm{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.
Модальные формулы A и B называются эквивалентными, если формула $(A \leftrightarrow B)$ общезначима.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathrm{ML}_n = \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathrm{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathrm{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.
Модальные формулы A и B называются эквивалентными, если формула $(A \leftrightarrow B)$ общезначима.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $p_1, \ldots, p_\ell$.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathsf{ML}_n = \{A \in \mathsf{Fm} \mid \mathsf{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathsf{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathsf{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.
Модальные формулы A и B называются эквивалентными, если формула $(A \leftrightarrow B)$ общезначима.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $p_1, \ldots, p_\ell$.

Доказательство.

Обозначим это количество $S(n, \ell)$.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathrm{ML}_n = \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathrm{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathrm{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.
Модальные формулы A и B называются эквивалентными, если формула $(A \leftrightarrow B)$ общезначима.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $p_1, \ldots, p_\ell$.

Доказательство.

Обозначим это количество $S(n, \ell)$. Очевидно: $S(0, \ell) = 2^{2^\ell}$.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathsf{ML}_n = \{A \in \mathsf{Fm} \mid \mathsf{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathsf{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathsf{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.
Модальные формулы A и B называются эквивалентными, если формула $(A \leftrightarrow B)$ общезначима.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $p_1, \ldots, p_\ell$.

Доказательство.

Обозначим это количество $S(n, \ell)$. Очевидно: $S(0, \ell) = 2^{2^\ell}$.
Всякая формула A глубины $\mathsf{d}(A) \leqslant n + 1$ есть булева комбинация:

$$A = \mathcal{B}(p_1, \ldots, p_\ell, \Box B_1, \ldots \Box B_t),$$

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathsf{ML}_n = \{A \in \mathsf{Fm} \mid \mathsf{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathsf{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathsf{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.
Модальные формулы A и B называются эквивалентными, если формула $(A \leftrightarrow B)$ общезначима.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ *от переменных* $p_1, \ldots, p_\ell$.

Доказательство.

Обозначим это количество $S(n, \ell)$. Очевидно: $S(0, \ell) = 2^{2^\ell}$.
Всякая формула A глубины $\mathsf{d}(A) \leqslant n + 1$ есть булева комбинация:

$$A = \mathcal{B}(p_1, \ldots, p_\ell, \Box B_1, \ldots \Box B_t),$$ где можно считать $t \leqslant S(n, \ell)$.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathsf{ML}_n = \{A \in \mathsf{Fm} \mid \mathsf{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathsf{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathsf{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.
Модальные формулы A и B называются эквивалентными, если формула $(A \leftrightarrow B)$ общезначима.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $p_1, \ldots, p_\ell$.

Доказательство.

Обозначим это количество $S(n, \ell)$. Очевидно: $S(0, \ell) = 2^{2^\ell}$.
Всякая формула A глубины $\mathsf{d}(A) \leqslant n + 1$ есть булева комбинация:

$$A = \mathcal{B}(p_1, \ldots, p_\ell, \Box B_1, \ldots \Box B_t), \text{ где можно считать } t \leqslant S(n, \ell).$$

Таких неэквивалентных комбинаций: $S(n + 1, \ell) \leqslant 2^{2^{\ell + S(n,\ell)}}$. $\square$

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathrm{ML}_n = \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathrm{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathrm{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $p_1, \ldots, p_\ell$.

Следствие (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Отношение $\equiv_n$ — конечного индекса.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathrm{ML}_n = \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathrm{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathrm{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $p_1, \ldots, p_\ell$.

Следствие (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Отношение $\equiv_n$ — конечного индекса.
То есть класс всех отмеченных моделей разбивается лишь на конечное число $\equiv_n$-классов эквивалентности.

Модальные формулы ограниченной глубины

Обозначаем $\mathrm{ML}_n = \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathrm{d}(A) \leqslant n\}$ — все формулы глубины $\leqslant n$.
$(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает: $M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A$, для всех $A \in \mathrm{ML}_n$.
Важно: Всюду далее число переменных конечно: $\mathrm{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.

Лемма

Существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $p_1, \ldots, p_\ell$.

Следствие (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Отношение $\equiv_n$ — конечного индекса.
То есть класс всех отмеченных моделей разбивается лишь на конечное число $\equiv_n$-классов эквивалентности.

Доказательство.

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — все попарно неэкв. формулы в ML_n. Если отмеч. модели (M, x) и (M', x') «согласны» по $A_1, \ldots, A_s$, то они $\equiv_n$. $\square$

Игровая характеризация $\equiv_n$

Определение (Игровая n-эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$, если в игре $\mathrm{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию.

Игровая характеризация $\equiv_n$

Определение (Игровая n-эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$, если в игре $\mathrm{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию.

Определение

Модальная n-эквивалентность $(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает:

$$M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A, \text{ для всех формул } A \text{ глубины } \mathrm{d}(A) \leqslant n.$$

Игровая характеризация $\equiv_n$

Определение (Игровая n-эквивалентность отм. моделей)

Пишем $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$, если в игре $\mathrm{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию.

Определение

Модальная n-эквивалентность $(M, x) \equiv_n (M', x')$ означает:

$$M, x \models A \Leftrightarrow M', x' \models A, \text{ для всех формул } A \text{ глубины } \mathrm{d}(A) \leqslant n.$$

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n.

Теорема (При условии $|\mathsf{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \quad\Longleftrightarrow\quad (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathsf{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n + 1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_n (M', x'),$ для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n + 1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна. Пусть $\mathbf{2}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n+1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна. Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$. Докажем, что $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n+1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.
Докажем, что $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n + 1$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n+1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.
Докажем, что $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n+1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'),$ для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n + 1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.
Докажем, что $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n + 1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.
Очевидно, $(M, x) \equiv_{\mathrm{Var}} (M', x')$ (иначе бы $\mathbf{2}_{\equiv}$ проигрывал сразу).

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x')$, для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

<u>**Шаг для** $n + 1$</u>. $(\Longrightarrow)$ Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.
Докажем, что $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n + 1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.
Очевидно, $(M, x) \equiv_{\mathrm{Var}} (M', x')$ (иначе бы $\mathbf{2}_\equiv$ проигрывал сразу).
Проверим теперь: (M, x) и (M', x') согласны на $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M,x) \rightleftarrows_n (M',x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M,x) \equiv_n (M',x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n+1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M,x\rangle, \langle M',x'\rangle)$.
Докажем, что $(M,x) \equiv_{n+1} (M',x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n+1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.
Очевидно, $(M,x) \equiv_{\mathrm{Var}} (M',x')$ (иначе бы $\mathbf{2}_\equiv$ проигрывал сразу).
Проверим теперь: (M,x) и (M',x') согласны на $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.

$M,x \models \Diamond B$

Теорема (При условии $|\mathsf{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x')$, для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathsf{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

<u>**Шаг для** $n+1$</u>. $(\Longrightarrow)$ Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathsf{Game}_{n+1}(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.
Докажем, что $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathsf{d}(A) \leqslant n + 1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathsf{d}(B) \leqslant n$.
Очевидно, $(M, x) \equiv_{\mathsf{Var}} (M', x')$ (иначе бы $\mathbf{2}_{\equiv}$ проигрывал сразу).
Проверим теперь: (M, x) и (M', x') согласны на $\Diamond B$, где $\mathsf{d}(B) \leqslant n$.

$M, x \models \Diamond B \implies \exists y \colon x\, R\, y$ и $M, y \models B$

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M,x) \rightleftarrows_n (M',x') \iff (M,x) \equiv_n (M',x'),$ для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

<u>**Шаг для** $n+1$</u>. $(\Longrightarrow)$ Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M,x\rangle, \langle M',x'\rangle)$.
Докажем, что $(M,x) \equiv_{n+1} (M',x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n+1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.
Очевидно, $(M,x) \equiv_{\mathrm{Var}} (M',x')$ (иначе бы $\mathbf{2}_{\equiv}$ проигрывал сразу).
Проверим теперь: (M,x) и (M',x') согласны на $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.

$M,x \models \Diamond B \implies \exists y\colon x\,R\,y$ и $M,y \models B$
$\implies$ На такой ход игрока $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ у игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ есть ответный ход $x' \mapsto y'$, где он имеет выигрышную стратегию в n-раудной игре.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M,x) \rightleftarrows_n (M',x') \iff (M,x) \equiv_n (M',x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n+1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M,x\rangle,\langle M',x'\rangle)$.
Докажем, что $(M,x) \equiv_{n+1} (M',x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n+1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.
Очевидно, $(M,x) \equiv_{\mathrm{Var}} (M',x')$ (иначе бы $\mathbf{2}_{\equiv}$ проигрывал сразу).
Проверим теперь: (M,x) и (M',x') согласны на $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.

$M,x \models \Diamond B \implies \exists y\colon x\,R\,y$ и $M,y \models B$
$\implies$ На такой ход игрока $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ у игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ есть ответный ход $x' \mapsto y'$, где он имеет выигрышную стратегию в n-раудной игре.
$\implies y \equiv_n y'$ по предположению индукции.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M,x) \rightleftarrows_n (M',x') \iff (M,x) \equiv_n (M',x'),$ для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n+1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M,x\rangle, \langle M',x'\rangle)$.
Докажем, что $(M,x) \equiv_{n+1} (M',x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n+1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.
Очевидно, $(M,x) \equiv_{\mathrm{Var}} (M',x')$ (иначе бы $\mathbf{2}_{\equiv}$ проигрывал сразу).
Проверим теперь: (M,x) и (M',x') согласны на $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.

$M,x \models \Diamond B \implies \exists y\colon x\,R\,y$ и $M,y \models B$
$\implies$ На такой ход игрока $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ у игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ есть ответный ход $x' \mapsto y'$, где он имеет выигрышную стратегию в n-раудной игре.
$\implies y \equiv_n y'$ по предположению индукции.
$\implies M',y' \models B$

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M,x) \rightleftarrows_n (M',x') \iff (M,x) \equiv_n (M',x')$, для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 0$ тривиальна: победитель выясняется по $\equiv_{\mathrm{Var}}$, которое равносильно $\equiv_0$.

Шаг для $n+1$. ($\Longrightarrow$) Здесь конечность числа переменных не важна.
Пусть $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в $\mathrm{Game}_{n+1}(\langle M,x\rangle, \langle M',x'\rangle)$.
Докажем, что $(M,x) \equiv_{n+1} (M',x')$.
Берем любую формулу A глубины $\mathrm{d}(A) \leqslant n+1$.
Она есть булева комб. переменных и формул вида $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.
Очевидно, $(M,x) \equiv_{\mathrm{Var}} (M',x')$ (иначе бы $\mathbf{2}_{\equiv}$ проигрывал сразу).
Проверим теперь: (M,x) и (M',x') согласны на $\Diamond B$, где $\mathrm{d}(B) \leqslant n$.

$M,x \models \Diamond B \implies \exists y\colon x\,R\,y$ и $M,y \models B$
$\implies$ На такой ход игрока $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ у игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ есть ответный ход $x' \mapsto y'$, где он имеет выигрышную стратегию в n-раудной игре.
$\implies y \equiv_n y'$ по предположению индукции.
$\implies M',y' \models B \implies M',x' \models \Diamond B$. $\triangleleft$

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_n (M', x'),$ для всякого $n \geqslant 0$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство.

<u>**Шаг для** $n+1$</u>. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство.

Шаг для $n + 1$. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.
Пусть $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n + 1)$-раундной игре.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'),$ для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство.

<u>Шаг для $n + 1$</u>. $(\Longleftarrow)$ Здесь конечность числа переменных важна.

Пусть $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n + 1)$-раундной игре.

Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M,x) \rightleftarrows_n (M',x') \iff (M,x) \equiv_n (M',x'),$ для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство.

Шаг для $n+1$. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.

Пусть $(M,x) \equiv_{n+1} (M',x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n+1)$-раундной игре.

Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.

Пусть игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ сделал ход $x \mapsto y$ в модели M (для M' аналог.).

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство.
Шаг для $n+1$. $(\Longleftarrow)$ Здесь конечность числа переменных важна.
Пусть $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n+1)$-раундной игре.
Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.
Пусть игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ сделал ход $x \mapsto y$ в модели M (для M' аналог.).
Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — все попарно неэкв. формулы глубины $\leqslant n$, истинные в M, y. Обозначим $A := A_1 \wedge \ldots \wedge A_s$. Очевидно $\mathrm{d}(A) \leqslant n$ и $M, y \models A$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M,x) \rightleftarrows_n (M',x') \iff (M,x) \equiv_n (M',x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство.

Шаг для $n+1$. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.

Пусть $(M,x) \equiv_{n+1} (M',x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n+1)$-раундной игре.

Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.

Пусть игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ сделал ход $x \mapsto y$ в модели M (для M' аналог.).

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — все попарно неэкв. формулы глубины $\leqslant n$, истинные в M,y. Обозначим $A := A_1 \wedge \ldots \wedge A_s$. Очевидно $\mathrm{d}(A) \leqslant n$ и $M,y \models A$.

Значит, $M,x \models \Diamond A$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x'), \qquad \text{для всякого } n \geqslant 0.$$

Доказательство.

Шаг для $n+1$. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.
Пусть $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n+1)$-раундной игре.
Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.
Пусть игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ сделал ход $x \mapsto y$ в модели M (для M' аналог.).
Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — все попарно неэкв. формулы глубины $\leqslant n$, истинные в M, y. Обозначим $A := A_1 \wedge \ldots \wedge A_s$. Очевидно $\mathrm{d}(A) \leqslant n$ и $M, y \models A$.
Значит, $M, x \models \Diamond A$.
Ввиду $\equiv_{n+1}$ получаем $M', x' \models \Diamond A$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x')$, для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство.

<u>**Шаг для** $n+1$</u>. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.

Пусть $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n+1)$-раундной игре.

Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.

Пусть игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ сделал ход $x \mapsto y$ в модели M (для M' аналог.).

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — все попарно неэкв. формулы глубины $\leqslant n$, истинные в M, y. Обозначим $A := A_1 \wedge \ldots \wedge A_s$. Очевидно $\mathrm{d}(A) \leqslant n$ и $M, y \models A$.

Значит, $M, x \models \Diamond A$.

Ввиду $\equiv_{n+1}$ получаем $M', x' \models \Diamond A$.

Значит $\exists y'$: $x' \, R' \, y'$ и $M', y' \models A$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_n (M', x'),$ для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство.

Шаг для $n+1$. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.

Пусть $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n+1)$-раундной игре.

Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.

Пусть игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ сделал ход $x \mapsto y$ в модели M (для M' аналог.).

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — все попарно неэкв. формулы глубины $\leqslant n$, истинные в M, y. Обозначим $A := A_1 \wedge \ldots \wedge A_s$. Очевидно $\mathrm{d}(A) \leqslant n$ и $M, y \models A$.

Значит, $M, x \models \Diamond A$.

Ввиду $\equiv_{n+1}$ получаем $M', x' \models \Diamond A$.

Значит $\exists y'$: $x' \, R' \, y'$ и $M', y' \models A$.

Именно в эту точку y' и нужно ходить игроку $\mathbf{2}_{\equiv}$!

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M, x) \rightleftarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x')$, для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство.

Шаг для $n + 1$. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.

Пусть $(M, x) \equiv_{n+1} (M', x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n + 1)$-раундной игре.

Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.

Пусть игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ сделал ход $x \mapsto y$ в модели M (для M' аналог.).

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — все попарно неэкв. формулы глубины $\leqslant n$, истинные в M, y. Обозначим $A := A_1 \wedge \ldots \wedge A_s$. Очевидно $\mathrm{d}(A) \leqslant n$ и $M, y \models A$.

Значит, $M, x \models \Diamond A$.

Ввиду $\equiv_{n+1}$ получаем $M', x' \models \Diamond A$.

Значит $\exists y'$: $x' \, R' \, y'$ и $M', y' \models A$.

Именно в эту точку y' и нужно ходить игроку $\mathbf{2}_{\equiv}$!

Упражнение. $(M, y) \equiv_n (M', y')$.

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

$(M,x) \rightleftarrows_n (M',x') \iff (M,x) \equiv_n (M',x')$, для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство.

Шаг для $n+1$. ($\Longleftarrow$) Здесь конечность числа переменных важна.
Пусть $(M,x) \equiv_{n+1} (M',x')$. Построим выигрышную стратегию для игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$ в $(n+1)$-раундной игре.
Он не проиграет сразу же, ибо $\equiv_{\mathrm{Var}}$ имеет место.
Пусть игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ сделал ход $x \mapsto y$ в модели M (для M' аналог.).
Пусть $A_1, \dots, A_s$ — все попарно неэкв. формулы глубины $\leqslant n$, истинные в M, y. Обозначим $A := A_1 \wedge \dots \wedge A_s$. Очевидно $\mathrm{d}(A) \leqslant n$ и $M, y \models A$.
Значит, $M, x \models \Diamond A$.
Ввиду $\equiv_{n+1}$ получаем $M', x' \models \Diamond A$.
Значит $\exists y'$: $x' \, R' \, y'$ и $M', y' \models A$.
Именно в эту точку y' и нужно ходить игроку $\mathbf{2}_{\equiv}$!

Упражнение. $(M,y) \equiv_n (M',y')$.

Тогда по предположению индукции $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию на оставшиеся n раундов. $\lhd$

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Игра $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ играется так:

1. Игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ выбирает любое число $n \geqslant 0$.

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Игра $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ играется так:

1. Игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ выбирает любое число $n \geqslant 0$.
2. Далее играется $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathrm{ML}}$

Игра $\mathrm{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ играется так:

1. Игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ выбирает любое число $n \geqslant 0$.
2. Далее играется $\mathrm{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Обозначим $(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x')$, если игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в игре $\mathrm{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Игра $\mathrm{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ играется так:

1. Игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ выбирает любое число $n \geqslant 0$.
2. Далее играется $\mathrm{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Обозначим $(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x')$, если игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в игре $\mathrm{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Лемма

$$(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \geqslant 0 \;\; (M, x) \rightleftarrows_n (M', x').$$

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Игра $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ играется так:

1. Игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ выбирает любое число $n \geqslant 0$.
2. Далее играется $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Обозначим $(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x')$, если игрок $\mathbf{2}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Лемма

$$(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \geqslant 0 \;\; (M, x) \rightleftarrows_n (M', x').$$

Другими словами, $\rightleftarrows_\omega$ есть пересечение всех $\rightleftarrows_n$.

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Игра $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ играется так:

1. Игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ выбирает любое число $n \geqslant 0$.
2. Далее играется $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Обозначим $(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x')$, если игрок $\mathbf{2}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Лемма

$$(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \geqslant 0 \;\; (M, x) \rightleftarrows_n (M', x').$$

Другими словами, $\rightleftarrows_\omega$ есть пересечение всех $\rightleftarrows_n$.

Лемма

$$(M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \geqslant 0 \;\; (M, x) \equiv_n (M', x').$$

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Игра $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$ играется так:

1. Игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ выбирает любое число $n \geqslant 0$.
2. Далее играется $\mathsf{Game}_n(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Обозначим $(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x')$, если игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

Лемма

$$(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \geqslant 0 \;\; (M, x) \rightleftarrows_n (M', x').$$

Другими словами, $\rightleftarrows_\omega$ есть пересечение всех $\rightleftarrows_n$.

Лемма

$$(M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \geqslant 0 \;\; (M, x) \equiv_n (M', x').$$

Другими словами, $\equiv_{\mathsf{ML}}$ есть пересечение всех $\equiv_n$.

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Теорема (При условии $|\mathsf{Var}| < \infty$)

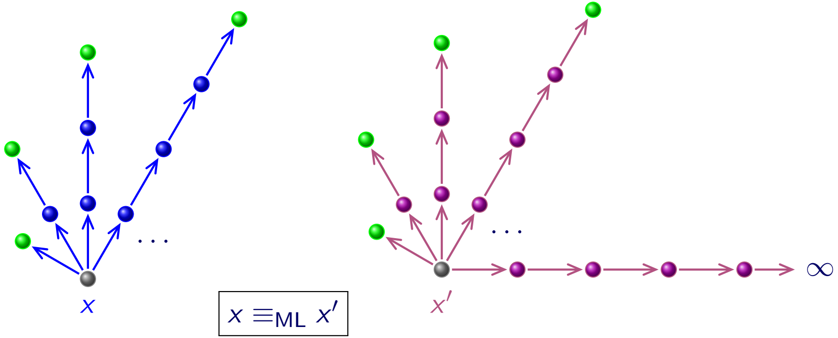
$$(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Теорема (При условии $|\mathsf{Var}| < \infty$)

$$(M, x) \rightleftarrows_\omega (M', x') \iff (M, x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', x').$$

Предъявите выигр. стратегию для $\mathbf{2}_\equiv$ в игре $\mathsf{Game}_\omega(\langle M, x\rangle, \langle M', x'\rangle)$.

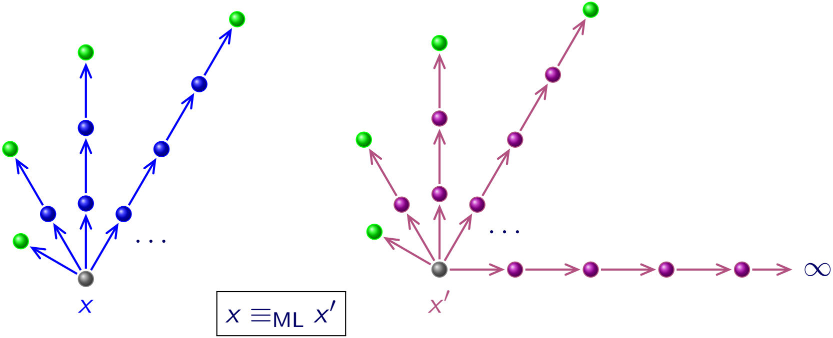


Игровая характеризация модальной экв. $\equiv_{\mathsf{ML}}$

Теорема (При условии $|\mathsf{Var}| < \infty$)

$$(M,x) \rightleftarrows_\omega (M',x') \quad \iff \quad (M,x) \equiv_{\mathsf{ML}} (M',x').$$

Предъявите выигр. стратегию для $\mathbf{2}_\equiv$ в игре $\mathsf{Game}_\omega(\langle M,x\rangle, \langle M',x'\rangle)$.



Если $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ выбрал число n, то игрок $\mathbf{2}_\equiv$ на своём первом ходе должен идти на ветвь длины $\geqslant n$. Там он заведомо «продержится» n раундов!

Связь между эквивалентностями

На данный момент имеем следующие связи (при $|\mathsf{Var}| < \infty$):

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные} \\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{?} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_0} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{?} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_n} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{?} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_{\mathsf{ML}}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq} & \Longleftrightarrow & \boxed{?}
\end{array}
$$

Ограниченные бисимуляции

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение (n-бисимуляция)

n-бисимуляция между моделями M и M' — это цепочка непустых отношений $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq (W \times W')$, таких что для всех $0 \leqslant i < n$:

Ограниченные бисимуляции

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение (n-бисимуляция)

n-бисимуляция между моделями M и M' — это цепочка непустых отношений $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq (W \times W')$, таких что для всех $0 \leqslant i < n$:

(var) $\quad x\, Z_0\, x' \quad \Longrightarrow \quad M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

Ограниченные бисимуляции

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение (n-бисимуляция)

n-бисимуляция между моделями M и M' — это цепочка непустых отношений $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq (W \times W')$, таких что для всех $0 \leqslant i < n$:

(var) $x \, Z_0 \, x' \quad \Longrightarrow \quad M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x \, Z_{i+1} \, x'$ и $x \, R \, y \quad \Longrightarrow$ существует $y' \in W'$, т.ч. $y \, Z_i \, y'$ и $x' \, R' \, y'$

Ограниченные бисимуляции

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение (n-бисимуляция)

n-бисимуляция между моделями M и M' — это цепочка непустых отношений $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq (W \times W')$, таких что для всех $0 \leqslant i < n$:

(var) $x \, Z_0 \, x' \quad \Longrightarrow \quad M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x \, Z_{i+1} \, x'$ и $x \, R \, y \quad \Longrightarrow$ существует $y' \in W'$, т.ч. $y \, Z_i \, y'$ и $x' \, R' \, y'$

(zag) $x \, Z_{i+1} \, x'$ и $x' \, R' \, y' \quad \Longrightarrow$ существует $y \in W$, т.ч. $y \, Z_i \, y'$ и $x \, R \, y$

Ограниченные бисимуляции

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение (n-бисимуляция)

n-бисимуляция между моделями M и M' — это цепочка непустых отношений $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq (W \times W')$, таких что для всех $0 \leqslant i < n$:

(var) $x\, Z_0\, x' \implies M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x\, Z_{i+1}\, x'$ и $x\, R\, y \implies$ существует $y' \in W'$, т.ч. $y\, Z_i\, y'$ и $x'\, R'\, y'$

(zag) $x\, Z_{i+1}\, x'$ и $x'\, R'\, y' \implies$ существует $y \in W$, т.ч. $y\, Z_i\, y'$ и $x\, R\, y$

Определение (n-бисимуляционная эквивалентность)

Пишем $(M, x) \simeq_n (M', x')$, если существует n-бисимуляция $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0$, такая что $x\, Z_n\, x'$.

Ограниченные бисимуляции

Пусть $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке.

Определение (n-бисимуляция)

n-бисимуляция между моделями M и M' — это цепочка непустых отношений $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq (W \times W')$, таких что для всех $0 \leqslant i < n$:

(var) $x\, Z_0\, x' \implies M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p$, для всех $p \in \mathrm{Var}$,

(zig) $x\, Z_{i+1}\, x'$ и $x\, R\, y \implies$ существует $y' \in W'$, т.ч. $y\, Z_i\, y'$ и $x'\, R'\, y'$

(zag) $x\, Z_{i+1}\, x'$ и $x'\, R'\, y' \implies$ существует $y \in W$, т.ч. $y\, Z_i\, y'$ и $x\, R\, y$

Определение (n-бисимуляционная эквивалентность)

Пишем $(M, x) \simeq_n (M', x')$, если существует n-бисимуляция $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0$, такая что $x\, Z_n\, x'$.
Говорим, что эти отмеченные модели n-бисимулируют.

Игровая характеризация n-бисимуляции

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n

Игровая характеризация n-бисимуляции

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют

Игровая характеризация n-бисимуляции

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.

Игровая характеризация n-бисимуляции

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.

Доказательство.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) уже было доказано ранее.

Игровая характеризация n-бисимуляции

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.

Доказательство.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) уже было доказано ранее.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) доказывается как для бесконечных игр и бисимуляций:

Игровая характеризация n-бисимуляции

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.

Доказательство.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) уже было доказано ранее.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) доказывается как для бесконечных игр и бисимуляций:

- Наличие n-бисимуляции даёт выигрышную стратегию игроку $\mathbf{2}_{\equiv}$;

Игровая характеризация n-бисимуляции

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.

Доказательство.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) уже было доказано ранее.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) доказывается как для бесконечных игр и бисимуляций:

- Наличие n-бисимуляции даёт выигрышную стратегию игроку $\mathbf{2}_{\equiv}$;
- Само семейство отношений $\rightleftarrows_n \subseteq \ldots \rightleftarrows_0$ есть n-бисимуляция.

$\square$

Связь между эквивалентностями

Окончательно имеем следующие связи (при $|\mathsf{Var}| < \infty$):

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные} \\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_0} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_n} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_{\mathsf{ML}}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq} & \Longleftrightarrow & \boxed{?}
\end{array}
$$

Связь между эквивалентностями

Окончательно имеем следующие связи (при $|\mathrm{Var}| < \infty$):

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные} \\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_0} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_n} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_{\mathrm{ML}}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq} & \Longleftrightarrow & \boxed{?}
\end{array}
$$

Здесь $\simeq_\omega$ означает: для всех n имеет место $\simeq_n$.

Связь между эквивалентностями

Окончательно имеем следующие связи (при $|\mathrm{Var}| < \infty$):

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные} \\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_0} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_n} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_{\mathrm{ML}}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq} & \Longleftrightarrow & \boxed{?}
\end{array}
$$

Здесь $\simeq_\omega$ означает: для всех n имеет место $\simeq_n$.
То есть $\simeq_\omega$ есть пересечение всех $\simeq_n$

Окончательно имеем следующие связи (при $|\mathsf{Var}| < \infty$):

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные}\\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_0}\\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow\\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_n}\\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow\\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_{\mathsf{ML}}}\\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow\\
\boxed{\rightleftarrows} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq} & \Longleftrightarrow & \boxed{?}
\end{array}$$

Здесь $\simeq_\omega$ означает: для всех n имеет место $\simeq_n$.
То есть $\simeq_\omega$ есть пересечение всех $\simeq_n$

Напоминание: отношение $\simeq_\omega$ (то есть наличие n-бисимуляций для всех n) не равносильно наличию бисимуляции $\simeq$!

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Ранее в док-ве для (M, x) и $n \geqslant 0$ мы написали формулу A — конъюнкцию всех формул глубины $\leqslant n$, истинных в (M, x).

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Ранее в док-ве для (M, x) и $n \geqslant 0$ мы написали формулу A — конъюнкцию всех формул глубины $\leqslant n$, истинных в (M, x).
И доказали: для любой другой (M', x') имеем

$$M', x' \models A \quad \Longleftrightarrow \qquad (M, x) \equiv_n (M', x').$$

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Ранее в док-ве для (M, x) и $n \geqslant 0$ мы написали формулу A — конъюнкцию всех формул глубины $\leqslant n$, истинных в (M, x).
И доказали: для любой другой (M', x') имеем

$$M', x' \models A \quad \Longleftrightarrow \qquad (M, x) \equiv_n (M', x').$$

Формула A — сама имеет глубину n.

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Ранее в док-ве для (M, x) и $n \geqslant 0$ мы написали формулу A — конъюнкцию всех формул глубины $\leqslant n$, истинных в (M, x).
И доказали: для любой другой (M', x') имеем

$$M', x' \models A \quad \Longleftrightarrow \qquad (M, x) \equiv_n (M', x').$$

Формула A — сама имеет глубину n.

Такую «универсальную формулу глубины n, описывающую данную отмеченную модель (M, x)», можно строить иначе, более «регулярно», по индукции.

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Определение (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Характеристическая (или выигрышная) формула глубины n отмеченной модели (M, x) обозн. $\chi_n(M, x)$ и строится по индукции:

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Определение (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Характеристическая (или выигрышная) формула глубины n отмеченной модели (M, x) обозн. $\chi_n(M, x)$ и строится по индукции:

$$\chi_0(M,x) \quad := \quad \bigwedge\{\ p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \models p_i\ \} \wedge \bigwedge\{ \neg p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \not\models p_i\ \}$$

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Определение (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Характеристическая (или выигрышная) формула глубины n отмеченной модели (M, x) обозн. $\chi_n(M, x)$ и строится по индукции:

$$
\begin{aligned}
\chi_0(M, x) \quad &:= \quad \bigwedge\{\ p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M, x \models p_i\ \} \wedge \\
& \qquad \bigwedge\{\neg p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M, x \not\models p_i\ \} \\
\chi_{n+1}(M, x) \quad &:= \quad \chi^0(M, x)
\end{aligned}
$$

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Определение (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Характеристическая (или выигрышная) формула глубины n отмеченной модели (M, x) обозн. $\chi_n(M, x)$ и строится по индукции:

$$\begin{aligned}
\chi_0(M,x) \quad &:= \quad \bigwedge\{\ p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \models p_i\ \} \wedge \\
&\qquad \bigwedge\{ \neg p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \not\models p_i\ \} \\
\chi_{n+1}(M,x) \quad &:= \quad \chi^0(M,x) \ \wedge \bigwedge_{y \in R(x)} \Diamond \chi_n(M,y)
\end{aligned}$$

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Определение (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Характеристическая (или выигрышная) формула глубины n отмеченной модели (M, x) обозн. $\chi_n(M, x)$ и строится по индукции:

$$\begin{aligned}
\chi_0(M,x) \quad &:= \quad \bigwedge\{\ p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \models p_i\ \} \wedge \\
& \bigwedge\{\ \neg p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \not\models p_i\ \} \\
\chi_{n+1}(M,x) \quad &:= \quad \chi^0(M,x) \ \wedge \bigwedge_{y \in R(x)} \Diamond \chi_n(M,y) \\
& \wedge\ \Box \bigvee_{y \in R(x)} \chi_n(M,y).
\end{aligned}$$

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Определение (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Характеристическая (или выигрышная) формула глубины n отмеченной модели (M, x) обозн. $\chi_n(M, x)$ и строится по индукции:

$$\begin{aligned}
\chi_0(M,x) \quad &:= \quad \bigwedge\{\ p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \models p_i\ \} \wedge \\
& \qquad \bigwedge\{\neg p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \not\models p_i\ \} \\
\chi_{n+1}(M,x) \quad &:= \quad \chi^0(M,x) \ \wedge \bigwedge_{y \in R(x)} \Diamond \chi_n(M,y) \\
& \qquad\qquad \wedge \ \Box \bigvee_{y \in R(x)} \chi_n(M,y).
\end{aligned}$$

В каждой $\bigwedge$ и $\bigvee$ имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных формул (т.к. там формулы глубины $\leqslant n$).

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Определение (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Характеристическая (или выигрышная) формула глубины n отмеченной модели (M, x) обозн. $\chi_n(M, x)$ и строится по индукции:

$$
\begin{aligned}
\chi_0(M,x) \quad &:= \quad \bigwedge\{\ p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \models p_i\ \} \wedge \\
&\qquad \bigwedge\{\neg p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M,x \not\models p_i\ \} \\
\chi_{n+1}(M,x) \quad &:= \quad \chi^0(M,x) \ \wedge \bigwedge_{y \in R(x)} \Diamond \chi_n(M,y) \\
&\qquad \wedge\ \Box \bigvee_{y \in R(x)} \chi_n(M,y).
\end{aligned}
$$

В каждой $\bigwedge$ и $\bigvee$ имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных формул (т.к. там формулы глубины $\leqslant n$).

Заметим, что это формула глубины n.

Формула выигрышной стратегии для n-игры

Определение (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Характеристическая (или выигрышная) формула глубины n отмеченной модели (M, x) обозн. $\chi_n(M, x)$ и строится по индукции:

$$
\begin{aligned}
\chi_0(M, x) \quad &:= \quad \bigwedge\{\ p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M, x \models p_i\ \} \wedge \\
& \bigwedge\{ \neg p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ M, x \not\models p_i\ \} \\
\chi_{n+1}(M, x) \quad &:= \quad \chi^0(M, x) \ \wedge \bigwedge_{y \in R(x)} \Diamond \chi_n(M, y) \\
& \wedge \ \Box \bigvee_{y \in R(x)} \chi_n(M, y).
\end{aligned}
$$

В каждой $\bigwedge$ и $\bigvee$ имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных формул (т.к. там формулы глубины $\leqslant n$).

Заметим, что это формула глубины n.

Очевидно, что $M, x \models \chi_n(M, x)$ при всяком $n \geqslant 0$.

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_\equiv$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.
4. $M', x' \models \chi^n(M, x)$ — выигрышная формула для x истинна в x'.

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.
4. $M', x' \models \chi^n(M, x)$ — выигрышная формула для x истинна в x'.

Доказательство.

(3) $\Rightarrow$ (4) Тривиально, ибо χ^n сама есть формула глубины n.

Продолжение доказательства — на обороте. □

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.
4. $M', x' \models \chi^n(M, x)$ — выигрышная формула для x истинна в x'.

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_\equiv$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.
4. $M', x' \models \chi^n(M, x)$ — выигрышная формула для x истинна в x'.

Доказательство.

(4) $\Rightarrow$ (1) Части ф-лы χ^n «описывают» ответные шаги игрока $\mathbf{2}_\equiv$:

- конъюнкт $\chi_0(M, x)$ говорит, что $\equiv_{\mathrm{Var}}$ и значит игрок $\mathbf{2}_\equiv$ не проиграет сразу же;

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathsf{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.
4. $M', x' \models \chi^n(M, x)$ — выигрышная формула для x истинна в x'.

Доказательство.

(4) $\Rightarrow$ (1) Части ф-лы χ^n «описывают» ответные шаги игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$:

- конъюнкт $\chi_0(M, x)$ говорит, что $\equiv_{\mathsf{Var}}$ и значит игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ не проиграет сразу же;
- Если на $(n+1)$-м раунде игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ ходит $x \mapsto y$ в M, то поскольку $M', x' \models \Diamond\chi_n(M, y)$, существует y': $x' \, R' \, y'$ и $M', y' \models \Diamond\chi_n(M, y)$, и по П.И. с позиции (y, y') игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию.

Теорема о выигрышной формуле глубины n

Теорема (При условии $|\mathrm{Var}| < \infty$)

Эквивалентны следующие условия, при любом $n \geqslant 0$:

1. $(M, x) \rightleftarrows_n (M', x')$ — игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ выигрывает в Game_n
2. $(M, x) \simeq_n (M', x')$ — точки n-бисимулируют
3. $(M, x) \equiv_n (M', x')$ — не различаются формулами из ML_n.
4. $M', x' \models \chi^n(M, x)$ — выигрышная формула для x истинна в x'.

Доказательство.

(4) $\Rightarrow$ (1) Части ф-лы χ^n «описывают» ответные шаги игрока $\mathbf{2}_{\equiv}$:

- конъюнкт $\chi_0(M, x)$ говорит, что $\equiv_{\mathrm{Var}}$ и значит игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ не проиграет сразу же;
- Если на $(n+1)$-м раунде игрок $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ ходит $x \mapsto y$ в M, то поскольку $M', x' \models \Diamond\chi_n(M, y)$, существует y': $x' \, R' \, y'$ и $M', y' \models \Diamond\chi_n(M, y)$, и по П.И. с позиции (y, y') игрок $\mathbf{2}_{\equiv}$ имеет выигрышную стратегию.
- Аналогично с ходом игрока $\mathbf{1}_{\not\equiv}$ в модели M'.

Окончательно имеем следующие связи (при $|\mathsf{Var}| < \infty$):

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные} \\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_0} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_n} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_{\mathsf{ML}}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq} & \Longleftrightarrow & \boxed{???}
\end{array}
$$

Связь между эквивалентностями

Окончательно имеем следующие связи (при $|\mathrm{Var}| < \infty$):

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные}\\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_0} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_0}\\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow\\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_n} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_n}\\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow\\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq_\omega} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_{\mathrm{ML}}}\\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow\\
\boxed{\rightleftarrows} & \Longleftrightarrow & \boxed{\simeq} & \Longleftrightarrow & \boxed{\equiv_\infty}
\end{array}$$

Связь между эквивалентностями

Окончательно имеем следующие связи (при $|\mathrm{Var}| < \infty$):

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные} \\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \iff & \boxed{\simeq_0} & \iff & \boxed{\equiv_0} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \iff & \boxed{\simeq_n} & \iff & \boxed{\equiv_n} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \iff & \boxed{\simeq_\omega} & \iff & \boxed{\equiv_{\mathrm{ML}}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows} & \iff & \boxed{\simeq} & \iff & \boxed{\equiv_\infty}
\end{array}
$$

Здесь $\equiv_\infty$ есть модальная эквивалентность по всем формулам модального языка ML_∞ — он позволяет строить конъюнкции $\bigwedge \Phi$ любого множества формул Φ.

Связь между эквивалентностями

Окончательно имеем следующие связи (при $|\mathrm{Var}| < \infty$):

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Игры} & & \text{Бисимуляции} & & \text{Модальные} \\
\boxed{\rightleftarrows_0} & \iff & \boxed{\simeq_0} & \iff & \boxed{\equiv_0} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_n} & \iff & \boxed{\simeq_n} & \iff & \boxed{\equiv_n} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows_\omega} & \iff & \boxed{\simeq_\omega} & \iff & \boxed{\equiv_{\mathrm{ML}}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\rightleftarrows} & \iff & \boxed{\simeq} & \iff & \boxed{\equiv_\infty}
\end{array}$$

Здесь $\equiv_\infty$ есть модальная эквивалентность по всем формулам модального языка ML_∞ — он позволяет строить конъюнкции $\bigwedge \Phi$ любого множества формул Φ.

Конец лекции 12. Спасибо за внимание!