Модальная логика. Лекция 11: Грамматики и регулярные языки. Грамматические модальные логики. Разрешимость регулярных модальных логик. Фильтрация для грамматических модальных логик.

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

04 декабря 2020 года

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{\, \Box_a \mid a \in \Sigma \,\}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \;:=\; \mathbf{K}_\Sigma \;\oplus\; \{\, \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\mid\; (\alpha \to \beta) \in \Pi \,\}.$$

Пример (грамматические модальные логики)

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \;=\; \mathbf{K}\Pi$ для грамматики $\Pi = \{\, a \to aa \,\}$.
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus \{\Box p \to p\} = \mathbf{K}\Pi$ для граммат. $\Pi = \{\, a \to aa,\; a \to \varepsilon \,\}$.
- Грамматическими являются логики
  - – с аксиомами $\Box p \to \Box^n \Box p$ (n-транзитивность)
  - – с аксиомой $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность)
  - – с аксиомой $\Box\Box p \to \Box\Box\Box p$ (вопрос о ее разрешимости открыт!)

Грамматические модальные логики впервые изучались в работе:

1988 L. Fariñas del Cerro, M. Penttonen. “Grammar logics”. *Logique et Analyse*.

Грамматические модальные логики впервые изучались в работе:

1988 L. Fariñas del Cerro, M. Penttonen. “Grammar logics”. *Logique et Analyse*.

Результаты о неразрешимости (в том числе для полимодальных логик с обратными модальностями) получены в работе:

1995 A. Chagrov, V. Shehtman. “Algorithmic aspects of propositional tense logics”. *Computer Science Logic Workshop 1994*.

Грамматические модальные логики впервые изучались в работе:

1988 L. Fariñas del Cerro, M. Penttonen. “Grammar logics”. *Logique et Analyse*.

Результаты о неразрешимости (в том числе для полимодальных логик с обратными модальностями) получены в работе:

1995 A. Chagrov, V. Shehtman. “Algorithmic aspects of propositional tense logics”. *Computer Science Logic Workshop 1994*.

Разрешимость и сложность регулярных грамматических логик:

1998 M. Baldoni, L. Giordano, A. Martelli. “A tableau calculus for multimodal logics and some (un)decidability results”. *TABLEAUX ’98*.

1998 M. Baldoni. *Normal multimodal logics: Automated deduction and logic programming*. PhD thesis, Università degli Studi di Torino.

Грамматические модальные логики впервые изучались в работе:

1988 L. Fariñas del Cerro, M. Penttonen. “Grammar logics”. *Logique et Analyse*.

Результаты о неразрешимости (в том числе для полимодальных логик с обратными модальностями) получены в работе:

1995 A. Chagrov, V. Shehtman. “Algorithmic aspects of propositional tense logics”. *Computer Science Logic Workshop 1994*.

Разрешимость и сложность регулярных грамматических логик:

1998 M. Baldoni, L. Giordano, A. Martelli. “A tableau calculus for multimodal logics and some (un)decidability results”. *TABLEAUX ’98*.

1998 M. Baldoni. *Normal multimodal logics: Automated deduction and logic programming*. PhD thesis, Università degli Studi di Torino.

2001 S. Demri. “The complexity of regularity in grammar logics and related modal logics”, *Journal of Logic and Computation*.

2005 S. Demri, H. de Nivelle. “Deciding regular grammar logics with converse through first-order logic.” *Journal of Logic, Language and Information*.

2005 R. Goré, L. Nguyen. “A tableau system with automaton-labelled formulae for regular grammar logics”. *TABLEAUX 2005*.

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K\Pi} \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Для каждого правила $\alpha \to \beta$ из Π и любых слов X, Y имеем:

$$\begin{array}{lrcl} \mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha \quad p & \to & \Box_\beta \quad p \\ \mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_\beta \Box_Y p \\ \mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_X \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_X \Box_\beta \Box_Y p \end{array}$$

Таким образом, одношаговую выводимость $X\alpha Y \overset{\Pi}{\longmapsto} X\beta Y$ мы умеем «имитировать» в логике $\mathbf{K\Pi}$. Тогда и многошаговую $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$ тоже. ☐

Представление грамматики шкалой (ошибочное)

По грамматике Π строим моноид $(G, \circ, \leqslant, 1)$ так:
$G = \Sigma^* / \overset{\Pi}{\Longleftrightarrow}$, где $u \overset{\Pi}{\Longleftrightarrow} v$ означает: $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$ и $v \overset{\Pi}{\Longmapsto} u$
умножение классов: $[u] \circ [v] \ := \ [uv]$, единица: $1 \ := \ [\varepsilon]$,
частичный порядок: $u \leqslant v \quad \Longleftrightarrow \quad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$.

Получился частично упорядоченный моноид — то есть удовл.:

$\forall x, y, z \ (x \circ y) \circ z \ = x \circ (y \circ z)$, (ассоциативность)
$1 \circ x = x \circ 1 = x$, (единица)
$\leqslant$ — рефлексивн., транзитивн., антисимм. (част. порядок)
$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad x \circ z \leqslant y \circ z$ и $z \circ x \leqslant \ z \circ y$. (монотонность)

Существуют «естественные» частично упорядоченные моноиды — из бинарных отношений: $\mathrm{Rel}(W) = (\{R \mid R \subseteq W \times W\}, \circ, \subseteq, \mathrm{Id}_W)$.

Теорема (Шайн, 1964, аналог теоремы Кэли из теории групп)

Всякий (??) частично упорядоченный моноид $(G, \circ, \leqslant, 1)$ изоморфно вкладывается в некоторый $\mathrm{Rel}(W)$ (для некоторого множества W).

Это вложение и даёт требуемую шкалу F_Π.

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Baldoni (1998) построил табличные исчисления (tableau calculi) для грамматических логик и с их помощью доказал эту теорему (полное доказательство изложено в его диссертации 1998 года).

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash\ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Baldoni (1998) построил табличные исчисления (tableau calculi) для грамматических логик и с их помощью доказал эту теорему (полное доказательство изложено в его диссертации 1998 года).

Ранее Fariñas del Cerro и Penttonen (1988) доказали эту теорему для грамматических логик, соответствующих системам Туэ, то есть симметричным грамматикам (их правила имеют вид $\alpha \leftrightarrow \beta$).

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Baldoni (1998) построил табличные исчисления (tableau calculi) для грамматических логик и с их помощью доказал эту теорему (полное доказательство изложено в его диссертации 1998 года).

Ранее Fariñas del Cerro и Penttonen (1988) доказали эту теорему для грамматических логик, соответствующих системам Туэ, то есть симметричным грамматикам (их правила имеют вид $\alpha \leftrightarrow \beta$).

В работе Чагрова и Шехтмана (1995) эта теорема приводится как следствие из результатов Шайна (1964) о представлении частично упорядоченных моноидов специального вида (нужны уточнения). □

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K\Pi} \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Поскольку логика $\mathbf{K\Pi}$ — каноническая, то получаем следующее

Следствие

Для любой грамматики Π и слов $u, v \in \Sigma^*$ эквивалентны следующие утверждения (здесь $F_{\mathbf{K\Pi}}$ — каноническая шкала логики $\mathbf{K\Pi}$):

1. $\mathbf{K\Pi} \vdash \Box_u p \to \Box_v p$,
2. $\mathrm{Frames}(\Pi) \models \Box_u p \to \Box_v p$,
3. $F_{\mathbf{K\Pi}} \models (u \to v)$,
4. $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$.

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \;\vdash\; \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Поскольку логика $\mathbf{K}\Pi$ — каноническая, то получаем следующее

Следствие

Для любой грамматики Π и слов $u, v \in \Sigma^*$ эквивалентны следующие утверждения (здесь $F_{\mathbf{K}\Pi}$ — каноническая шкала логики $\mathbf{K}\Pi$):

1. $\mathbf{K}\Pi \vdash \Box_u p \to \Box_v p$,
2. $\mathrm{Frames}(\Pi) \models \Box_u p \to \Box_v p$,
3. $F_{\mathbf{K}\Pi} \models (u \to v)$,
4. $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$.

Вопрос. Можно ли найти простое доказательство этого утверждения?