Модальная логика. Лекция 11: Грамматики и регулярные языки. Грамматические модальные логики. Разрешимость регулярных модальных логик. Фильтрация для грамматических модальных логик.

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

04 декабря 2020 года

Лекция на стыке нескольких разделов

В лекции будут понятия и результаты на стыке нескольких областей:

- теория формальных языков,
- модальная логика,
- теория алгоритмов.

Лекция на стыке нескольких разделов

В лекции будут понятия и результаты на стыке нескольких областей:

- теория формальных языков,
- модальная логика,
- теория алгоритмов.

Откуда в модальной логике — грамматики?

Лекция на стыке нескольких разделов

В лекции будут понятия и результаты на стыке нескольких областей:

- теория формальных языков,
- модальная логика,
- теория алгоритмов.

Откуда в модальной логике — грамматики?

Часто встречаются модальные формулы с цепочками $\Box$-ов, например:

$$\Box_a\Box_b\Box_a\Box_c p \to \Box_b\Box_b\Box_c\Box_a p$$

Лекция на стыке нескольких разделов

В лекции будут понятия и результаты на стыке нескольких областей:

- теория формальных языков,
- модальная логика,
- теория алгоритмов.

Откуда в модальной логике — грамматики?

Часто встречаются модальные формулы с цепочками $\Box$-ов, например:

$$\Box_a\Box_b\Box_a\Box_c p \to \Box_b\Box_b\Box_c\Box_a p$$

Это «принцип редукции необходимостей» (necessity reduction principle).

Лекция на стыке нескольких разделов

В лекции будут понятия и результаты на стыке нескольких областей:

- теория формальных языков,
- модальная логика,
- теория алгоритмов.

Откуда в модальной логике — грамматики?

Часто встречаются модальные формулы с цепочками $\Box$-ов, например:

$$\Box_a \Box_b \Box_a \Box_c p \to \Box_b \Box_b \Box_c \Box_a p$$

Это «принцип редукции необходимостей» (necessity reduction principle).

Очевидно, что есть связь с преобразованием слов: $abac \mapsto bbca$.

Лекция на стыке нескольких разделов

В лекции будут понятия и результаты на стыке нескольких областей:

- теория формальных языков,
- модальная логика,
- теория алгоритмов.

Откуда в модальной логике — грамматики?

Часто встречаются модальные формулы с цепочками $\Box$-ов, например:

$$\Box_a \Box_b \Box_a \Box_c p \to \Box_b \Box_b \Box_c \Box_a p$$

Это «принцип редукции необходимостей» (necessity reduction principle).

Очевидно, что есть связь с преобразованием слов: $abac \mapsto bbca$.

Отступление: ван Бентем [1] изучал формулы $Ц_1 p \to Ц_2 p$, где $Ц_i$ — любые цепочки $\Box$-ов и $\Diamond$-ов. Получил ответ на вопрос, какие из них задают (на шкалах) свойство 1 порядка.

Лекция на стыке нескольких разделов

В лекции будут понятия и результаты на стыке нескольких областей:

- теория формальных языков,
- модальная логика,
- теория алгоритмов.

Откуда в модальной логике — грамматики?

Часто встречаются модальные формулы с цепочками $\Box$-ов, например:

$$\Box_a \Box_b \Box_a \Box_c p \to \Box_b \Box_b \Box_c \Box_a p$$

Это «принцип редукции необходимостей» (necessity reduction principle).

Очевидно, что есть связь с преобразованием слов: $abac \mapsto bbca$.

Отступление: ван Бентем [1] изучал формулы $Ц_1 p \to Ц_2 p$, где $Ц_i$ — любые цепочки $\Box$-ов и $\Diamond$-ов. Получил ответ на вопрос, какие из них задают (на шкалах) свойство 1 порядка. Но это не наша тема.

[1] van Benthem "Modal reduction principles", JSL, 1976.

Грамматики, или системы переписывания слов

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).
Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ.

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).

Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ.

Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ, включая пустое слово ε.

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).
Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ.
Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ, включая пустое слово ε.

Определение (Система переписывания слов, полу-система Туэ, string rewriting system, semi-Thue system, = semi-(Thue system))

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).
Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ.
Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ, включая пустое слово ε.

Определение (Система переписывания слов, полу-система Туэ, string rewriting system, semi-Thue system, = semi-(Thue system))

Или (в нашей лекции просто) грамматика — это любое двуместное отношение на словах, то есть подмножество $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$.

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).
Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ.
Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ, включая пустое слово ε.

Определение (Система переписывания слов, полу-система Туэ, string rewriting system, semi-Thue system, = semi-(Thue system))

Или (в нашей лекции просто) грамматика — это любое двуместное отношение на словах, то есть подмножество $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$.

Если Π — симметричное отношение, то оно называется системой Туэ.

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).
Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ.
Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ, включая пустое слово ε.

Определение (Система переписывания слов, полу-система Туэ, string rewriting system, semi-Thue system, = semi-(Thue system))

Или (в нашей лекции просто) грамматика — это любое двуместное отношение на словах, то есть подмножество $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$.

Если Π — симметричное отношение, то оно называется системой Туэ.

Обычно Π будет конечным, но некот. результаты верны для любых Π.

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).
Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ.
Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ, включая пустое слово ε.

Определение (Система переписывания слов, полу-система Туэ, string rewriting system, semi-Thue system, = semi-(Thue system))

Или (в нашей лекции просто) грамматика — это любое двуместное отношение на словах, то есть подмножество $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$.

Если Π — симметричное отношение, то оно называется системой Туэ.

Обычно Π будет конечным, но некот. результаты верны для любых Π.

Пары слов из грамматики $(\alpha, \beta) \in \Pi$ часто записывают так: $\alpha \to \beta$.

Грамматики, или системы переписывания слов

Σ — конечный алфавит (непустое множество букв).
Σ^+ — множество всех непустых слов в алфавите Σ.
Σ^* — множество всех слов в алфавите Σ, включая пустое слово ε.

Определение (Система переписывания слов, полу-система Туэ, string rewriting system, semi-Thue system, = semi-(Thue system))

Или (в нашей лекции просто) грамматика — это любое двуместное отношение на словах, то есть подмножество $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$.

Если Π — симметричное отношение, то оно называется системой Туэ.

Обычно Π будет конечным, но некот. результаты верны для любых Π.

Пары слов из грамматики $(\alpha, \beta) \in \Pi$ часто записывают так: $\alpha \to \beta$.

Эти пары часто называют правилами или продукциями.

Выводимость слов из слов в грамматике

Дана грамматика Π — множество правил $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Выводимость слов из слов в грамматике

Дана грамматика Π — множество правил $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Определение (Выводимость за 1 шаг в грамматике)

Если $(\alpha \to \beta) \in \Pi$, то пишем $X\alpha Y \xmapsto{\Pi} X\beta Y$ для любых слов X, Y.

Выводимость слов из слов в грамматике

Дана грамматика Π — множество правил $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Определение (Выводимость за 1 шаг в грамматике)

Если $(\alpha \to \beta) \in \Pi$, то пишем $X\alpha Y \overset{\Pi}{\longmapsto} X\beta Y$ для любых слов X, Y.

Говорим: из слова $u = X\alpha Y$ **выводится за 1 шаг** слово $v = X\beta Y$.

Выводимость слов из слов в грамматике

Дана грамматика Π — множество правил $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Определение (Выводимость за 1 шаг в грамматике)

Если $(\alpha \to \beta) \in \Pi$, то пишем $X\alpha Y \xmapsto{\Pi} X\beta Y$ для любых слов X, Y.

Говорим: из слова $u = X\alpha Y$ выводится за 1 шаг слово $v = X\beta Y$.

Определение (Выводимость в грамматике)

Из слова u выводится слово v в грамматике Π, пишем $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$, если $u = v$ или

Выводимость слов из слов в грамматике

Дана грамматика Π — множество правил $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Определение (Выводимость за 1 шаг в грамматике)

Если $(\alpha \to \beta) \in \Pi$, то пишем $X\alpha Y \xmapsto{\Pi} X\beta Y$ для любых слов X, Y.

Говорим: из слова $u = X\alpha Y$ **выводится за 1 шаг** слово $v = X\beta Y$.

Определение (Выводимость в грамматике)

Из слова u **выводится** слово v в грамматике Π, пишем $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$, если $u = v$ или существует цепочка из $n \geqslant 1$ одношаговых выводимостей:

$$u = x_0 \xmapsto{\Pi} x_1 \xmapsto{\Pi} \ldots \xmapsto{\Pi} x_n = v.$$

Выводимость слов из слов в грамматике

Дана грамматика Π — множество правил $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Определение (Выводимость за 1 шаг в грамматике)

Если $(\alpha \to \beta) \in \Pi$, то пишем $X\alpha Y \overset{\Pi}{\longmapsto} X\beta Y$ для любых слов X, Y.

Говорим: из слова $u = X\alpha Y$ **выводится за 1 шаг** слово $v = X\beta Y$.

Определение (Выводимость в грамматике)

Из слова u **выводится** слово v в грамматике Π, пишем $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$, если $u = v$ или существует цепочка из $n \geqslant 1$ одношаговых выводимостей:

$$u \;=\; x_0 \;\overset{\Pi}{\longmapsto}\; x_1 \;\overset{\Pi}{\longmapsto}\; \ldots \;\overset{\Pi}{\longmapsto}\; x_n \;=\; v.$$

Иначе говоря, $\overset{\Pi}{\Longmapsto}$ есть рефлексивное транзитивное замыкание $\overset{\Pi}{\longmapsto}$.

Выводимость слов из слов в грамматике

Дана грамматика Π — множество правил $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Определение (Выводимость за 1 шаг в грамматике)

Если $(\alpha \to \beta) \in \Pi$, то пишем $X\alpha Y \Rightarrow_{\Pi} X\beta Y$ для любых слов X, Y.

Говорим: из слова $u = X\alpha Y$ выводится за 1 шаг слово $v = X\beta Y$.

Определение (Выводимость в грамматике)

Из слова u выводится слово v в грамматике Π, пишем $u \Rightarrow_{\Pi}^{*} v$, если $u = v$ или существует цепочка из $n \geqslant 1$ одношаговых выводимостей:

$$u \;=\; x_0 \xmapsto{\Pi} x_1 \xmapsto{\Pi} \ldots \xmapsto{\Pi} x_n \;=\; v.$$

Иначе говоря, $\overset{\Pi}{\Longmapsto}$ есть рефлексивное транзитивное замыкание $\xmapsto{\Pi}$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \ldots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \ := \ \Box_{a_1} \ldots \Box_{a_n}$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \dots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \ := \ \Box_{a_1} \dots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \ := \ R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_n}$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \ldots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \ := \ \Box_{a_1} \ldots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \ := \ R_{a_1} \circ \ldots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y\text{, таких что } x \, R_\alpha \, y\text{, имеем } M, y \models A.$$

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \ldots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \;:=\; \Box_{a_1} \ldots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \;:=\; R_{a_1} \circ \ldots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \text{, таких что } x\, R_\alpha\, y \text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \ldots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \;:=\; \Box_{a_1} \ldots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \;:=\; R_{a_1} \circ \ldots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y\text{, таких что } x\, R_\alpha\, y\text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \dots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \;:=\; \Box_{a_1} \dots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \;:=\; R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \text{, таких что } x\, R_\alpha\, y \text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Лемма (Семантика принципов редукции)

Для всякой шкалы F имеем: $F \models \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\Leftrightarrow\; R_\alpha \supseteq R_\beta$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \dots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \ := \ \Box_{a_1} \dots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \ := \ R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y\text{, таких что } x\, R_\alpha\, y\text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Лемма (Семантика принципов редукции)

Для всякой шкалы F имеем: $F \models \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \ \Leftrightarrow \ R_\alpha \supseteq R_\beta$.

В терминах редукций возможностей: $F \models \Diamond_\alpha p \to \Diamond_\beta p \ \Leftrightarrow \ R_\alpha \subseteq R_\beta$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \dots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \;:=\; \Box_{a_1} \dots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \;:=\; R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y\text{, таких что } x\, R_\alpha\, y\text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Лемма (Семантика принципов редукции)

Для всякой шкалы F имеем: $F \models \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\Leftrightarrow\; R_\alpha \supseteq R_\beta$.

В терминах редукций возможностей: $F \models \Diamond_\alpha p \to \Diamond_\beta p \;\Leftrightarrow\; R_\alpha \subseteq R_\beta$.

Доказательство (леммы в исходном виде — с $\Box$).

$(\Leftarrow)$ Пусть $M, x \models \Box_\alpha p$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \ldots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \ := \ \Box_{a_1} \ldots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \ := \ R_{a_1} \circ \ldots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \text{, таких что } x \, R_\alpha \, y \text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Лемма (Семантика принципов редукции)

Для всякой шкалы F имеем: $F \models \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \ \Leftrightarrow \ R_\alpha \supseteq R_\beta$.

В терминах редукций возможностей: $F \models \Diamond_\alpha p \to \Diamond_\beta p \ \Leftrightarrow \ R_\alpha \subseteq R_\beta$.

Доказательство (леммы в исходном виде — с $\Box$).

$(\Leftarrow)$ Пусть $M, x \models \Box_\alpha p$.Почему $M, x \models \Box_\beta p$?

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \ldots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \; := \; \Box_{a_1} \ldots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a\in\Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \; := \; R_{a_1} \circ \ldots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y\text{, таких что } x\, R_\alpha\, y\text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Лемма (Семантика принципов редукции)

Для всякой шкалы F имеем: $\quad F \models \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\; \Leftrightarrow \;\; R_\alpha \supseteq R_\beta.$

В терминах редукций возможностей: $\quad F \models \Diamond_\alpha p \to \Diamond_\beta p \;\; \Leftrightarrow \;\; R_\alpha \subseteq R_\beta.$

Доказательство (леммы в исходном виде — с $\Box$).

$(\Leftarrow)$ Пусть $M, x \models \Box_\alpha p$.Почему $M, x \models \Box_\beta p$? Ввиду $R_\alpha(x) \supseteq R_\beta(x)$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \dots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \;:=\; \Box_{a_1} \dots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \;:=\; R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y\text{, таких что } x\, R_\alpha\, y\text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Лемма (Семантика принципов редукции)

Для всякой шкалы F имеем: $\quad F \models \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\Leftrightarrow\; R_\alpha \supseteq R_\beta$.

В терминах редукций возможностей: $\quad F \models \Diamond_\alpha p \to \Diamond_\beta p \;\Leftrightarrow\; R_\alpha \subseteq R_\beta$.

Доказательство (леммы в исходном виде — с $\Box$).

$(\Leftarrow)$ Пусть $M, x \models \Box_\alpha p$.Почему $M, x \models \Box_\beta p$? Ввиду $R_\alpha(x) \supseteq R_\beta(x)$.

$(\Rightarrow)$ Допустим $R_\alpha \not\supseteq R_\beta$. Значит, $\exists x, y \in W$: $\neg(x\, R_\alpha\, y)$, но $(x\, R_\beta\, y)$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \dots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \;:=\; \Box_{a_1} \dots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \;:=\; R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \text{, таких что } x\, R_\alpha\, y \text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Лемма (Семантика принципов редукции)

Для всякой шкалы F имеем: $\quad F \models \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\Leftrightarrow\; R_\alpha \supseteq R_\beta$.

В терминах редукций возможностей: $\quad F \models \Diamond_\alpha p \to \Diamond_\beta p \;\Leftrightarrow\; R_\alpha \subseteq R_\beta$.

Доказательство (леммы в исходном виде — с $\Box$).

$(\Leftarrow)$ Пусть $M, x \models \Box_\alpha p$.Почему $M, x \models \Box_\beta p$? Ввиду $R_\alpha(x) \supseteq R_\beta(x)$.

$(\Rightarrow)$ Допустим $R_\alpha \not\supseteq R_\beta$. Значит, $\exists x, y \in W$: $\neg(x\, R_\alpha\, y)$, но $(x\, R_\beta\, y)$.

Берем оценку: $V(p) := W \setminus \{y\}$.

Принципы редукции необходимостей

Полимодальный язык с модальностями $\Box_a$, где $a \in \Sigma$ (Лекция 4).

Слову $\alpha = a_1 \dots a_n$ сопоставим модальность: $\Box_\alpha \; := \; \Box_{a_1} \dots \Box_{a_n}$.

Шкала (Σ-шкала): $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$. Обозн. $R_\alpha \; := \; R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_n}$.

$$M, x \models \Box_\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y\text{, таких что } x\, R_\alpha\, y\text{, имеем } M, y \models A.$$

Принцип редукции необходимостей: $\Box_\alpha p \to \Box_\beta p$, где слова $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Это частный случай $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-формул $\Diamond_\gamma \Box_\alpha p \to \Box_\beta \Diamond_\delta p$ из Лекции 4.

Лемма (Семантика принципов редукции)

Для всякой шкалы F имеем: $F \models \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\; \Leftrightarrow \;\; R_\alpha \supseteq R_\beta$.

В терминах редукций возможностей: $F \models \Diamond_\alpha p \to \Diamond_\beta p \;\; \Leftrightarrow \;\; R_\alpha \subseteq R_\beta$.

Доказательство (леммы в исходном виде — с $\Box$).

($\Leftarrow$) Пусть $M, x \models \Box_\alpha p$.Почему $M, x \models \Box_\beta p$? Ввиду $R_\alpha(x) \supseteq R_\beta(x)$.

($\Rightarrow$) Допустим $R_\alpha \not\supseteq R_\beta$. Значит, $\exists x, y \in W$: $\neg(x\, R_\alpha\, y)$, но $(x\, R_\beta\, y)$.

Берем оценку: $V(p) := W \setminus \{y\}$. Тогда $M, x \models \Box_\alpha p$ и $M, x \not\models \Box_\beta p$. $\Box$

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{\,\Box_a \mid a \in \Sigma\,\}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{\, \Box_a \mid a \in \Sigma \,\}$ будет обозначаться K_Σ (или K_n, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{\,\Box_a \mid a \in \Sigma\,\}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \;:=\; \mathbf{K}_\Sigma \;\oplus\; \{\,\Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\mid\; (\alpha \to \beta) \in \Pi\,\}.$$

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{\Box_a \mid a \in \Sigma\}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \;:=\; \mathbf{K}_\Sigma \;\oplus\; \{\Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\mid\; (\alpha \to \beta) \in \Pi\}.$$

Пример (грамматические модальные логики)

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{\Box_a \mid a \in \Sigma\}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \;:=\; \mathbf{K}_\Sigma \;\oplus\; \{\Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\mid\; (\alpha \to \beta) \in \Pi\}.$$

Пример (грамматические модальные логики)

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \;=\; \mathbf{K}\Pi$ для грамматики $\Pi = \{a \to aa\}$.

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{ \Box_a \mid a \in \Sigma \}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \;:=\; \mathbf{K}_\Sigma \;\oplus\; \{ \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\mid\; (\alpha \to \beta) \in \Pi \}.$$

Пример (грамматические модальные логики)

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \;=\; \mathbf{K}\Pi$ для грамматики $\Pi = \{ a \to aa \}$.
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus \{\Box p \to p\}$

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{\, \Box_a \mid a \in \Sigma \,\}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \ := \ \mathbf{K}_\Sigma \ \oplus \ \{\, \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \ \mid \ (\alpha \to \beta) \in \Pi \,\}.$$

Пример (грамматические модальные логики)

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \ = \ \mathbf{K}\Pi$ для грамматики $\Pi = \{\, a \to aa \,\}$.
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus \{\Box p \to p\} = \mathbf{K}\Pi$ для граммат. $\Pi = \{\, a \to aa, \ a \to \varepsilon \,\}$.

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{\, \Box_a \mid a \in \Sigma \,\}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \;:=\; \mathbf{K}_\Sigma \;\oplus\; \{\, \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\mid\; (\alpha \to \beta) \in \Pi \,\}.$$

Пример (грамматические модальные логики)

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \;=\; \mathbf{K}\Pi$ для грамматики $\Pi = \{\, a \to aa \,\}$.
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus \{\Box p \to p\} = \mathbf{K}\Pi$ для граммат. $\Pi = \{\, a \to aa,\; a \to \varepsilon \,\}$.
- Грамматическими являются логики
  – с аксиомами $\Box p \to \Box^n \Box p$ (n-транзитивность)

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{ \Box_a \mid a \in \Sigma \}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \ := \ \mathbf{K}_\Sigma \ \oplus \ \{ \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \ \mid \ (\alpha \to \beta) \in \Pi \}.$$

Пример (грамматические модальные логики)

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \ = \ \mathbf{K}\Pi$ для грамматики $\Pi = \{ a \to aa \}$.
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus \{\Box p \to p\} = \mathbf{K}\Pi$ для граммат. $\Pi = \{ a \to aa, \ a \to \varepsilon \}$.
- Грамматическими являются логики
  – с аксиомами $\Box p \to \Box^n \Box p$ (n-транзитивность)
  – с аксиомой $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность)

Грамматические модальные логики

Минимальная нормальная полимодальная логика с модальностями $\{ \Box_a \mid a \in \Sigma \}$ будет обозначаться $\mathbf{K}_\Sigma$ (или $\mathbf{K}_n$, где $|\Sigma| = n$).

Пусть $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ — грамматика, т.е. набор правил вида $(\alpha \to \beta)$.

Определение

Грамматическая модальная логика, соответствующая грамматике Π:

$$\mathbf{K}\Pi \;:=\; \mathbf{K}_\Sigma \;\oplus\; \{ \Box_\alpha p \to \Box_\beta p \;\mid\; (\alpha \to \beta) \in \Pi \}.$$

Пример (грамматические модальные логики)

- $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \;=\; \mathbf{K}\Pi$ для грамматики $\Pi = \{ a \to aa \}$.
- $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus \{\Box p \to p\} = \mathbf{K}\Pi$ для граммат. $\Pi = \{ a \to aa,\; a \to \varepsilon \}$.
- Грамматическими являются логики
  – с аксиомами $\Box p \to \Box^n \Box p$ (n-транзитивность)
  – с аксиомой $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность)
  – с аксиомой $\Box\Box p \to \Box\Box\Box p$ (вопрос о ее разрешимости открыт!)

Грамматические модальные логики впервые изучались в работе:

1988 L. Fariñas del Cerro, M. Penttonen. “Grammar logics”. *Logique et Analyse*.

Грамматические модальные логики впервые изучались в работе:

1988 L. Fariñas del Cerro, M. Penttonen. "Grammar logics". *Logique et Analyse*.

Результаты о неразрешимости (в том числе для полимодальных логик с обратными модальностями) получены в работе:

1995 A. Chagrov, V. Shehtman. "Algorithmic aspects of propositional tense logics". *Computer Science Logic Workshop 1994*.

Грамматические модальные логики впервые изучались в работе:

1988 L. Fariñas del Cerro, M. Penttonen. "Grammar logics". *Logique et Analyse*.

Результаты о неразрешимости (в том числе для полимодальных логик с обратными модальностями) получены в работе:

1995 A. Chagrov, V. Shehtman. "Algorithmic aspects of propositional tense logics". *Computer Science Logic Workshop 1994*.

Разрешимость и сложность регулярных грамматических логик:

1998 M. Baldoni, L. Giordano, A. Martelli. "A tableau calculus for multimodal logics and some (un)decidability results". *TABLEAUX '98*.

2001 S. Demri. "The complexity of regularity in grammar logics and related modal logics", *Journal of Logic and Computation*.

2005 S. Demri, H. de Nivelle. "Deciding regular grammar logics with converse through first-order logic." *Journal of Logic, Language and Information*.

2005 R. Goré, L. Nguyen. "A tableau system with automaton-labelled formulae for regular grammar logics". *TABLEAUX 2005*.

Фильтрация для регулярных грамматических логик:

2014 S. Kikot, I. Shapirovsky, E. Zolin. "Filtration safe operations on frames". *Advances in Modal Logic 2014*.

Полнота грамматических модальных логик

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Полнота грамматических модальных логик

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Это доказано для логик с любыми $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-аксиомами в Лекции 4.

Полнота грамматических модальных логик

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Это доказано для логик с любыми $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-аксиомами в Лекции 4.

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала, $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ — слова.

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Это доказано для логик с любыми $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-аксиомами в Лекции 4.

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала, $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ — слова.
Будем писать $F \models (\alpha \to \beta)$, если $R_\alpha \supseteq R_\beta$.

Полнота грамматических модальных логик

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Это доказано для логик с любыми $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-аксиомами в Лекции 4.

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала, $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ — слова.
Будем писать $F \models (\alpha \to \beta)$, если $R_\alpha \supseteq R_\beta$.
Будем писать $F \models \Pi$, если $F \models (\alpha \to \beta)$ для всех правил $(\alpha \to \beta) \in \Pi$.
В этом случаем F будем называть Π-шкалой.

Полнота грамматических модальных логик

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Это доказано для логик с любыми $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-аксиомами в Лекции 4.

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала, $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ — слова.
Будем писать $F \models (\alpha \to \beta)$, если $R_\alpha \supseteq R_\beta$.
Будем писать $F \models \Pi$, если $F \models (\alpha \to \beta)$ для всех правил $(\alpha \to \beta) \in \Pi$.
В этом случаем F будем называть Π-шкалой.
Обозначим $\mathrm{Frames}(\Pi) \;:=\; \{F \mid F \text{ есть } \Pi\text{-шкала}\}$.

Полнота грамматических модальных логик

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Это доказано для логик с любыми $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-аксиомами в Лекции 4.

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала, $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ — слова.
Будем писать $F \models (\alpha \to \beta)$, если $R_\alpha \supseteq R_\beta$.
Будем писать $F \models \Pi$, если $F \models (\alpha \to \beta)$ для всех правил $(\alpha \to \beta) \in \Pi$.
В этом случаем F будем называть Π-шкалой.
Обозначим $\mathrm{Frames}(\Pi) := \{F \mid F \text{ есть } \Pi\text{-шкала}\}$.

Таким образом, $\mathbf{K}\Pi$ — логика всех Π-шкал.

Полнота грамматических модальных логик

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Это доказано для логик с любыми $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-аксиомами в Лекции 4.

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала, $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ — слова.
Будем писать $F \models (\alpha \to \beta)$, если $R_\alpha \supseteq R_\beta$.
Будем писать $F \models \Pi$, если $F \models (\alpha \to \beta)$ для всех правил $(\alpha \to \beta) \in \Pi$.
В этом случаем F будем называть Π-шкалой.
Обозначим $\mathrm{Frames}(\Pi) \; := \; \{F \mid F \text{ есть } \Pi\text{-шкала}\}$.

Таким образом, $\mathbf{K}\Pi$ — логика всех Π-шкал.

В логике $\mathbf{K}\Pi$ выводятся $\Box_u p \to \Box_v p$ — для каких еще слов u, v?

Полнота грамматических модальных логик

Теорема (О полноте по Крипке грамматических логик)

Для всякой грамматики Π, логика $\mathbf{K}\Pi$ каноническая $\Rightarrow$ полная.

Это доказано для логик с любыми $(\gamma, \alpha, \beta, \delta)$-аксиомами в Лекции 4.

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала, $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ — слова.
Будем писать $F \models (\alpha \to \beta)$, если $R_\alpha \supseteq R_\beta$.
Будем писать $F \models \Pi$, если $F \models (\alpha \to \beta)$ для всех правил $(\alpha \to \beta) \in \Pi$.
В этом случаем F будем называть Π-шкалой.
Обозначим $\mathrm{Frames}(\Pi) \ := \ \{F \mid F \text{ есть } \Pi\text{-шкала}\}$.

Таким образом, $\mathbf{K}\Pi$ — логика всех Π-шкал.

В логике $\mathbf{K}\Pi$ выводятся $\Box_u p \to \Box_v p$ — для каких еще слов u, v?

Напоминание. Запись $u \stackrel{\Pi}{\Longmapsto} v$ означает:

слово u можно преобразовать в слово v некоторой цепочкой
из $n \geqslant 0$ замен подслов по правилам $(\alpha \to \beta)$ из грамматики Π.

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \;\vdash\; \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Для каждого правила $\alpha \to \beta$ из Π и любых слов X, Y имеем:

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Для каждого правила $\alpha \to \beta$ из Π и любых слов X, Y имеем:

$$\mathbf{K}\Pi \vdash \quad \Box_\alpha \quad p \ \to \quad \Box_\beta \quad p$$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K\Pi} \vdash \Box_u p \to \Box_v p \quad \Longleftrightarrow \quad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Для каждого правила $\alpha \to \beta$ из Π и любых слов X, Y имеем:

$$\begin{array}{lccc} \mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha p & \to & \Box_\beta p \\ \mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_\beta \Box_Y p \end{array}$$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K\Pi} \vdash \Box_u p \to \Box_v p \quad \iff \quad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Для каждого правила $\alpha \to \beta$ из Π и любых слов X, Y имеем:

$$\begin{array}{rrcr}
\mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha \quad p & \to & \Box_\beta \quad p \\
\mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_\beta \Box_Y p \\
\mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_X \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_X \Box_\beta \Box_Y p
\end{array}$$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K\Pi} \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \stackrel{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Для каждого правила $\alpha \to \beta$ из Π и любых слов X, Y имеем:

$$\begin{array}{lrcl}
\mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha \quad p & \to & \Box_\beta \quad p \\
\mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_\beta \Box_Y p \\
\mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_X \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_X \Box_\beta \Box_Y p
\end{array}$$

Таким образом, одношаговую выводимость $X\alpha Y \stackrel{\Pi}{\longmapsto} X\beta Y$ мы умеем «имитировать» в логике $\mathbf{K\Pi}$.

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K\Pi} \vdash \Box_u p \to \Box_v p \qquad \iff \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Для каждого правила $\alpha \to \beta$ из Π и любых слов X, Y имеем:

$$\begin{array}{lrcl} \mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha p & \to & \Box_\beta p \\ \mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_\beta \Box_Y p \\ \mathbf{K\Pi} \vdash & \Box_X \Box_\alpha \Box_Y p & \to & \Box_X \Box_\beta \Box_Y p \end{array}$$

Таким образом, одношаговую выводимость $X\alpha Y \overset{\Pi}{\longmapsto} X\beta Y$ мы умеем «имитировать» в логике $\mathbf{K\Pi}$. Тогда и многошаговую $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$ тоже. $\square$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K\Pi} \vdash \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Baldoni (1998) построил табличные исчисления (tableau calculi) для грамматических логик и с их помощью доказал эту теорему (полное доказательство изложено в его диссертации 1998 года).

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K\Pi} \vdash \Box_u p \to \Box_v p \quad \iff \quad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Baldoni (1998) построил табличные исчисления (tableau calculi) для грамматических логик и с их помощью доказал эту теорему (полное доказательство изложено в его диссертации 1998 года).

Ранее Fariñas del Cerro и Penttonen (1988) доказали эту теорему для грамматических логик, соответствующих системам Туэ, то есть симметричным грамматикам (их правила имеют вид $\alpha \leftrightarrow \beta$).

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \vdash \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Baldoni (1998) построил табличные исчисления (tableau calculi) для грамматических логик и с их помощью доказал эту теорему (полное доказательство изложено в его диссертации 1998 года).

Ранее Fariñas del Cerro и Penttonen (1988) доказали эту теорему для грамматических логик, соответствующих системам Туэ, то есть симметричным грамматикам (их правила имеют вид $\alpha \leftrightarrow \beta$).

В работе Чагрова и Шехтмана (1995) эта теорема приводится как следствие из результатов Шайна (1964) о представлении частично упорядоченных моноидов специального вида. $\square$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \;\vdash\; \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Поскольку логика $\mathbf{K}\Pi$ — каноническая, то получаем следующее

Следствие

Для любой грамматики Π и слов $u, v \in \Sigma^*$ эквивалентны следующие утверждения (здесь $F_{\mathbf{K}\Pi}$ — каноническая шкала логики $\mathbf{K}\Pi$):

1. $\mathbf{K}\Pi \vdash \Box_u p \to \Box_v p$,
2. $\mathrm{Frames}(\Pi) \models \Box_u p \to \Box_v p$,
3. $F_{\mathbf{K}\Pi} \models (u \to v)$,
4. $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$.

Редукции, выводимые в грамматической логике

Теорема (Полнота отн. выводимости в грамматике; Baldoni 1998)

Для всякой грамматики $\Pi \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ и слов u, v в алфавите Σ:

$$\mathbf{K}\Pi \ \vdash \ \Box_u p \to \Box_v p \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v.$$

Поскольку логика $\mathbf{K}\Pi$ — каноническая, то получаем следующее

Следствие

Для любой грамматики Π и слов $u, v \in \Sigma^*$ эквивалентны следующие утверждения (здесь $F_{\mathbf{K}\Pi}$ — каноническая шкала логики $\mathbf{K}\Pi$):

1. $\mathbf{K}\Pi \vdash \Box_u p \to \Box_v p$,
2. $\mathrm{Frames}(\Pi) \models \Box_u p \to \Box_v p$,
3. $F_{\mathbf{K}\Pi} \models (u \to v)$,
4. $u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v$.

Вопрос. Можно ли найти простое доказательство этого утверждения?

Существование неразрешимых грамматических логик

Определение

Грамматика Π наз. разрешимой, если отношение $\overset{\Pi}{\Longmapsto}$ разрешимо.

Существование неразрешимых грамматических логик

Определение

Грамматика Π наз. разрешимой, если отношение $\overset{\Pi}{\Longmapsto}$ разрешимо.

Существуют конечные неразрешимые (полу-)системы Туэ.

Теорема (Матиясевич, 1967)

Следующая система Туэ в алфавите $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ неразрешима:

$$ac \leftrightarrow ca, \quad ad \leftrightarrow da, \quad bc \leftrightarrow bc, \quad bd \leftrightarrow db,$$
$$eca \leftrightarrow ce, \quad edb \leftrightarrow de, \quad cdca \leftrightarrow cdce.$$

Существование неразрешимых грамматических логик

Определение

Грамматика Π наз. разрешимой, если отношение $\overset{\Pi}{\Longmapsto}$ разрешимо.

Существуют конечные неразрешимые (полу-)системы Туэ.

Теорема (Матиясевич, 1967)

Следующая система Туэ в алфавите $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ неразрешима:

$$ac \leftrightarrow ca, \quad ad \leftrightarrow da, \quad bc \leftrightarrow bc, \quad bd \leftrightarrow db,$$
$$eca \leftrightarrow ce, \quad edb \leftrightarrow de, \quad cdca \leftrightarrow cdce.$$

Следствие

Существуют неразрешимые конечно аксиоматизируемые грамматические модальные логики $\mathbf{K}\Pi$.

Доказательство.

Если Π неразрешима, то $\{\, A = \Box_u p \to \Box_v p \mid \mathbf{K}\Pi \vdash A \,\}$ тоже. $\Box$

Контекстно-свободные грамматики

Определение

Грамматика Π контекстно-свободная, если все ее правила имеют вид $a \to \beta$, где $a \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma^*$. То есть слева всегда буква.

Контекстно-свободные грамматики

Определение

Грамматика Π контекстно-свободная, если все ее правила имеют вид $a \to \beta$, где $a \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma^*$. То есть слева всегда буква.

Все ли КС-грамматические модальные логики разрешимы?

Контекстно-свободные грамматики

Определение

Грамматика Π контекстно-свободная, если все ее правила имеют вид $a \to \beta$, где $a \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma^*$. То есть слева всегда буква.

Все ли КС-грамматические модальные логики разрешимы? Нет! Baldoni (1998) доказал существование неразрешимых КС-грам. логик.

Контекстно-свободные грамматики

Определение

Грамматика Π контекстно-свободная, если все ее правила имеют вид $a \to \beta$, где $a \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma^*$. То есть слева всегда буква.

Все ли КС-грамматические модальные логики разрешимы? Нет! Baldoni (1998) доказал существование неразрешимых КС-грам. логик.

Теорема (С. Кикоть, 2014)

- Логика $\mathbf{K}\Pi$ грамматики $\Pi = \{ b \to aba \}$ — не допускает фильтрацию. (Разрешима ли она, нам неизвестно.)

Контекстно-свободные грамматики

Определение

Грамматика Π контекстно-свободная, если все ее правила имеют вид $a \to \beta$, где $a \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma^*$. То есть слева всегда буква.

Все ли КС-грамматические модальные логики разрешимы? Нет! Baldoni (1998) доказал существование неразрешимых КС-грам. логик.

Теорема (С. Кикоть, 2014)

- Логика $\mathbf{K}\Pi$ грамматики $\Pi = \{\, b \to aba \,\}$ — не допускает фильтрацию. (Разрешима ли она, нам неизвестно.)
- Если к Π добавить правила $c \to ca$ и $c \to cb$, то соответствующая логика (с тремя модальностями) будет неразрешимой.

Контекстно-свободные грамматики

Определение

Грамматика Π контекстно-свободная, если все ее правила имеют вид $a \to \beta$, где $a \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma^*$. То есть слева всегда буква.

Все ли КС-грамматические модальные логики разрешимы? Нет! Baldoni (1998) доказал существование неразрешимых КС-грам. логик.

Теорема (С. Кикоть, 2014)

- Логика $\mathbf{K}\Pi$ грамматики $\Pi = \{\, b \to aba \,\}$ — не допускает фильтрацию. (Разрешима ли она, нам неизвестно.)
- Если к Π добавить правила $c \to ca$ и $c \to cb$, то соответствующая логика (с тремя модальностями) будет неразрешимой.

Для сравнения:

- Логика $\mathbf{K}\Pi$ грамматики $\Pi = \{\, b \to bab \,\}$ — допускает фильтрацию. Следовательно, эта логика разрешима.

Языки и операции над ними

Язык — произвольное подмножество слов: $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$.

Языки и операции над ними

Язык — произвольное подмножество слов: $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$.

Определение (Операции над языками)

Пусть L, L_1, L_2 — языки над алфавитом Σ.

Языки и операции над ними

Язык — произвольное подмножество слов: $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$.

Определение (Операции над языками)

Пусть L, L_1, L_2 — языки над алфавитом Σ.

- объединение языков: $L_1 \cup L_2$,

Языки и операции над ними

Язык — произвольное подмножество слов: $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$.

Определение (Операции над языками)

Пусть L, L_1, L_2 — языки над алфавитом Σ.

- объединение языков: $L_1 \cup L_2$,
- конкатенация языков: $L_1 \circ L_2 = \{uv \mid u \in L_1,\ v \in L_2\}$,

Языки и операции над ними

Язык — произвольное подмножество слов: $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$.

Определение (Операции над языками)

Пусть L, L_1, L_2 — языки над алфавитом Σ.

- объединение языков: $L_1 \cup L_2$,
- конкатенация языков: $L_1 \circ L_2 = \{uv \mid u \in L_1,\ v \in L_2\}$,
- степень языка: $L^0 := \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$, $L^n = L \circ \ldots \circ L$ (n множителей),

Языки и операции над ними

Язык — произвольное подмножество слов: $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$.

Определение (Операции над языками)

Пусть L, L_1, L_2 — языки над алфавитом Σ.

- объединение языков: $L_1 \cup L_2$,
- конкатенация языков: $L_1 \circ L_2 = \{uv \mid u \in L_1,\ v \in L_2\}$,
- степень языка: $L^0 := \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$, $L^n = L \circ \ldots \circ L$ (n множителей),
- звездочка Клини: $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots = \{u_1 \ldots u_n \mid u_i \in L, n \geqslant 0\}$.

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

- пустой язык $\varnothing$ — регулярный,

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

- пустой язык $\varnothing$ — регулярный,
- язык из пустого слова $\{\varepsilon\}$ — регулярный,

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

- пустой язык $\varnothing$ — регулярный,
- язык из пустого слова $\{\varepsilon\}$ — регулярный,
- язык из одной буквы $\{a\}$, где $a \in \Sigma$, — регулярный,

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

- пустой язык $\varnothing$ — регулярный,
- язык из пустого слова $\{\varepsilon\}$ — регулярный,
- язык из одной буквы $\{a\}$, где $a \in \Sigma$, — регулярный,
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \cup L_2$ — регулярный язык

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

- пустой язык $\varnothing$ — регулярный,
- язык из пустого слова $\{\varepsilon\}$ — регулярный,
- язык из одной буквы $\{a\}$, где $a \in \Sigma$, — регулярный,
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \cup L_2$ — регулярный язык
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \circ L_2$ — регулярный язык,

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

- пустой язык $\varnothing$ — регулярный,
- язык из пустого слова $\{\varepsilon\}$ — регулярный,
- язык из одной буквы $\{a\}$, где $a \in \Sigma$, — регулярный,
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \cup L_2$ — регулярный язык
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \circ L_2$ — регулярный язык,
- если L — регулярный, то L^* — регулярный язык.

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

- пустой язык $\varnothing$ — регулярный,
- язык из пустого слова $\{\varepsilon\}$ — регулярный,
- язык из одной буквы $\{a\}$, где $a \in \Sigma$, — регулярный,
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \cup L_2$ — регулярный язык
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \circ L_2$ — регулярный язык,
- если L — регулярный, то L^* — регулярный язык.

Для каждого регулярного языка можно записать «протокол» — последовательность операций, какими он получился из простейших языков ($\varnothing$, $\{\varepsilon\}$, $\{a\}$, где $a \in \Sigma$).

Регулярные языки

Определение

Регулярные языки — определяются по индукции:

- пустой язык $\varnothing$ — регулярный,
- язык из пустого слова $\{\varepsilon\}$ — регулярный,
- язык из одной буквы $\{a\}$, где $a \in \Sigma$, — регулярный,
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \cup L_2$ — регулярный язык
- если L_1 и L_2 — регулярные, то $L_1 \circ L_2$ — регулярный язык,
- если L — регулярный, то L^* — регулярный язык.

Для каждого регулярного языка можно записать «протокол» — последовательность операций, какими он получился из простейших языков ($\varnothing$, $\{\varepsilon\}$, $\{a\}$, где $a \in \Sigma$).
Этот протокол называют регулярным выражением.

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(e_1 \cup e_2)$ и $(e_1 \circ e_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(e_1 \cup e_2)$ и $(e_1 \circ e_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Пример. Регулярное выражение: $a \cup (b \circ (a \cup b)^*)$.

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Пример. Регулярное выражение: $a \cup (b \circ (a \cup b)^*)$.
Оно «задает» язык $\{a,\ b,\ ba, bb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}$.

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Пример. Регулярное выражение: $a \cup (b \circ (a \cup b)^*)$.
Оно «задает» язык $\{a,\ b,\ ba, bb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}$.

Сокращение: $\mathrm{e}^+ := \mathrm{e} \circ \mathrm{e}^*$.

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Пример. Регулярное выражение: $a \cup (b \circ (a \cup b)^*)$.
Оно «задает» язык $\{a,\ b,\ ba, bb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}$.

Сокращение: $\mathrm{e}^+ := \mathrm{e} \circ \mathrm{e}^*$.

Часто вместо $\cup$ пишут $|$, вместо $\circ$ не пишут ничего, конкатенация связывает сильнее объединения:

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Пример. Регулярное выражение: $a \cup (b \circ (a \cup b)^*)$.
Оно «задает» язык $\{a,\ b,\ ba, bb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}$.

Сокращение: $\mathrm{e}^+ := \mathrm{e} \circ \mathrm{e}^*$.

Часто вместо $\cup$ пишут $|$, вместо $\circ$ не пишут ничего, конкатенация связывает сильнее объединения: $a \,|\, b(a|b)^*$

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Пример. Регулярное выражение: $a \cup (b \circ (a \cup b)^*)$.
Оно «задает» язык $\{a,\ b,\ ba, bb, baa, bab, bba, bbb, \ldots\}$.

Сокращение: $\mathrm{e}^+ := \mathrm{e} \circ \mathrm{e}^*$.

Часто вместо $\cup$ пишут $|$, вместо $\circ$ не пишут ничего, конкатенация связывает сильнее объединения: $a \mid b(a|b)^*$

Что значит «задает»?

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathsf{e}_1 \cup \mathsf{e}_2)$ и $(\mathsf{e}_1 \circ \mathsf{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Восстановим по регулярному выражению задаваемый им рег. язык.

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Восстановим по регулярному выражению задаваемый им рег. язык.

Определение

Язык $\mathbb{L}(\mathrm{e}) \subseteq \Sigma^*$, задаваемый регулярным выражением e:

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Восстановим по регулярному выражению задаваемый им рег. язык.

Определение

Язык $\mathbb{L}(\mathrm{e}) \subseteq \Sigma^*$, задаваемый регулярным выражением e:

- $\mathbb{L}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathbb{L}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$, $\mathbb{L}(a) = \{a\}$ для каждой буквы $a \in \Sigma$,

Регулярные выражения

Определение

Регулярные выражения над алфавитом Σ определяются по индукции:

- записи $\varnothing$, ε, a (где $a \in \Sigma$) — регулярные выражения,
- если e_1 и e_2 — рег. выражения, то $(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2)$ и $(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2)$ — тоже,
- если e — регулярное выражение, то e^* — тоже.

Восстановим по регулярному выражению задаваемый им рег. язык.

Определение

Язык $\mathbb{L}(\mathrm{e}) \subseteq \Sigma^*$, задаваемый регулярным выражением e:

- $\mathbb{L}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathbb{L}(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$, $\mathbb{L}(a) = \{a\}$ для каждой буквы $a \in \Sigma$,
- $\mathbb{L}(\mathrm{e}_1 \cup \mathrm{e}_2) = \mathbb{L}(\mathrm{e}_1) \cup \mathbb{L}(\mathrm{e}_2)$,
- $\mathbb{L}(\mathrm{e}_1 \circ \mathrm{e}_2) = \mathbb{L}(\mathrm{e}_1) \circ \mathbb{L}(\mathrm{e}_2)$,
- $\mathbb{L}(\mathrm{e}^*) = \big(\mathbb{L}(\mathrm{e}_1)\big)^*$.

Регулярные языки

Теорема

Для любого языка $\mathcal{L}$, следующие условия эквивалентны:

- $\mathcal{L}$ — регулярный язык,
- $\mathcal{L}$ задается некоторым регулярным выражением: $\mathcal{L} = \mathbb{L}(\mathrm{e})$,

Регулярные языки

Теорема

Для любого языка $\mathcal{L}$, следующие условия эквивалентны:

- $\mathcal{L}$ — регулярный язык,
- $\mathcal{L}$ задается некоторым регулярным выражением: $\mathcal{L} = \mathbb{L}(\mathrm{e})$,
- $\mathcal{L}$ распознается *конечным детерминированным автоматом*,
- $\mathcal{L}$ распознается *конечным недетерминированным автоматом*.

(См. учебник по теории формальных языков.)

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется регулярной, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется *регулярной*, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.
Грамматическая логика $\mathbf{K}\Pi$ называется *регулярной модальной логикой*, если грамматика Π регулярна.

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется *регулярной*, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.
Грамматическая логика $\mathbf{K}\Pi$ называется *регулярной модальной логикой*, если грамматика Π регулярна.

Грамматика $\Pi = \{b \to aba\}$ нерегулярна, поскольку язык слов, выводимых в Π из буквы b, не является регулярным:

$$\Pi(b) = \{a^n\, b\, a^n \mid n \geqslant 0\}.$$

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется регулярной, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.
Грамматическая логика $\mathbf{K}\Pi$ называется регулярной модальной логикой, если грамматика Π регулярна.

Грамматика $\Pi = \{b \to aba\}$ нерегулярна, поскольку язык слов, выводимых в Π из буквы b, не является регулярным:

$$\Pi(b) = \{a^n\, b\, a^n \mid n \geqslant 0\}.$$

Теорема

Алгоритмически неразрешима проблема:

«является ли КС-грамматика Π регулярной?».

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется регулярной, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.
Грамматическая логика $\mathbf{K}\Pi$ называется регулярной модальной логикой, если грамматика Π регулярна.

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется регулярной, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.
Грамматическая логика $\mathbf{K}\Pi$ называется регулярной модальной логикой, если грамматика Π регулярна.

Теорема (Шапировский, Золин, 2014)

Всякая регулярная модальная логика допускает фильтрацию.

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется регулярной, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.
Грамматическая логика $\mathbf{K}\Pi$ называется регулярной модальной логикой, если грамматика Π регулярна.

Теорема (Шапировский, Золин, 2014)

Всякая регулярная модальная логика допускает фильтрацию.

Следствие (S. Demri, 2001)

Всякая регулярная модальная логика обладает FMP и разрешима.

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется регулярной, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.
Грамматическая логика $\mathbf{K}\Pi$ называется регулярной модальной логикой, если грамматика Π регулярна.

Теорема (Шапировский, Золин, 2014)

Всякая регулярная модальная логика допускает фильтрацию.

Следствие (S. Demri, 2001)

Всякая регулярная модальная логика обладает FMP и разрешима.

Их сложность — между $\textsc{PSpace}$ *и* $\textsc{ExpTime}$.

Регулярные модальные логики

$\Pi(u) = \{v \mid u \overset{\Pi}{\Longmapsto} v\}$ — множество слов, выводимых из u в Π.

Определение

КС-грамматика Π называется регулярной, если для каждой буквы $a \in \Sigma$ язык $\Pi(a)$ является регулярным.
Грамматическая логика $\mathbf{K}\Pi$ называется регулярной модальной логикой, если грамматика Π регулярна.

Теорема (Шапировский, Золин, 2014)

Всякая регулярная модальная логика допускает фильтрацию.

Следствие (S. Demri, 2001)

Всякая регулярная модальная логика обладает FMP и разрешима.

Их сложность — между PSPACE *и* $\mathrm{EXPTIME}$.

Все они обладают ExpMP (если $L \nvdash A$, то A опровергается на некоторой L-модели экспоненциального от длины $|A|$ размера).

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p \,\}$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\,\Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p\,\}$.
  Регулярная грамматика: $\Pi = \{a \to a^4 a,\ a \to a^6 a\}$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p \,\}$.
  Регулярная грамматика: $\Pi = \{a \to a^4 a,\ a \to a^6 a\}$.
  Язык: $\Pi(a) = \{a, a^{4+1}, a^{7+1}, a^{4+4+1}, a^{4+7+1}, a^{7+7+1}, a^{4+4+4+1}, \ldots\}$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\,\Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p\,\}$.
  Регулярная грамматика: $\Pi = \{a \to a^4 a,\ a \to a^6 a\}$.
  Язык: $\Pi(a) = \{a, a^{4+1}, a^{7+1}, a^{4+4+1}, a^{4+7+1}, a^{7+7+1}, a^{4+4+4+1}, \ldots\}$.
  Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^4|a^7)^* \circ a$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p \,\}$.
  Регулярная грамматика: $\Pi = \{a \to a^4 a,\ a \to a^6 a\}$.
  Язык: $\Pi(a) = \{a, a^{4+1}, a^{7+1}, a^{4+4+1}, a^{4+7+1}, a^{7+7+1}, a^{4+4+4+1}, \ldots\}$.
  Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^4|a^7)^* \circ a$.

Мы пока не строили фильтрацию для таких регулярных логик:

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p \,\}$.
  Регулярная грамматика: $\Pi = \{a \to a^4 a,\ a \to a^6 a\}$.
  Язык: $\Pi(a) = \{a, a^{4+1}, a^{7+1}, a^{4+4+1}, a^{4+7+1}, a^{7+7+1}, a^{4+4+4+1}, \ldots\}$.
  Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^4|a^7)^* \circ a$.

Мы пока не строили фильтрацию для таких регулярных логик:

- $\mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ — соотв. рег. грамматике $\Pi = \{s \to rs\}$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p \,\}$.
  Регулярная грамматика: $\Pi = \{a \to a^4 a,\ a \to a^6 a\}$.
  Язык: $\Pi(a) = \{a, a^{4+1}, a^{7+1}, a^{4+4+1}, a^{4+7+1}, a^{7+7+1}, a^{4+4+4+1}, \ldots\}$.
  Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^4|a^7)^* \circ a$.

Мы пока не строили фильтрацию для таких регулярных логик:

- $\mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ — соотв. рег. грамматике $\Pi = \{s \to rs\}$.
  Регулярное выражение: $r^* s$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p \,\}$.
  Регулярная грамматика: $\Pi = \{a \to a^4 a,\ a \to a^6 a\}$.
  Язык: $\Pi(a) = \{a, a^{4+1}, a^{7+1}, a^{4+4+1}, a^{4+7+1}, a^{7+7+1}, a^{4+4+4+1}, \ldots\}$.
  Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^4|a^7)^* \circ a$.

Мы пока не строили фильтрацию для таких регулярных логик:

- $\mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ — соотв. рег. грамматике $\Pi = \{s \to rs\}$.
  Регулярное выражение: $r^* s$.
- $\mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_s \Box_r p)$ — соотв. рег. грамматике $\Pi = \{s \to sr\}$.

Регулярные модальные логики и их рег. выр.

Мы уже умеем фильтровать некоторые регулярные модальные логики:

- Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^+.
- Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to aa,\ a \to \varepsilon\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: a^*.
- Логика $\mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ — соответствует рег. грамматике $\Pi = \{a \to a^n a\}$. Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^n)^* \circ a$.
- Логика $\mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \to \Box^4 \Box p,\ \Box p \to \Box^7 \Box p \,\}$.
  Регулярная грамматика: $\Pi = \{a \to a^4 a,\ a \to a^6 a\}$.
  Язык: $\Pi(a) = \{a, a^{4+1}, a^{7+1}, a^{4+4+1}, a^{4+7+1}, a^{7+7+1}, a^{4+4+4+1}, \ldots\}$.
  Регулярное выражение для $\Pi(a)$: $(a^4|a^7)^* \circ a$.

Мы пока не строили фильтрацию для таких регулярных логик:

- $\mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ — соотв. рег. грамматике $\Pi = \{s \to rs\}$.
  Регулярное выражение: $r^* s$.
- $\mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_s \Box_r p)$ — соотв. рег. грамматике $\Pi = \{s \to sr\}$.
  Регулярное выражение: sr^*.

Фильтрация для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to rs\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Фильтрация для логики $\mathbf{K\Pi}$ грамматики $\Pi = \{s \to rs\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дана модель $M = (W, R, S, V)$ со шкалой $F = (W, R, S)$, такой что $F \models L$, то есть $S \supseteq R \circ S$.

Фильтрация для логики $\mathbf{K}\Pi$ грамматики $\Pi = \{s \to rs\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дана модель $M = (W, R, S, V)$ со шкалой $F = (W, R, S)$, такой что $F \models L$, то есть $S \supseteq R \circ S$.
Дано конечное Sub-замкнутое множество формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\Box_r, \Box_s)$.

Фильтрация для логики $\mathbf{K}\Pi$ грамматики $\Pi = \{s \to rs\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дана модель $M = (W, R, S, V)$ со шкалой $F = (W, R, S)$, такой что $F \models L$, то есть $S \supseteq R \circ S$.

Дано конечное Sub-замкнутое множество формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\Box_r, \Box_s)$.

Надо построить модель $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ со шкалой $\widehat{F} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{S})$,

Фильтрация для логики **КП** грамматики $\Pi = \{s \to rs\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дана модель $M = (W, R, S, V)$ со шкалой $F = (W, R, S)$, такой что $F \models L$, то есть $S \supseteq R \circ S$.

Дано конечное Sub-замкнутое множество формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\Box_r, \Box_s)$.

Надо построить модель $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ со шкалой $\widehat{F} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{S})$, где $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ для некоторого конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \supseteq \Gamma$,

Фильтрация для логики $\mathbf{K}\Pi$ грамматики $\Pi = \{s \to rs\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дана модель $M = (W, R, S, V)$ со шкалой $F = (W, R, S)$, такой что $F \models L$, то есть $S \supseteq R \circ S$.
Дано конечное Sub-замкнутое множество формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\Box_r, \Box_s)$.

Надо построить модель $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ со шкалой $\widehat{F} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{S})$, где $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ для некоторого конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы:

1. $\widehat{F}$ была L-шкалой, то есть Π-шкалой, то есть $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$,

Фильтрация для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to rs\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дана модель $M = (W, R, S, V)$ со шкалой $F = (W, R, S)$, такой что $F \models L$, то есть $S \supseteq R \circ S$.

Дано конечное Sub-замкнутое множество формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\Box_r, \Box_s)$.

Надо построить модель $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ со шкалой $\widehat{F} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{S})$, где $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ для некоторого конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы:

1. $\widehat{F}$ была L-шкалой, то есть Π-шкалой, то есть $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$,
2. $R^{\min}_\Phi \subseteq \widehat{R} \subseteq R^{\max}_\Gamma$,

Фильтрация для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to rs\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дана модель $M = (W, R, S, V)$ со шкалой $F = (W, R, S)$, такой что $F \models L$, то есть $S \supseteq R \circ S$.

Дано конечное Sub-замкнутое множество формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\Box_r, \Box_s)$.

Надо построить модель $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ со шкалой $\widehat{F} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{S})$, где $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ для некоторого конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы:

1. $\widehat{F}$ была L-шкалой, то есть Π-шкалой, то есть $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$,
2. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$,
3. $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

$\Box$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$, (2) $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$, (3) $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$,   (2) $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$,   (3) $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$, (2) $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$, (3) $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

$$(1)\ \widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}, \qquad (2)\ R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}, \qquad (3)\ S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}.$$

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$.

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$, (2) $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$, (3) $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

$$(1)\ \widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}, \qquad (2)\ R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}, \qquad (3)\ S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}.$$

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Утверждение. $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$. Более того, $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq R_\Phi^{\max} \circ S_\Gamma^{\max}}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$, (2) $R^{\min}_{\Phi} \subseteq \widehat{R} \subseteq R^{\max}_{\Gamma}$, (3) $S^{\min}_{\Phi} \subseteq \widehat{S} \subseteq S^{\max}_{\Gamma}$.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R^{\min}_{\Phi}$, $\widehat{S} = S^{\max}_{\Gamma}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R^{\min}_{\Phi}$ и $R^{\max}_{\Gamma}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Утверждение. $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$. Более того, $\boxed{S^{\max}_{\Gamma} \supseteq R^{\max}_{\Phi} \circ S^{\max}_{\Gamma}}$

Доказательство. Пусть $\widehat{x}\,(R^{\max}_{\Phi})\,\widehat{y}\,(S^{\max}_{\Gamma})\,\widehat{z}$.

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$, (2) $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$, (3) $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Утверждение. $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$. Более того, $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq R_\Phi^{\max} \circ S_\Gamma^{\max}}$

Доказательство. Пусть $\widehat{x}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{y}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$, (2) $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$, (3) $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Утверждение. $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$. Более того, $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq R_\Phi^{\max} \circ S_\Gamma^{\max}}$

Доказательство. Пусть $\widehat{x}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{y}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?
Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_r \Box_s A \in \Phi$. Имеем:

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$, (2) $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$, (3) $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Утверждение. $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$. Более того, $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq R_\Phi^{\max} \circ S_\Gamma^{\max}}$

Доказательство. Пусть $\widehat{x}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{y}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?
Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_r \Box_s A \in \Phi$. Имеем:

$x \models \Box_s A$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

$$(1)\ \widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}, \qquad (2)\ R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}, \qquad (3)\ S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}.$$

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Утверждение. $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$. Более того, $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq R_\Phi^{\max} \circ S_\Gamma^{\max}}$

Доказательство. Пусть $\widehat{x}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{y}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?
Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_r \Box_s A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_r \Box_s A$$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

$$(1)\ \widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}, \qquad (2)\ R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}, \qquad (3)\ S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}.$$

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Утверждение. $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$. Более того, $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq R_\Phi^{\max} \circ S_\Gamma^{\max}}$

Доказательство. Пусть $\widehat{x}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{y}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?
Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_r \Box_s A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_r \Box_s A \implies y \models \Box_s A$$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_r \Box_s p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Дано: модель $M = (W, R, S, V)$, $S \supseteq R \circ S$, и множество формул Γ.
Надо: построить $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$, где $\Phi \supseteq \Gamma$, так чтобы выполнились:

(1) $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$, (2) $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$, (3) $S_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{S} \subseteq S_\Gamma^{\max}$.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \{\Box_r \Box_s A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — конечное Sub-замкнутое.

Мини-макс шкала: $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$, $\widehat{S} = S_\Gamma^{\max}$.
Можно $\widehat{R}$ — любое между $R_\Phi^{\min}$ и $R_\Gamma^{\max}$. Тогда (2) и (3) очевидны.

Утверждение. $\widehat{S} \supseteq \widehat{R} \circ \widehat{S}$. Более того, $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq R_\Phi^{\max} \circ S_\Gamma^{\max}}$

Доказательство. Пусть $\widehat{x}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{y}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?
Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_r \Box_s A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_r \Box_s A \implies y \models \Box_s A \implies z \models A. \qquad \Box$$

Пробуем для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Пробуем для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.
Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Пробуем для логики $\mathbf{K\Pi}$ грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пробуем для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$.

Пробуем для логики **КП** грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?

Пробуем для логики $\mathbf{K\Pi}$ грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?
Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_s \Box_r A \in \Phi$. Имеем:

Пробуем для логики **КП** грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.
Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s\Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?
Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_s\Box_r A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_s\Box_r A \stackrel{???}{\implies} y \models \Box_r A \implies z \models A.$$

Пробуем для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?

Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_s \Box_r A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_s \Box_r A \overset{???}{\implies} y \models \Box_r A \implies z \models A.$$

Ведь $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ связаны лишь отношением $S_\Gamma^{\max}$ — по Γ, а не по Φ!

Пробуем для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.
Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?
Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_s \Box_r A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_s \Box_r A \overset{???}{\implies} y \models \Box_r A \implies z \models A.$$

Ведь $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ связаны лишь отношением $S_\Gamma^{\max}$ — по Γ, а не по Φ!

Даже если вместо $R_\Phi^{\max}$ возьмем $R_\Phi^{\min}$, шаг от x к y не проходит.

Пробуем для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?

Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_s \Box_r A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_s \Box_r A \overset{???}{\implies} y \models \Box_r A \implies z \models A.$$

Ведь $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ связаны лишь отношением $S_\Gamma^{\max}$ — по Γ, а не по Φ!

Даже если вместо $R_\Phi^{\max}$ возьмем $R_\Phi^{\min}$, шаг от x к y не проходит.

Тем не менее, эта логика допускает фильтрацию.

Пробуем для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s \Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?

Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_s \Box_r A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_s \Box_r A \overset{???}{\implies} y \models \Box_r A \implies z \models A.$$

Ведь $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ связаны лишь отношением $S_\Gamma^{\max}$ — по Γ, а не по Φ!

Даже если вместо $R_\Phi^{\max}$ возьмем $R_\Phi^{\min}$, шаг от x к y не проходит.

Тем не менее, эта логика допускает фильтрацию.

Для доказательства нужно привлечь обратные модальности!

Пробуем для логики КП грамматики $\Pi = \{s \to sr\}$

Теорема

Логика $L = \mathbf{K}_2 \oplus \Box_s p \to \Box_s \Box_r p$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Попытка доказательства.

Строим $\Phi := \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box_s\Box_r A \mid \Box_s A \in \Gamma\}$ — это конечное мн-во.

Попытаемся доказать: $\boxed{S_\Gamma^{\max} \supseteq S_\Gamma^{\max} \circ R_\Phi^{\max}}$???

Пусть $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{y}\,(R_\Phi^{\max})\,\widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\,(S_\Gamma^{\max})\,\widehat{z}$?

Берем любую формулу $\Box_s A \in \Gamma$. Тогда $\Box_s\Box_r A \in \Phi$. Имеем:

$$x \models \Box_s A \implies x \models \Box_s\Box_r A \overset{???}{\implies} y \models \Box_r A \implies z \models A.$$

Ведь $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ связаны лишь отношением $S_\Gamma^{\max}$ — по Γ, а не по Φ!

Даже если вместо $R_\Phi^{\max}$ возьмем $R_\Phi^{\min}$, шаг от x к y не проходит.

Тем не менее, эта логика допускает фильтрацию.

Для доказательства нужно привлечь обратные модальности!

Тогда «левое» правило $s \to sr$ превратится в «правое» $\overline{s} \to \overline{r}\,\overline{s}$.

Как строятся замыкания отношений?

Лекция 10: 2-й способ фильтрации для **K4** — через $(R_\Phi^{\min})^+$ (транзитивное замыкание минимального отношения).

Как строятся замыкания отношений?

Лекция 10: 2-й способ фильтрации для **K4** — через $(R_\Phi^{\min})^+$ (транзитивное замыкание минимального отношения).

Грамматика: $\Pi = \{a \to aa\}$.

Как строятся замыкания отношений?

Лекция 10: 2-й способ фильтрации для **K4** — через $(R_\Phi^{\min})^+$ (транзитивное замыкание минимального отношения).

Грамматика: $\Pi = \{a \to aa\}$.

Язык этой грамматики: $\Pi(a) = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$.

Как строятся замыкания отношений?

Лекция 10: 2-й способ фильтрации для **K4** — через $(R_\Phi^{\min})^+$ (транзитивное замыкание минимального отношения).

Грамматика: $\Pi = \{a \to aa\}$.

Язык этой грамматики: $\Pi(a) = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$.

Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup \ldots = \bigcup\limits_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Как строятся замыкания отношений?

Лекция 10: 2-й способ фильтрации для **K4** — через $(R_\Phi^{\min})^+$ (транзитивное замыкание минимального отношения).

Грамматика: $\Pi = \{a \to aa\}$.

Язык этой грамматики: $\Pi(a) = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$.

Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup \ldots = \bigcup\limits_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Аналогично для других разобранных логик — чтобы построить замыкание отношения R_a, надо взять объединение R_α по всем словам из языка $\Pi(a)$.

Как строятся замыкания отношений?

Лекция 10: 2-й способ фильтрации для **K4** — через $(R_\Phi^{\min})^+$ (транзитивное замыкание минимального отношения).
Грамматика: $\Pi = \{a \to aa\}$.
Язык этой грамматики: $\Pi(a) = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup \ldots = \bigcup\limits_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Аналогично для других разобранных логик — чтобы построить замыкание отношения R_a, надо взять объединение R_α по всем словам из языка $\Pi(a)$.

Дадим общее определение.

Грамматическое замыкание шкалы

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала Крипке,
Π — КС-грамматика, то есть все правила имеют вид $a \to \beta$.

Грамматическое замыкание шкалы

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала Крипке,
Π — КС-грамматика, то есть все правила имеют вид $a \to \beta$.

Определение

П-замыкание шкалы F — это шкала $F^\Pi = (W, (R_a^\Pi)_{a \in \Sigma})$, где замыкания отношений определяются так:

$$R_a^\Pi := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha.$$

Грамматическое замыкание шкалы

Пусть $F = (W, (R_a)_{a \in \Sigma})$ — шкала Крипке,
Π — КС-грамматика, то есть все правила имеют вид $a \to \beta$.

Определение

Π-замыкание шкалы F — это шкала $F^\Pi = (W, (R_a^\Pi)_{a \in \Sigma})$, где замыкания отношений определяются так:

$$R_a^\Pi := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha.$$

Замечание. Это частный случай хорнова замыкания, так как для КС-грамматик включения $R_a \supseteq R_\beta$ задают хорново условие на шкалы, и мы ищем минимальное отношение, содержащее R_a и удовлетворяющее этому хорнову условию (или семейству хорновых условий, для всех правил из нашей грамматики).

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

П-замыкание любой шкалы является П-шкалой: $F^{\Pi} \models \Pi$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R^{\Pi}_a)_{a \in \Sigma})$, где $R^{\Pi}_a \; := \; \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

П-замыкание любой шкалы является П-шкалой: $F^{\Pi} \models \Pi$.

Доказательство.

Для каждого правила $a \to \beta$ из П нам надо проверить: $R^{\Pi}_a \supseteq (R^{\Pi})_\beta$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^\Pi = (W, (R_a^\Pi)_{a \in \Sigma})$, где $R_a^\Pi \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

П-замыкание любой шкалы является П-шкалой: $F^\Pi \models \Pi$.

Доказательство.

Для каждого правила $a \to \beta$ из П нам надо проверить: $R_a^\Pi \supseteq (R^\Pi)_\beta$.
Пусть слово $\beta = c_1 \dots c_n$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^\Pi = (W, (R_a^\Pi)_{a \in \Sigma})$, где $R_a^\Pi \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

П-замыкание любой шкалы является П-шкалой: $F^\Pi \models \Pi$.

Доказательство.

Для каждого правила $a \to \beta$ из П нам надо проверить: $R_a^\Pi \supseteq (R^\Pi)_\beta$.
Пусть слово $\beta = c_1 \dots c_n$.
Берем любые точки x, y, т.ч. $x\,(R^\Pi)_\beta\,y$, т.е. $x\,(R_{c_1}^\Pi \circ \dots \circ R_{c_1}^\Pi)\,y$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a\in\Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \;:=\; \bigcup_{\alpha\in\Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

П-замыкание любой шкалы является П-шкалой: $F^{\Pi} \models \Pi$.

Доказательство.

Для каждого правила $a \to \beta$ из Π нам надо проверить: $R_a^{\Pi} \supseteq (R^{\Pi})_\beta$.
Пусть слово $\beta = c_1 \ldots c_n$.
Берем любые точки x, y, т.ч. $x\,(R^{\Pi})_\beta\,y$, т.е. $x\,(R_{c_1}^{\Pi} \circ \ldots \circ R_{c_1}^{\Pi})\,y$.
Для некоторых слов $\alpha_i \in \Pi(c_i)$ имеем: $x\,(R_{\alpha_1} \circ \ldots \circ R_{\alpha_n})\,y$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

Π-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

Π-замыкание любой шкалы является Π-шкалой: $F^{\Pi} \models \Pi$.

Доказательство.

Для каждого правила $a \to \beta$ из Π нам надо проверить: $R_a^{\Pi} \supseteq (R^{\Pi})_\beta$.
Пусть слово $\beta = c_1 \dots c_n$.
Берем любые точки x, y, т.ч. $x\,(R^{\Pi})_\beta\, y$, т.е. $x\,(R_{c_1}^{\Pi} \circ \dots \circ R_{c_1}^{\Pi})\, y$.
Для некоторых слов $\alpha_i \in \Pi(c_i)$ имеем: $x\,(R_{\alpha_1} \circ \dots \circ R_{\alpha_n})\, y$.
То есть $x\,(R_{\alpha_1 \dots \alpha_n})\, y$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \;:=\; \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

П-замыкание любой шкалы является П-шкалой: $F^{\Pi} \models \Pi$.

Доказательство.

Для каждого правила $a \to \beta$ из Π нам надо проверить: $R_a^{\Pi} \supseteq (R^{\Pi})_\beta$.
Пусть слово $\beta = c_1 \dots c_n$.
Берем любые точки x, y, т.ч. $x\,(R^{\Pi})_\beta\,y$, т.е. $x\,(R_{c_1}^{\Pi} \circ \dots \circ R_{c_1}^{\Pi})\,y$.
Для некоторых слов $\alpha_i \in \Pi(c_i)$ имеем: $x\,(R_{\alpha_1} \circ \dots \circ R_{\alpha_n})\,y$.
То есть $x\,(R_{\alpha_1 \dots \alpha_n})\,y$. Но $\quad a \overset{\Pi}{\longmapsto} c_1 \dots c_n \quad$ и $\quad c_i \overset{\Pi}{\Longmapsto} \alpha_i$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a\in\Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \;:=\; \bigcup_{\alpha\in\Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

П-замыкание любой шкалы является П-шкалой: $F^{\Pi} \models \Pi$.

Доказательство.

Для каждого правила $a \to \beta$ из П нам надо проверить: $R_a^{\Pi} \supseteq (R^{\Pi})_\beta$.
Пусть слово $\beta = c_1 \ldots c_n$.
Берем любые точки x, y, т.ч. $x\,(R^{\Pi})_\beta\, y$, т.е. $x\,(R_{c_1}^{\Pi} \circ \ldots \circ R_{c_1}^{\Pi})\, y$.
Для некоторых слов $\alpha_i \in \Pi(c_i)$ имеем: $x\,(R_{\alpha_1} \circ \ldots \circ R_{\alpha_n})\, y$.
То есть $x\,(R_{\alpha_1\ldots\alpha_n})\, y$. Но $a \overset{\Pi}{\longmapsto} c_1 \ldots c_n$ и $c_i \overset{\Pi}{\Longmapsto} \alpha_i$.
Поэтому $a \overset{\Pi}{\Longmapsto} \alpha_1 \ldots \alpha_n$.
То есть $x\, R_u\, y$ для слова $u = \alpha_1 \ldots \alpha_n \in \Pi(a)$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a\in\Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \;:=\; \bigcup_{\alpha\in\Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (1)

П-замыкание любой шкалы является П-шкалой: $F^{\Pi} \models \Pi$.

Доказательство.

Для каждого правила $a \to \beta$ из П нам надо проверить: $R_a^{\Pi} \supseteq (R^{\Pi})_\beta$.
Пусть слово $\beta = c_1 \dots c_n$.
Берем любые точки x, y, т.ч. $x\,(R^{\Pi})_\beta\, y$, т.е. $x\,(R_{c_1}^{\Pi} \circ \dots \circ R_{c_1}^{\Pi})\, y$.
Для некоторых слов $\alpha_i \in \Pi(c_i)$ имеем: $x\,(R_{\alpha_1} \circ \dots \circ R_{\alpha_n})\, y$.
То есть $x\,(R_{\alpha_1 \dots \alpha_n})\, y$. Но $\quad a \overset{\Pi}{\longmapsto} c_1 \dots c_n \quad$ и $\quad c_i \overset{\Pi}{\Longmapsto} \alpha_i$.
Поэтому $a \overset{\Pi}{\Longmapsto} \alpha_1 \dots \alpha_n$.
То есть $x\, R_u\, y$ для слова $u = \alpha_1 \dots \alpha_n \in \Pi(a)$. Тем самым $x\,(R_a^{\Pi})\, y$. $\square$

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (2)

П-замыкание шкалы F — это наименьшая П-шкала, содержащая F.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (2)

П-замыкание шкалы F — это наименьшая П-шкала, содержащая F.

Доказательство.

Пусть $G = (W, (S_a)_{a \in \Sigma})$ — произвольная П-шкала (с тем же W), содержащая шкалу F, то есть $S_a \supseteq R_a$ для всех букв $a \in \Sigma$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (2)

П-замыкание шкалы F — это наименьшая П-шкала, содержащая F.

Доказательство.

Пусть $G = (W, (S_a)_{a \in \Sigma})$ — произвольная П-шкала (с тем же W), содержащая шкалу F, то есть $S_a \supseteq R_a$ для всех букв $a \in \Sigma$.

Для всякого слова $\alpha \in \Pi(a)$ имеем $G \models a \to \alpha$,

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^\Pi = (W, (R_a^\Pi)_{a\in\Sigma})$, где $R_a^\Pi := \bigcup_{\alpha\in\Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (2)

П-замыкание шкалы F — это наименьшая П-шкала, содержащая F.

Доказательство.

Пусть $G = (W, (S_a)_{a\in\Sigma})$ — произвольная П-шкала (с тем же W), содержащая шкалу F, то есть $S_a \supseteq R_a$ для всех букв $a \in \Sigma$.

Для всякого слова $\alpha \in \Pi(a)$ имеем $G \models a \to \alpha$, значит, $S_a \supseteq S_\alpha \supseteq R_\alpha$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \; := \; \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (2)

П-замыкание шкалы F — это наименьшая П-шкала, содержащая F.

Доказательство.

Пусть $G = (W, (S_a)_{a \in \Sigma})$ — произвольная П-шкала (с тем же W), содержащая шкалу F, то есть $S_a \supseteq R_a$ для всех букв $a \in \Sigma$.

Для всякого слова $\alpha \in \Pi(a)$ имеем $G \models a \to \alpha$, значит, $S_a \supseteq S_\alpha \supseteq R_\alpha$.

Получили $S_a \supseteq R_a^{\Pi}$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

Π-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (2)

Π-замыкание шкалы F — это наименьшая Π-шкала, содержащая F.

Доказательство.

Пусть $G = (W, (S_a)_{a \in \Sigma})$ — произвольная Π-шкала (с тем же W), содержащая шкалу F, то есть $S_a \supseteq R_a$ для всех букв $a \in \Sigma$.

Для всякого слова $\alpha \in \Pi(a)$ имеем $G \models a \to \alpha$, значит, $S_a \supseteq S_\alpha \supseteq R_\alpha$.

Получили $S_a \supseteq R_a^{\Pi}$. Тем самым G содержит F^{Π} (как подшкалу). □

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

Π-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \; := \; \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

Π-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (3)

Если F — уже Π-шкала, то $F^{\Pi} = F$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} := \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (3)

Если F — уже П*-шкала, то $F^{\Pi} = F$.*

Доказательство.

Докажем: $R_a = R_a^{\Pi}$.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (3)

Если F — уже П*-шкала, то $F^{\Pi} = F$.*

Доказательство.

Докажем: $R_a = R_a^{\Pi}$. Включение $(\subseteq)$ тривиально. Осталось $(\supseteq)$

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (3)

Если F — уже П-шкала, то $F^{\Pi} = F$.

Доказательство.

Докажем: $R_a = R_a^{\Pi}$. Включение ($\subseteq$) тривиально. Осталось ($\supseteq$)
Почему для любого слова $\alpha \in \Pi(a)$ имеем $R_a \supseteq R_\alpha$?

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R_a^{\Pi})_{a \in \Sigma})$, где $R_a^{\Pi} \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (3)

Если F — уже П*-шкала, то $F^{\Pi} = F$.*

Доказательство.

Докажем: $R_a = R_a^{\Pi}$. Включение ($\subseteq$) тривиально. Осталось ($\supseteq$)
Почему для любого слова $\alpha \in \Pi(a)$ имеем $R_a \supseteq R_\alpha$?
Потому что $F \models \Pi$, в частности, $F \models a \to \alpha$, поскольку $a \overset{\Pi}{\Longmapsto} \alpha$. $\square$

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

П-замыкание шкалы: $F^{\Pi} = (W, (R^{\Pi}_a)_{a \in \Sigma})$, где $R^{\Pi}_a \ := \ \bigcup_{\alpha \in \Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (3)

Если F — уже П-шкала, то $F^{\Pi} = F$.

Доказательство.

Докажем: $R_a = R^{\Pi}_a$. Включение $(\subseteq)$ тривиально. Осталось $(\supseteq)$
Почему для любого слова $\alpha \in \Pi(a)$ имеем $R_a \supseteq R_\alpha$?
Потому что $F \models \Pi$, в частности, $F \models a \to \alpha$, поскольку $a \overset{\Pi}{\Longmapsto} \alpha$. $\square$

Вывод: чтобы получить класс всех П-шкал, нужно взять класс всех шкал и П-замкнуть все шкалы.

Грамматическое замыкание шкалы

Определение

Π-замыкание шкалы: $F^\Pi = (W, (R^\Pi_a)_{a\in\Sigma})$, где $R^\Pi_a \;:=\; \bigcup_{\alpha\in\Pi(a)} R_\alpha$.

Лемма (3)

Если F — уже Π-шкала, то $F^\Pi = F$.

Доказательство.

Докажем: $R_a = R^\Pi_a$. Включение ($\subseteq$) тривиально. Осталось ($\supseteq$)
Почему для любого слова $\alpha \in \Pi(a)$ имеем $R_a \supseteq R_\alpha$?
Потому что $F \models \Pi$, в частности, $F \models a \to \alpha$, поскольку $a \overset{\Pi}{\Longrightarrow} \alpha$. $\square$

Вывод: чтобы получить класс всех Π-шкал, нужно взять класс всех шкал и Π-замкнуть все шкалы.

Но если языки $\Pi(a)$ регулярны, то они задаются некоторыми регулярными выражениями! То есть $\Pi(a) = \mathbb{L}(\mathrm{e})$.

Шкалы Крипке и регулярные выражения

Если $\mathrm{e}(a_1, \ldots, a_n)$ — рег. выражение над алфавитом $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то вместо букв a_i можно подставить отношения R_{a_i} из шкалы F.

Шкалы Крипке и регулярные выражения

Если $\mathrm{e}(a_1, \ldots, a_n)$ — рег. выражение над алфавитом $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то вместо букв a_i можно подставить отношения R_{a_i} из шкалы F.
Получится некоторое отношение.

Шкалы Крипке и регулярные выражения

Если $\mathsf{e}(a_1, \ldots, a_n)$ — рег. выражение над алфавитом $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то вместо букв a_i можно подставить отношения R_{a_i} из шкалы F. Получится некоторое отношение.

Лемма

$$\mathsf{e}(R_{a_1}, \ldots, R_{a_n}) \;=\; \bigcup_{\alpha \in \mathbb{L}(\mathsf{e})} R_\alpha .$$

Шкалы Крипке и регулярные выражения

Если $\mathsf{e}(a_1, \ldots, a_n)$ — рег. выражение над алфавитом $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то вместо букв a_i можно подставить отношения R_{a_i} из шкалы F. Получится некоторое отношение.

Лемма

$$\mathsf{e}(R_{a_1}, \ldots, R_{a_n}) \;=\; \bigcup_{\alpha \in \mathbb{L}(\mathsf{e})} R_\alpha.$$

Доказательство.

Простая индукция по построению выражения e. □

Шкалы Крипке и регулярные выражения

Если $\mathsf{e}(a_1, \dots, a_n)$ — рег. выражение над алфавитом $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$, то вместо букв a_i можно подставить отношения R_{a_i} из шкалы F. Получится некоторое отношение.

Лемма

$$\mathsf{e}(R_{a_1}, \dots, R_{a_n}) \;=\; \bigcup_{\alpha \in \mathbb{L}(\mathsf{e})} R_\alpha.$$

Доказательство.

Простая индукция по построению выражения e. □

Значит, если для каждой буквы $a_i \in \Sigma$ язык $\Pi(a_i)$ — регулярный, т.е. задается некоторым регулярным выражением: $\Pi(a_i) = \mathbb{L}(\mathsf{e}_i)$, то класс всех Π-шкал можно получить из класса всех шкал так:

1. добавлять в шкалы нужные объединения, композиции и рефл.-транз. замыкания отношений, согласно выражениям e_i,
2. удалить из шкал «промежуточные» отношения.

Операции на шкалах, сохраняющие фильтруемость

Теорема (Шапировский, Золин, 2014)

Пусть $\mathbb{F}$ — класс шкал (с несколькими отношениями), L — его логика.
Пусть L — допускает фильтрацию.

Операции на шкалах, сохраняющие фильтруемость

Теорема (Шапировский, Золин, 2014)

Пусть $\mathbb{F}$ — класс шкал (с несколькими отношениями), L — его логика.
Пусть L — допускает фильтрацию.
Тогда если

- ко всем шкалам добавить отношение $R_a \cup R_b$ или
- ко всем шкалам добавить отношение $R_a \circ R_b$ или
- ко всем шкалам добавить отношение $(R_a)^+$ или
- во всех шкалах удалить отношение с индексом $a \in \Sigma$,

то логика получившегося класса шкал — тоже допускает фильтрацию.

Операции на шкалах, сохраняющие фильтруемость

Теорема (Шапировский, Золин, 2014)

Пусть $\mathbb{F}$ — класс шкал (с несколькими отношениями), L — его логика.
Пусть L — допускает фильтрацию.
Тогда если

- ко всем шкалам добавить отношение $R_a \cup R_b$ или
- ко всем шкалам добавить отношение $R_a \circ R_b$ или
- ко всем шкалам добавить отношение $(R_a)^+$ или
- во всех шкалах удалить отношение с индексом $a \in \Sigma$,

то логика получившегося класса шкал — тоже допускает фильтрацию.

Поскольку логика $\mathbf{K}_\Sigma$ класса всех шкал допускает фильтрацию, то

Операции на шкалах, сохраняющие фильтруемость

Теорема (Шапировский, Золин, 2014)

Пусть $\mathbb{F}$ — класс шкал (с несколькими отношениями), L — его логика.
Пусть L — допускает фильтрацию.
Тогда если

- ко всем шкалам добавить отношение $R_a \cup R_b$ или
- ко всем шкалам добавить отношение $R_a \circ R_b$ или
- ко всем шкалам добавить отношение $(R_a)^+$ или
- во всех шкалах удалить отношение с индексом $a \in \Sigma$,

то логика получившегося класса шкал — тоже допускает фильтрацию.

Поскольку логика $\mathbf{K}_\Sigma$ класса всех шкал допускает фильтрацию, то

Следствие

Всякая регулярная модальная логика — допускает фильтрацию.
А значит, полна относительно конечных шкал и разрешима.

Факты и открытые вопросы

1. Логика $\mathsf{K}\Pi = \mathsf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to rs\}$ является $\textsc{PSpace}$-полной.

Факты и открытые вопросы

1. Логика $\mathbf{K\Pi} = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to rs\}$ является $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-полной.
2. Логика $\mathbf{K\Pi} = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_s \Box_r p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to sr\}$ является $\mathrm{E{\scriptsize XP}T{\scriptsize IME}}$-полной.

Факты и открытые вопросы

1. Логика $\mathbf{K\Pi} = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to rs\}$ является $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-полной.
2. Логика $\mathbf{K\Pi} = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_s \Box_r p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to sr\}$ является $\mathrm{E{\scriptsize XP}T{\scriptsize IME}}$-полной.
3. S. Demri классифицировал все рег. логики $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ / $\mathrm{E{\scriptsize XP}T{\scriptsize IME}}$.

Факты и открытые вопросы

1. Логика $\mathsf{K}\Pi = \mathsf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to rs\}$ является PSPACE-полной.
2. Логика $\mathsf{K}\Pi = \mathsf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_s \Box_r p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to sr\}$ является $\mathrm{EXPTIME}$-полной.
3. S. Demri классифицировал все рег. логики PSPACE / $\mathrm{EXPTIME}$.
4. Все результаты обобщаются на модальные логики с обратными модальностями; их грамматики содержат символы $\bar{a}$, где $a \in \Sigma$.

Факты и открытые вопросы

1. Логика $\mathbf{K\Pi} = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to rs\}$ является PSPACE-полной.
2. Логика $\mathbf{K\Pi} = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_s \Box_r p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to sr\}$ является $\mathrm{EXPTIME}$-полной.
3. S. Demri классифицировал все рег. логики PSPACE / $\mathrm{EXPTIME}$.
4. Все результаты обобщаются на модальные логики с обратными модальностями; их грамматики содержат символы $\overline{a}$, где $a \in \Sigma$. Логики **KB** ($\Box_a p \to \Box_{\overline{a}} p$), **K5** ($\Box_a p \to \Box_{\overline{a}} \Box_a p$), **KD45**, **S5** и другие покрываются этим обобщением.

Факты и открытые вопросы

1. Логика $\mathbf{K}\Pi = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to rs\}$ является $\mathrm{PS}\textsc{pace}$-полной.
2. Логика $\mathbf{K}\Pi = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_s \Box_r p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to sr\}$ является $\mathrm{E}\textsc{xp}\mathrm{T}\textsc{ime}$-полной.
3. S. Demri классифицировал все рег. логики $\mathrm{PS}\textsc{pace}$ / $\mathrm{E}\textsc{xp}\mathrm{T}\textsc{ime}$.
4. Все результаты обобщаются на модальные логики с обратными модальностями; их грамматики содержат символы $\bar{a}$, где $a \in \Sigma$. Логики **KB** $(\Box_a p \to \Box_{\bar{a}} p)$, **K5** $(\Box_a p \to \Box_{\bar{a}} \Box_a p)$, **KD45**, **S5** и другие покрываются этим обобщением.
5. Открытый вопрос — для любой КС-грамматики Π эквив. условия:
   1. грамматика Π — регулярна,
   2. логика $\mathbf{K}\Pi$ разрешима,
   3. логика $\mathbf{K}\Pi$ обладает FMP (ПОКШ),
   4. логика $\mathbf{K}\Pi$ допускает фильтрацию.

Факты и открытые вопросы

1. Логика $\mathbf{K\Pi} = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_r \Box_s p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to rs\}$ является $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$-полной.
2. Логика $\mathbf{K\Pi} = \mathbf{K}_2 \oplus (\Box_s p \to \Box_s \Box_r p)$ с регулярной грамматикой $\Pi = \{s \to sr\}$ является $\mathrm{E{\scriptsize XP}T{\scriptsize IME}}$-полной.
3. S. Demri классифицировал все рег. логики $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$ / $\mathrm{E{\scriptsize XP}T{\scriptsize IME}}$.
4. Все результаты обобщаются на модальные логики с обратными модальностями; их грамматики содержат символы $\bar{a}$, где $a \in \Sigma$. Логики $\mathbf{KB}$ $(\Box_a p \to \Box_{\bar{a}} p)$, $\mathbf{K5}$ $(\Box_a p \to \Box_{\bar{a}} \Box_a p)$, $\mathbf{KD45}$, $\mathbf{S5}$ и другие покрываются этим обобщением.
5. Открытый вопрос — для любой КС-грамматики Π эквив. условия:
   1. грамматика Π — регулярна,
   2. логика $\mathbf{K\Pi}$ разрешима,
   3. логика $\mathbf{K\Pi}$ обладает FMP (ПОКШ),
   4. логика $\mathbf{K\Pi}$ допускает фильтрацию.

Конец лекции 11. Спасибо за внимание!