Модальная логика. Лекция 10: Фильтрация моделей Крипке. Полнота относительно конечных шкал и моделей. Модальные логики, допускающие фильтрацию. Фильтрация модальных логик и замыкания.

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

27 ноября 2020 года

Отношение эквивалентности и разбиение

Пусть $\sim\ \subseteq\ (W \times W)$ — отношение эквивалентности на W, то есть:

$$
\begin{array}{rl}
x \sim x & \quad (\textit{рефлексивность}) \\
x \sim y \ \Rightarrow\ y \sim x & \quad (\textit{симметричность}) \\
x \sim y \ \&\ y \sim z \ \Rightarrow\ x \sim z & \quad (\textit{транзитивность})
\end{array}
$$

Отношение эквивалентности и разбиение

Пусть $\sim\ \subseteq\ (W \times W)$ — отношение эквивалентности на W, то есть:

$$\begin{array}{rl} x \sim x & \quad (\textit{рефлексивность}) \\ x \sim y \ \Rightarrow\ y \sim x & \quad (\textit{симметричность}) \\ x \sim y \ \&\ y \sim z \ \Rightarrow\ x \sim z & \quad (\textit{транзитивность}) \end{array}$$

- Класс $\sim$-эквивалентности эл. $x \in W$: $[x]_\sim = \{y \in W \mid x \sim y\}$

Отношение эквивалентности и разбиение

Пусть $\sim\ \subseteq\ (W \times W)$ — отношение эквивалентности на W, то есть:

$$\begin{aligned} x \sim x & \qquad (\textit{рефлексивность}) \\ x \sim y \ \Rightarrow\ y \sim x & \qquad (\textit{симметричность}) \\ x \sim y \ \ \& \ \ y \sim z \ \Rightarrow\ x \sim z & \qquad (\textit{транзитивность}) \end{aligned}$$

- Класс $\sim$-эквивалентности эл. $x \in W$: $[x]_\sim = \{y \in W \mid x \sim y\} = \widehat{x}$.

Отношение эквивалентности и разбиение

Пусть $\sim\ \subseteq\ (W \times W)$ — отношение эквивалентности на W, то есть:

$$
\begin{aligned}
x &\sim x && \text{(рефлексивность)}\\
x \sim y \ \Rightarrow\ y &\sim x && \text{(симметричность)}\\
x \sim y \ \&\ y \sim z \ \Rightarrow\ x &\sim z && \text{(транзитивность)}
\end{aligned}
$$

- Класс $\sim$-эквивалентности эл. $x \in W$: $[x]_\sim = \{y \in W \mid x \sim y\} = \widehat{x}$.
- Получилось разбиение множества W, то есть представление W в виде объединения непересекающихся множеств.

Отношение эквивалентности и разбиение

Пусть $\sim\ \subseteq\ (W \times W)$ — отношение эквивалентности на W, то есть:

$$\begin{array}{rl} x \sim x & (\textit{рефлексивность}) \\ x \sim y \ \Rightarrow\ y \sim x & (\textit{симметричность}) \\ x \sim y \ \&\ y \sim z \ \Rightarrow\ x \sim z & (\textit{транзитивность}) \end{array}$$

- Класс $\sim$-эквивалентности эл. $x \in W$: $[x]_\sim = \{y \in W \mid x \sim y\} = \widehat{x}$.
- Получилось разбиение множества W, то есть представление W в виде объединения непересекающихся множеств.
- Фактор-множество W по $\sim$ есть $W/{\sim} = \{\, [x]_\sim \mid x \in W\}$.

Отношение эквивалентности и разбиение

Пусть $\sim\ \subseteq\ (W \times W)$ — отношение эквивалентности на W, то есть:

$$
\begin{array}{rcl}
 & x \sim x & \quad (\textit{рефлексивность}) \\
x \sim y & \Rightarrow \; y \sim x & \quad (\textit{симметричность}) \\
x \sim y \;\;\&\;\; y \sim z & \Rightarrow \; x \sim z & \quad (\textit{транзитивность})
\end{array}
$$

- Класс $\sim$-эквивалентности эл. $x \in W$: $[x]_\sim = \{y \in W \mid x \sim y\} = \widehat{x}$.
- Получилось разбиение множества W, то есть представление W в виде объединения непересекающихся множеств.
- Фактор-множество W по $\sim$ есть $W/{\sim} = \{\, [x]_\sim \mid x \in W\}$.
- Обратно: всякое разбиение $W = \bigsqcup\limits_{i \in I} W_i$ задает отн. эквив-ти:

$$x \sim y \quad \leftrightharpoons \quad \exists i \in I \colon (\, x, y \in W_i \,)$$

Отношение эквивалентности и разбиение

Пусть $\sim\ \subseteq\ (W \times W)$ — отношение эквивалентности на W, то есть:

$$\begin{array}{rcll} & & x \sim x & \textit{(рефлексивность)} \\ x \sim y & \Rightarrow & y \sim x & \textit{(симметричность)} \\ x \sim y \;\&\; y \sim z & \Rightarrow & x \sim z & \textit{(транзитивность)} \end{array}$$

- Класс $\sim$-эквивалентности эл. $x \in W$: $[x]_\sim = \{y \in W \mid x \sim y\} = \widehat{x}$.
- Получилось разбиение множества W, то есть представление W в виде объединения непересекающихся множеств.
- Фактор-множество W по $\sim$ есть $W/\!\sim\ = \{\ [x]_\sim\ \mid x \in W\}$.
- Обратно: всякое разбиение $W = \bigsqcup\limits_{i \in I} W_i$ задает отн. эквив-ти:

$$x \sim y \quad \leftrightharpoons \quad \exists i \in I\colon (\, x, y \in W_i\,)$$

Определение

Говорят, что отношение эквив. $\sim$ конечного индекса, если классов эквив-ти — конечное число

Отношение эквивалентности и разбиение

Пусть $\sim\ \subseteq\ (W \times W)$ — отношение эквивалентности на W, то есть:

$$
\begin{array}{rcll}
 & & x \sim x & \text{(рефлексивность)} \\
x \sim y & \Rightarrow & y \sim x & \text{(симметричность)} \\
x \sim y \ \& \ y \sim z & \Rightarrow & x \sim z & \text{(транзитивность)}
\end{array}
$$

- Класс $\sim$-эквивалентности эл. $x \in W$: $[x]_\sim = \{y \in W \mid x \sim y\} = \widehat{x}$.
- Получилось разбиение множества W, то есть представление W в виде объединения непересекающихся множеств.
- Фактор-множество W по $\sim$ есть $W/{\sim} = \{\ [x]_\sim \ \mid x \in W\}$.
- Обратно: всякое разбиение $W = \bigsqcup\limits_{i \in I} W_i$ задает отн. эквив-ти:

$$x \sim y \quad \leftrightharpoons \quad \exists i \in I\colon (\, x, y \in W_i\,)$$

Определение

Говорят, что отношение эквив. $\sim$ конечного индекса, если классов эквив-ти — конечное число, то есть фактор-множество $W/{\sim}$ конечно.

Фильтрация модели Крипке через Φ

Дана модель Крипке $M = (W, R, V)$ и множество формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$.

Фильтрация модели Крипке через Φ

Дана модель Крипке $M = (W, R, V)$ и множество формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$.
Введем на W отношение «эквивалентности по модулю Φ»: $\forall x, y \in W$

$x \equiv_\Phi y$

Фильтрация модели Крипке через Φ

Дана модель Крипке $M = (W, R, V)$ и множество формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$.
Введем на W отношение «эквивалентности по модулю Φ»: $\forall x, y \in W$

$$x \equiv_\Phi y \quad \leftrightharpoons \quad \text{для всех формул } A \in \Phi \ \ (\ M, x \models A \ \Leftrightarrow \ M, y \models A \ ).$$

Фильтрация модели Крипке через Φ

Дана модель Крипке $M = (W, R, V)$ и множество формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$.
Введем на W отношение «эквивалентности по модулю Φ»: $\forall x, y \in W$

$$x \equiv_\Phi y \quad \leftrightharpoons \quad \text{для всех формул } A \in \Phi \ \ (\ M, x \models A \ \Leftrightarrow \ M, y \models A \ ).$$

Если Φ — конечное множество формул, то $\equiv_\Phi$ — конечного индекса.

Фильтрация модели Крипке через Φ

Дана модель Крипке $M = (W, R, V)$ и множество формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$.
Введем на W отношение «эквивалентности по модулю Φ»: $\forall x, y \in W$

$$x \equiv_\Phi y \quad \leftrightharpoons \quad \text{для всех формул } A \in \Phi \ \ (\ M, x \models A \ \Leftrightarrow \ M, y \models A\ ).$$

Если Φ — конечное множество формул, то $\equiv_\Phi$ — конечного индекса.
Класс эквивалентности $[x]_{\equiv_\Phi}$ обозначаем $\widehat{x}$ (когда Φ известно).

Фильтрация модели Крипке через Φ

Дана модель Крипке $M = (W, R, V)$ и множество формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$.
Введем на W отношение «эквивалентности по модулю Φ»: $\forall x, y \in W$

$$x \equiv_\Phi y \quad \leftrightharpoons \quad \text{для всех формул } A \in \Phi \ \ (\ M, x \models A \ \Leftrightarrow \ M, y \models A\ ).$$

Если Φ — конечное множество формул, то $\equiv_\Phi$ — конечного индекса.
Класс эквивалентности $[x]_{\equiv_\Phi}$ обозначаем $\widehat{x}$ (когда Φ известно).

Будет удобно считать: Φ замкнуто относительно подформул:

если $A \in \Phi$ и B — подформула формулы A, то $B \in \Phi$.

Фильтрация модели Крипке через Φ

Дана модель Крипке $M = (W, R, V)$ и множество формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$.
Введем на W отношение «эквивалентности по модулю Φ»: $\forall x, y \in W$

$$x \equiv_\Phi y \quad \leftrightharpoons \quad \text{для всех формул } A \in \Phi \;\; (\; M, x \models A \;\Leftrightarrow\; M, y \models A \;).$$

Если Φ — конечное множество формул, то $\equiv_\Phi$ — конечного индекса.
Класс эквивалентности $[x]_{\equiv_\Phi}$ обозначаем $\widehat{x}$ (когда Φ известно).

Будет удобно считать: Φ замкнуто относительно подформул:

если $A \in \Phi$ и B — подформула формулы A, то $B \in \Phi$.

Кратко: $\quad \mathrm{Sub}(\Phi) \subseteq \Phi$.

Фильтрация модели Крипке через Φ

Дана модель Крипке $M = (W, R, V)$ и множество формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$.
Введем на W отношение «эквивалентности по модулю Φ»: $\forall x, y \in W$

$$x \equiv_\Phi y \quad \leftrightharpoons \quad \text{для всех формул } A \in \Phi \ \ (\ M, x \models A \ \Leftrightarrow \ M, y \models A \ ).$$

Если Φ — конечное множество формул, то $\equiv_\Phi$ — конечного индекса.
Класс эквивалентности $[x]_{\equiv_\Phi}$ обозначаем $\widehat{x}$ (когда Φ известно).

Будет удобно считать: Φ замкнуто относительно подформул:

$$\text{если } A \in \Phi \text{ и } B \text{ — подформула формулы } A, \text{ то } B \in \Phi.$$

$$\text{Кратко:} \quad \mathrm{Sub}(\Phi) \subseteq \Phi.$$

Фильтрацией (результатом фильтрации) модели M через Φ называют
– фактор-множество $W/{\equiv_\Phi}$
– с некоторым специально подобранным отношением $\widehat{R}$ на нём,
– а оценка переменных задана «канонически» (на переменных из Φ).

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ **через** множество формул Φ назыв. **всякая** модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ **через** множество формул Φ назыв. **всякая** модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:

   $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \ \leftrightharpoons \ M, x \models p$.

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:

   $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$ То есть $\widehat{V}(p) = \{\,\widehat{x} \mid M, x \models p\,\}$.

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/\equiv_\Phi$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:

   $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \iff M, x \models p.$

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p$.
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\, R\, y \implies \widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y}$

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x \, R \, y \implies \widehat{x} \, \widehat{R} \, \widehat{y}$
   (b) $\widehat{x} \, \widehat{R} \, \widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $\left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \right)$

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ **через** множество формул Φ назыв. **всякая** модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/\equiv_\Phi$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(\,M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,)$

- Условие (3b) — корректно (не зависит от выбора $x \in \widehat{x}$ и $y \in \widehat{y}$).

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ **через** множество формул Φ назыв. **всякая** модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(\,M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,)$

- Введем **минимальное** и **максимальное** отношения на $\widehat{W}$:

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ называв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p$.
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(\,M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,)$

- Введем минимальное и максимальное отношения на $\widehat{W}$:
  $\widehat{x}\,R^{\min}_{\Phi}\,\widehat{y} \;\Leftrightarrow\; \exists x' \equiv_\Phi x$ и $\exists y' \equiv_\Phi y$, такие что $x'\,R\,y'$,

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x \, R \, y \implies \widehat{x} \, \widehat{R} \, \widehat{y}$
   (b) $\widehat{x} \, \widehat{R} \, \widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B)$

- Введем минимальное и максимальное отношения на $\widehat{W}$:
  $\widehat{x} \, R_\Phi^{\min} \, \widehat{y} \;\Leftrightarrow\; \exists x' \equiv_\Phi x$ и $\exists y' \equiv_\Phi y$, такие что $x' \, R \, y'$,
  $\widehat{x} \, R_\Phi^{\max} \, \widehat{y} \;\Leftrightarrow\;$ для всех $\Box B \in \Phi$ $(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B)$.

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\, R\, y \implies \widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(\, M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,)$

- Введем минимальное и максимальное отношения на $\widehat{W}$:
  $$\widehat{x}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \exists x' \equiv_\Phi x \text{ и } \exists y' \equiv_\Phi y, \text{ такие что } x'\, R\, y',$$
  $$\widehat{x}\, R_\Phi^{\max}\, \widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \text{для всех } \Box B \in \Phi \;\; (\, M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,).$$

  Тогда условия (3a) и (3b) перепишутся так: $\boxed{R_\Phi^{\min} \;\subseteq\; \widehat{R} \;\subseteq\; R_\Phi^{\max}}$

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\, R\, y \implies \widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(\, M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,)$

- Введем минимальное и максимальное отношения на $\widehat{W}$:
  $$\widehat{x}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \exists x' \equiv_\Phi x \text{ и } \exists y' \equiv_\Phi y, \text{ такие что } x'\, R\, y',$$
  $$\widehat{x}\, R_\Phi^{\max}\, \widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \text{для всех } \Box B \in \Phi \;\; (\, M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,).$$
  Тогда условия (3a) и (3b) перепишутся так: $\boxed{R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}}$
- Всегда $\exists\, \widehat{R}$, удовл. (3a) и (3b), поскольку верно: $R_\Phi^{\min} \subseteq R_\Phi^{\max}$.

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(\,M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,)$

- Введем минимальное и максимальное отношения на $\widehat{W}$:
  $$\widehat{x}\,R_\Phi^{\min}\,\widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \exists x' \equiv_\Phi x \;\text{ и }\; \exists y' \equiv_\Phi y, \text{ такие что } x'\,R\,y',$$
  $$\widehat{x}\,R_\Phi^{\max}\,\widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \text{для всех } \Box B \in \Phi \;\; (\,M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,).$$
  Тогда условия (3a) и (3b) перепишутся так: $\boxed{R_\Phi^{\min} \;\subseteq\; \widehat{R} \;\subseteq\; R_\Phi^{\max}}$
- Всегда $\exists\,\widehat{R}$, удовл. (3a) и (3b), поскольку верно: $R_\Phi^{\min} \;\subseteq\; R_\Phi^{\max}$.
  Имеем: $x \models \Box B$

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(\,M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,)$

- Введем минимальное и максимальное отношения на $\widehat{W}$:
  $$\widehat{x}\,R_\Phi^{\min}\,\widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \exists x' \equiv_\Phi x \;\text{ и }\; \exists y' \equiv_\Phi y, \text{ такие что } x'\,R\,y',$$
  $$\widehat{x}\,R_\Phi^{\max}\,\widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \text{для всех } \Box B \in \Phi \;\; (\,M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,).$$

  Тогда условия (3a) и (3b) перепишутся так: $\boxed{R_\Phi^{\min} \;\subseteq\; \widehat{R} \;\subseteq\; R_\Phi^{\max}}$
- Всегда $\exists\,\widehat{R}$, удовл. (3a) и (3b), поскольку верно: $R_\Phi^{\min} \;\subseteq\; R_\Phi^{\max}$.
  Имеем: $\quad x \models \Box B \implies x' \models \Box B$

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/\equiv_\Phi$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
   $$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \iff M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\, R\, y \implies \widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(\, M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,)$

- Введем минимальное и максимальное отношения на $\widehat{W}$:
  $$\widehat{x}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{y} \iff \exists x' \equiv_\Phi x \text{ и } \exists y' \equiv_\Phi y, \text{ такие что } x'\, R\, y',$$
  $$\widehat{x}\, R_\Phi^{\max}\, \widehat{y} \iff \text{для всех } \Box B \in \Phi \;(\, M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B\,).$$
  Тогда условия (3a) и (3b) перепишутся так: $\boxed{R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}}$
- Всегда $\exists\, \widehat{R}$, удовл. (3a) и (3b), поскольку верно: $R_\Phi^{\min} \subseteq R_\Phi^{\max}$.
  Имеем: $x \models \Box B \implies x' \models \Box B \implies y' \models B$

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ через множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
$$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \ \leftrightharpoons\ M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(M, x \models \Box B \ \Rightarrow\ M, y \models B)$

- Введем минимальное и максимальное отношения на $\widehat{W}$:
$$\widehat{x}\,R_\Phi^{\min}\,\widehat{y} \iff \exists x' \equiv_\Phi x \text{ и } \exists y' \equiv_\Phi y, \text{ такие что } x'\,R\,y',$$
$$\widehat{x}\,R_\Phi^{\max}\,\widehat{y} \iff \text{для всех } \Box B \in \Phi\ (M, x \models \Box B \ \Rightarrow\ M, y \models B).$$
  Тогда условия (3a) и (3b) перепишутся так: $\boxed{R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}}$
- Всегда $\exists\,\widehat{R}$, удовл. (3a) и (3b), поскольку верно: $R_\Phi^{\min} \subseteq R_\Phi^{\max}$.
  Имеем: $x \models \Box B \implies x' \models \Box B \implies y' \models B \implies y \models B$.

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \quad \iff \quad M, x \models A.$$

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A**).**

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ. *Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении.

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\perp$ и $\to$ тривиально.

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ. *Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\perp$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ — фильтрация модели M через Φ. Тогда $\forall x \in W$ и $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\perp$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \stackrel{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$.

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\perp$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \stackrel{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\bot$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x\, R\, y$.

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\bot$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x\,R\,y$. $\overset{(3a)}{\Longrightarrow}$ $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ — *фильтрация модели* M *через* Φ. *Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\bot$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \stackrel{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x\,R\,y$. $\stackrel{(3a)}{\Longrightarrow}$ $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \Longrightarrow \widehat{y} \models B$

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ — фильтрация модели M через Φ. Тогда $\forall x \in W$ и $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\bot$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x\,R\,y$. $\overset{(3a)}{\Longrightarrow}$ $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \Longrightarrow \widehat{y} \models B \Longrightarrow y \models B$.

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\bot$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x\,R\,y$. $\overset{(3a)}{\Longrightarrow}$ $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \Longrightarrow \widehat{y} \models B \Longrightarrow y \models B$.

$(\Longleftarrow)$ Пусть $x \models \Box B$.

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\bot$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \stackrel{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x\, R\, y$. $\stackrel{(3a)}{\Longrightarrow}$ $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y} \Longrightarrow \widehat{y} \models B \Longrightarrow y \models B$.

$(\Longleftarrow)$ Пусть $x \models \Box B$. Почему $\widehat{x} \models \Box B$?

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\bot$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x\, R\, y$. $\overset{(3a)}{\Longrightarrow}$ $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y} \Longrightarrow \widehat{y} \models B \Longrightarrow y \models B$.

$(\Longleftarrow)$ Пусть $x \models \Box B$. Почему $\widehat{x} \models \Box B$?

Берем любой $\widehat{y}$: $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y}$.

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ. *Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\perp$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \stackrel{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

($\Longrightarrow$) Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x \, R \, y$. $\stackrel{(3a)}{\Longrightarrow}$ $\widehat{x} \, \widehat{R} \, \widehat{y} \Longrightarrow \widehat{y} \models B \Longrightarrow y \models B$.

($\Longleftarrow$) Пусть $x \models \Box B$. Почему $\widehat{x} \models \Box B$?

Берем любой $\widehat{y}$: $\widehat{x} \, \widehat{R} \, \widehat{y}$. $\stackrel{(3b)}{\Longrightarrow}$ $y \models B$ (так как $\Box B \in \Phi$)

Сохранение модальных формул при фильтрации

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ*. Тогда* $\forall x \in W$ *и* $\forall A \in \Phi$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Доказательство (индукцией по построению формулы A).

Для $A = p$ в определении. Для $\bot$ и $\to$ тривиально. Осталось $A = \Box B$:

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \qquad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \qquad M, x \models \Box B.$$

$(\Longrightarrow)$ Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Почему $x \models \Box B$?

Берем любой $y \in W$: $x\, R\, y$. $\overset{(3a)}{\Longrightarrow}$ $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y} \Longrightarrow \widehat{y} \models B \Longrightarrow y \models B$.

$(\Longleftarrow)$ Пусть $x \models \Box B$. Почему $\widehat{x} \models \Box B$?

Берем любой $\widehat{y}$: $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y}$. $\overset{(3b)}{\Longrightarrow}$ $y \models B$ (так как $\Box B \in \Phi$) $\Longrightarrow \widehat{y} \models B$. $\Box$

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_{\Phi} y$.

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_{\Phi} y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$.

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_{\Phi} y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$. Тогда точки $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — тоже. $\square$

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_\Phi y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$. Тогда точки $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — тоже. $\square$

Что если фильтровать модель M через все формулы $\Phi = \mathrm{Fm}$?

$$x \equiv_{\mathrm{ML}} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всякой } A \in \mathrm{Fm} \; (M, x \models A \;\Leftrightarrow\; M, y \models A).$$

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_{\Phi} y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$. Тогда точки $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — тоже. $\square$

Что если фильтровать модель M через все формулы $\Phi = \mathrm{Fm}$?

$$x \equiv_{\mathrm{ML}} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всякой } A \in \mathrm{Fm} \; (M, x \models A \;\Leftrightarrow\; M, y \models A).$$

То есть склеить модально эквивалентные точки модели M.

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_\Phi y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$. Тогда точки $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — тоже. $\square$

Что если фильтровать модель M через все формулы $\Phi = \mathrm{Fm}$?

$$x \equiv_{\mathrm{ML}} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всякой } A \in \mathrm{Fm}\ (M, x \models A \ \Leftrightarrow\ M, y \models A).$$

То есть склеить модально эквивалентные точки модели M.

По лемме о фильтрации $\widehat{M}, \widehat{x} \models A \Leftrightarrow M, x \models A$, для всех формул A.

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_{\Phi} y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$. Тогда точки $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — тоже. $\square$

Что если фильтровать модель M через все формулы $\Phi = \mathrm{Fm}$?

$$x \equiv_{\mathrm{ML}} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всякой } A \in \mathrm{Fm}\ (M, x \models A \ \Leftrightarrow\ M, y \models A).$$

То есть склеить модально эквивалентные точки модели M.

По лемме о фильтрации $\widehat{M}, \widehat{x} \models A \Leftrightarrow M, x \models A$, для всех формул A.
Значит, $\widehat{M} \equiv_{\mathrm{ML}} M$.

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_\Phi y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$. Тогда точки $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — тоже. $\square$

Что если фильтровать модель M через все формулы $\Phi = \mathrm{Fm}$?

$$x \equiv_{\mathrm{ML}} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всякой } A \in \mathrm{Fm}\ (M, x \models A \ \Leftrightarrow\ M, y \models A).$$

То есть склеить модально эквивалентные точки модели M.

По лемме о фильтрации $\widehat{M}, \widehat{x} \models A \Leftrightarrow M, x \models A$, для всех формул A.
Значит, $\widehat{M} \equiv_{\mathrm{ML}} M$. Это значит: $\widehat{M} \models A \Leftrightarrow M \models A$, для всех формул A.

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_\Phi y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$. Тогда точки $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — тоже. □

Что если фильтровать модель M через все формулы $\Phi = \mathrm{Fm}$?

$$x \equiv_{\mathrm{ML}} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всякой } A \in \mathrm{Fm} \ (M, x \models A \ \Leftrightarrow \ M, y \models A).$$

То есть склеить модально эквивалентные точки модели M.

По лемме о фильтрации $\widehat{M}, \widehat{x} \models A \Leftrightarrow M, x \models A$, для всех формул A. Значит, $\widehat{M} \equiv_{\mathrm{ML}} M$. Это значит: $\widehat{M} \models A \Leftrightarrow M \models A$, для всех формул A.

Лемма. *Всякая модель модально эквивалентна некоторой модально различимой модели.*

Склеивание модально эквивалентных точек

Лемма

Фильтрация модели M через Φ — модально различимая модель $\widehat{M}$.

Доказательство.

Если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то $x \not\equiv_\Phi y$. Значит, точки x и y различаются некоторой модальной формулой $A \in \Phi$. Тогда точки $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — тоже. □

Что если фильтровать модель M через все формулы $\Phi = \mathrm{Fm}$?

$$x \equiv_{\mathrm{ML}} y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всякой } A \in \mathrm{Fm}\ (\, M, x \models A \ \Leftrightarrow\ M, y \models A).$$

То есть склеить модально эквивалентные точки модели M.

По лемме о фильтрации $\widehat{M}, \widehat{x} \models A \Leftrightarrow M, x \models A$, для всех формул A.
Значит, $\widehat{M} \equiv_{\mathrm{ML}} M$. Это значит: $\widehat{M} \models A \Leftrightarrow M \models A$, для всех формул A.

Лемма. *Всякая конечная модель модально эквивалентна некоторой конечной модально различимой модели.*

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Rightarrow$ ПОКМ).

Тривиально. Пусть $A \notin L$.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Rightarrow$ ПОКМ).

Тривиально. Пусть $A \notin L$.
По (ПОКШ): $\exists$ конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Rightarrow$ ПОКМ).

Тривиально. Пусть $A \notin L$.
По (ПОКШ): $\exists$ конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.
Значит, $\exists$ модель $M = (F, V)$, такая что $M \not\models A$.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Rightarrow$ ПОКМ).

Тривиально. Пусть $A \notin L$.
По (ПОКШ): $\exists$ конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.
Значит, $\exists$ модель $M = (F, V)$, такая что $M \not\models A$. При этом $M \models L$. $\square$

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Leftarrow$ ПОКМ).

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Leftarrow$ ПОКМ).

Пусть $A \notin L$.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Leftarrow$ ПОКМ).

Пусть $A \notin L$. По (ПОКМ): $\exists$ конечная модель M: $M \models L$ и $M \not\models A$.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Leftarrow$ ПОКМ).

Пусть $A \notin L$. По (ПОКМ): $\exists$ конечная модель M: $M \models L$ и $M \not\models A$.
Известно: $M \equiv_{\mathrm{ML}} \widehat{M}$, и модель $\widehat{M}$ конечна и модально различима.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Leftarrow$ ПОКМ).

Пусть $A \notin L$. По (ПОКМ): $\exists$ конечная модель M: $M \models L$ и $M \not\models A$.
Известно: $M \equiv_{\mathrm{ML}} \widehat{M}$, и модель $\widehat{M}$ конечна и модально различима.
Факт. *Если $N = (G, V)$ кон. мод. различимая и $N \models L$, то $G \models L$.*

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Leftarrow$ ПОКМ).

Пусть $A \notin L$. По (ПОКМ): $\exists$ конечная модель M: $M \models L$ и $M \not\models A$.
Известно: $M \equiv_{\mathrm{ML}} \widehat{M}$, и модель $\widehat{M}$ конечна и модально различима.
Факт. *Если $N = (G, V)$ кон. мод. различимая и $N \models L$, то $G \models L$.*
Имеем: $\widehat{M} \models L$ и $\widehat{M} \not\models A$.

ПОКШ = ПОКМ. Иначе говоря, FFP = FMP.

Определение (Полнота относительно конечных шкал, FFP)

Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Определение (Полнота относительно конечных моделей, FMP)

Логика L — ПОКМ, если для всякой формулы $A \notin L$ существует конечная модель M, такая что $M \models L$ и $M \not\models A$.

Теорема

Понятия ПОКШ и ПОКМ совпадают.

Доказательство (ПОКШ $\Leftarrow$ ПОКМ).

Пусть $A \notin L$. По (ПОКМ): $\exists$ конечная модель M: $M \models L$ и $M \not\models A$.
Известно: $M \equiv_{\mathrm{ML}} \widehat{M}$, и модель $\widehat{M}$ конечна и модально различима.
Факт. *Если $N = (G, V)$ кон. мод. различимая и $N \models L$, то $G \models L$.*
Имеем: $\widehat{M} \models L$ и $\widehat{M} \not\models A$. Тогда $\widehat{F} \models L$ и $\widehat{F} \not\models A$. □

Док-во разрешимости логик через фильтрацию

Док-во разрешимости логик через фильтрацию

Определение (Логики, допускающие фильтрацию)

Говорим, что логика L **допускает фильтрацию** (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

Док-во разрешимости логик через фильтрацию

Определение (Логики, допускающие фильтрацию)

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \quad \xrightarrow{\text{фильтрация}} \quad \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ.

Док-во разрешимости логик через фильтрацию

Определение (Логики, допускающие фильтрацию)

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ.

Теорема

L — полна

Док-во разрешимости логик через фильтрацию

Определение (Логики, допускающие фильтрацию)

Говорим, что логика L **допускает фильтрацию** (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ.

Теорема

L — полна
L — доп. фильтрацию

Док-во разрешимости логик через фильтрацию

Определение (Логики, допускающие фильтрацию)

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ.

Теорема

$$\left.\begin{array}{l} L \text{ — полна} \\ L \text{ — доп. фильтрацию} \end{array}\right\} \implies L \text{ — ПОКШ}$$

Док-во разрешимости логик через фильтрацию

Определение (Логики, допускающие фильтрацию)

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ.

Теорема

$$\left.\begin{array}{l} L \text{ — полна} \\ L \text{ — доп. фильтрацию} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} L \text{ — ПОКШ} \\ L \text{ — кон. акс.} \end{array}$$

Док-во разрешимости логик через фильтрацию

Определение (Логики, допускающие фильтрацию)

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ.

Теорема

$$\left.\begin{array}{l} L \text{ — полна} \\ L \text{ — доп. фильтрацию} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} L \text{ — ПОКШ} \\ L \text{ — кон. акс.} \end{array}\right\} \Longrightarrow L \text{ — разрешима}$$

Допускающие фильтрацию логики разрешимы

Теорема

L — полна по Крипке и допускает фильтрацию $\implies$ L — ПОКШ.

Допускающие фильтрацию логики разрешимы

Теорема

L — полна по Крипке и допускает фильтрацию $\implies$ L — ПОКШ.

Доказательство.

Пусть $A \notin L$. Как опровергнуть A на конечной L-шкале?

Допускающие фильтрацию логики разрешимы

Теорема

L — полна по Крипке и допускает фильтрацию $\implies$ L — ПОКШ.

Доказательство.

Пусть $A \notin L$. Как опровергнуть A на конечной L-шкале?
Ввиду полноты, $\exists$ шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Допускающие фильтрацию логики разрешимы

Теорема

L — полна по Крипке и допускает фильтрацию $\implies$ L — ПОКШ.

Доказательство.

Пусть $A \notin L$. Как опровергнуть A на конечной L-шкале?
Ввиду полноты, $\exists$ шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.
Последнее означает, что $\exists$ модель $M = (F, V)$, такая что $M \not\models A$.

Допускающие фильтрацию логики разрешимы

Теорема

L — полна по Крипке и допускает фильтрацию $\implies$ L — ПОКШ.

Доказательство.

Пусть $A \notin L$. Как опровергнуть A на конечной L-шкале?
Ввиду полноты, $\exists$ шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.
Последнее означает, что $\exists$ модель $M = (F, V)$, такая что $M \not\models A$.
Возьмем $\Phi = \mathrm{Sub}(A)$ — конечное Sub-замкнутое множество формул.

Допускающие фильтрацию логики разрешимы

Теорема

L — полна по Крипке и допускает фильтрацию $\implies$ L — ПОКШ.

Доказательство.

Пусть $A \notin L$. Как опровергнуть A на конечной L-шкале?
Ввиду полноты, $\exists$ шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.
Последнее означает, что $\exists$ модель $M = (F, V)$, такая что $M \not\models A$.
Возьмем $\Phi = \mathrm{Sub}(A)$ — конечное Sub-замкнутое множество формул.
Так как L — ДФ, то $\exists$ $\widehat{M}$ — фильтрация M через Φ, такая что $\widehat{F} \models L$.

Допускающие фильтрацию логики разрешимы

Теорема

L — полна по Крипке и допускает фильтрацию $\implies$ L — ПОКШ.

Доказательство.

Пусть $A \notin L$. Как опровергнуть A на конечной L-шкале?
Ввиду полноты, $\exists$ шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.
Последнее означает, что $\exists$ модель $M = (F, V)$, такая что $M \not\models A$.
Возьмем $\Phi = \mathrm{Sub}(A)$ — конечное Sub-замкнутое множество формул.
Так как L — ДФ, то $\exists$ $\widehat{M}$ — фильтрация M через Φ, такая что $\widehat{F} \models L$.
По лемме о фильтрации $\widehat{M} \not\models A$.

Допускающие фильтрацию логики разрешимы

Теорема

L — полна по Крипке и допускает фильтрацию $\implies$ L — ПОКШ.

Доказательство.

Пусть $A \notin L$. Как опровергнуть A на конечной L-шкале?
Ввиду полноты, $\exists$ шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.
Последнее означает, что $\exists$ модель $M = (F, V)$, такая что $M \not\models A$.
Возьмем $\Phi = \mathrm{Sub}(A)$ — конечное Sub-замкнутое множество формул.
Так как L — ДФ, то $\exists$ $\widehat{M}$ — фильтрация M через Φ, такая что $\widehat{F} \models L$.
По лемме о фильтрации $\widehat{M} \not\models A$. Итак, опровергли формулу A в $\widehat{F}$. $\square$

Теорема

Логика **K** допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Теорема

Логика **K** допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$. □

Теорема

Логика $\mathbf{K}$ допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Теорема

Логика $\mathbf{K}$ допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Отношение $\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$ рефлексивно: так как $x\,R\,x$, то $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{x}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{K}$ допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Отношение $\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$ рефлексивно: так как $x\,R\,x$, то $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{x}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KB} = \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Теорема

Логика $\mathbf{K}$ допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Отношение $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$ рефлексивно: так как $x\,R\,x$, то $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{x}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KB} = \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

$\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$ симметрично:

Теорема

Логика $\mathbf{K}$ допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \ \oplus \ (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Отношение $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$ рефлексивно: так как $x\,R\,x$, то $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{x}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KB} = \mathbf{K} \ \oplus \ (p \to \Box\Diamond p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

$\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$ симметрично: $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$

Теорема

Логика **K** допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Отношение $\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$ рефлексивно: так как $x\,R\,x$, то $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{x}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KB} = \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

$\widehat{R} = R_{\Phi}^{\min}$ симметрично: $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \;\Rightarrow\; x'\,R\,y'$

Теорема

Логика $\mathbf{K}$ допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Отношение $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$ рефлексивно: так как $x\,R\,x$, то $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{x}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KB} = \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

$\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$ симметрично: $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \;\Rightarrow\; x'\,R\,y' \;\Rightarrow\; y'\,R\,x'$

Теорема

Логика $\mathbf{K}$ допускает фильтрацию, а значит, разрешима.

Доказательство.

Годится любая фильтрация M через Φ. Например, $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Отношение $\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$ рефлексивно: так как $x\,R\,x$, то $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{x}$. $\square$

Теорема

Логика $\mathbf{KB} = \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

$\widehat{R} = R_\Phi^{\min}$ симметрично: $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \;\Rightarrow\; x'\,R\,y' \;\Rightarrow\; y'\,R\,x' \;\Rightarrow\; \widehat{y}\,\widehat{R}\,\widehat{x}$. $\square$

Минимальные фильтрации

Пусть $F = (W, R)$ и $\sim$ есть отношение эквивалентности на W, тогда

$$\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists x' \sim x \text{ и } \exists y' \sim y, \text{ такие что } x'\, R\, y'.$$

Минимальные фильтрации

Пусть $F = (W, R)$ и $\sim$ есть отношение эквивалентности на W, тогда

$$\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists x' \sim x \text{ и } \exists y' \sim y, \text{ такие что } x'\, R\, y'.$$

Определение

Класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. минимальных фильтраций, если для любой шкалы $F \in \mathbb{F}$ и любого отн. экв. $\sim$ на W шкала $(\widehat{W}, R^{\min}_{\sim}) \in \mathbb{F}$.

Минимальные фильтрации

Пусть $F = (W, R)$ и $\sim$ есть отношение эквивалентности на W, тогда

$$\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists x' \sim x \text{ и } \exists y' \sim y, \text{ такие что } x'\, R\, y'.$$

Определение

Класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. минимальных фильтраций, если для любой шкалы $F \in \mathbb{F}$ и любого отн. экв. $\sim$ на W шкала $(\widehat{W}, R^{\min}_{\sim}) \in \mathbb{F}$.

Модальная формула A сохраняется при мин. фильтрациях, если класс ее шкал $\mathrm{Frames}(A)$ замкнут отн. минимальных фильтраций.

Минимальные фильтрации

Пусть $F = (W, R)$ и $\sim$ есть отношение эквивалентности на W, тогда

$$\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \exists x' \sim x \text{ и } \exists y' \sim y, \text{ такие что } x'\, R\, y'.$$

Определение

Класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. минимальных фильтраций, если для любой шкалы $F \in \mathbb{F}$ и любого отн. экв. $\sim$ на W шкала $(\widehat{W}, R^{\min}_{\sim}) \in \mathbb{F}$.

Модальная формула A сохраняется при мин. фильтрациях, если класс ее шкал $\mathrm{Frames}(A)$ замкнут отн. минимальных фильтраций.

Лемма

Пусть класс шкал $\mathrm{Frames}(L)$ *замкнут отн. минимальных фильтраций. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ *— полна, и каждая формула* $A \in \Sigma$ *сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ *— полна, и каждая формула* $A \in \Sigma$ *сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Доказательство.

Класс шкал $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\Sigma) = \bigcap\limits_{A \in \Sigma} \mathrm{Frames}(A)$ замкнут отн. мин. ф., т.к. равен пересечению классов, замкнутых отн. мин. ф. $\square$

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ *— полна, и каждая формула* $A \in \Sigma$ *сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Доказательство.

Класс шкал $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\Sigma) = \bigcap\limits_{A \in \Sigma} \mathrm{Frames}(A)$ замкнут отн. мин. ф., т.к. равен пересечению классов, замкнутых отн. мин. ф. $\square$

Мы уже знаем: формулы $\Box p \to p$ и $p \to \Box\Diamond p$ — сохр. при мин. ф.

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ *— полна, и каждая формула* $A \in \Sigma$ *сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Доказательство.

Класс шкал $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\Sigma) = \bigcap\limits_{A \in \Sigma} \mathrm{Frames}(A)$ замкнут отн. мин. ф., т.к. равен пересечению классов, замкнутых отн. мин. ф. $\square$

Мы уже знаем: формулы $\Box p \to p$ и $p \to \Box\Diamond p$ — сохр. при мин. ф.

Следствие

Логика $\mathbf{KTB}$ *— допускает фильтрацию. А значит, разрешима.*

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ *— полна, и каждая формула* $A \in \Sigma$ *сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Доказательство.

Класс шкал $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\Sigma) = \bigcap\limits_{A \in \Sigma} \mathrm{Frames}(A)$ замкнут отн. мин. ф., т.к. равен пересечению классов, замкнутых отн. мин. ф. $\square$

Мы уже знаем: формулы $\Box p \to p$ и $p \to \Box\Diamond p$ — сохр. при мин. ф.

Следствие

Логика $\mathbf{KTB}$ *— допускает фильтрацию. А значит, разрешима.*

Формула $\Diamond\top$ — сохраняется при минимальных фильтрациях.

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ *— полна, и каждая формула* $A \in \Sigma$ *сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Доказательство.

Класс шкал $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\Sigma) = \bigcap\limits_{A \in \Sigma} \mathrm{Frames}(A)$ замкнут отн. мин. ф., т.к. равен пересечению классов, замкнутых отн. мин. ф. $\square$

Мы уже знаем: формулы $\Box p \to p$ и $p \to \Box\Diamond p$ — сохр. при мин. ф.

Следствие

Логика **KTB** *— допускает фильтрацию. А значит, разрешима.*

Формула $\Diamond\top$ — сохраняется при минимальных фильтрациях.

Следствие

Логики **KD** *и* **KDB** *— допускают фильтрацию. А значит, разрешимы.*

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

(1) $\Box^m p \to \quad \Diamond^n p \qquad\qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge\ x\, R^n\, z)$

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

(1) $\Box^m p \to \Diamond^n p \qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge\ x\, R^n\, z)$

(2) $\Box^m p \to \Box\Diamond^n p \qquad \forall x, y\, \big(x\, R\, y \ \Rightarrow\ \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge\ y\, R^n\, z)\big)$

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

(1) $\Box^m p \to \Diamond^n p$ $\qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; x\, R^n\, z)$

(2) $\Box^m p \to \Box\Diamond^n p$ $\qquad \forall x, y\, \big(x\, R\, y \;\Rightarrow\; \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; y\, R^n\, z)\big)$

Пусть шкала $F = (W, R)$ обладает свойством (2) (для (1) аналог.).

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

(1) $\Box^m p \to \Diamond^n p$ $\qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; x\, R^n\, z)$

(2) $\Box^m p \to \Box\Diamond^n p$ $\qquad \forall x, y\, \big(x\, R\, y \;\Rightarrow\; \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; y\, R^n\, z)\big)$

Пусть шкала $F = (W, R)$ обладает свойством (2) (для (1) аналог.). Почему минимальная фильтрованная шкала $\widehat{F} = (\widehat{W}, R_{\sim}^{\min})$ — тоже?

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

(1) $\Box^m p \to \Diamond^n p$ $\qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge\ x\, R^n\, z)$

(2) $\Box^m p \to \Box\Diamond^n p$ $\qquad \forall x, y\, \big(x\, R\, y \ \Rightarrow\ \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge\ y\, R^n\, z)\big)$

Пусть шкала $F = (W, R)$ обладает свойством (2) (для (1) аналог.).
Почему минимальная фильтрованная шкала $\widehat{F} = (\widehat{W}, R^{\min}_{\sim})$ — тоже?
Допустим $\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y}$.

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

(1) $\Box^m p \to \Diamond^n p$ $\qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; x\, R^n\, z)$

(2) $\Box^m p \to \Box\Diamond^n p$ $\qquad \forall x, y\, \big(x\, R\, y \;\Rightarrow\; \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; y\, R^n\, z)\big)$

Пусть шкала $F = (W, R)$ обладает свойством (2) (для (1) аналог.). Почему минимальная фильтрованная шкала $\widehat{F} = (\widehat{W}, R^{\min}_{\sim})$ — тоже? Допустим $\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$.

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

(1) $\Box^m p \to \Diamond^n p$ $\qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; x\, R^n\, z)$

(2) $\Box^m p \to \Box\Diamond^n p$ $\qquad \forall x, y\, \big(x\, R\, y \;\Rightarrow\; \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; y\, R^n\, z)\big)$

Пусть шкала $F = (W, R)$ обладает свойством (2) (для (1) аналог.).
Почему минимальная фильтрованная шкала $\widehat{F} = (\widehat{W}, R^{\min}_{\sim})$ — тоже?
Допустим $\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$.
По (2) $\exists z$: $x\, R^m\, z$ и $y\, R^n\, z$.

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию ⇒ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

(1) $\Box^m p \to \Diamond^n p$ $\qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge\ x\, R^n\, z)$

(2) $\Box^m p \to \Box\Diamond^n p$ $\qquad \forall x, y\, \big(x\, R\, y \ \Rightarrow\ \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge\ y\, R^n\, z)\big)$

Пусть шкала $F = (W, R)$ обладает свойством (2) (для (1) аналог.).
Почему минимальная фильтрованная шкала $\widehat{F} = (\widehat{W}, R^{\min}_{\sim})$ — тоже?
Допустим $\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$.
По (2) $\exists z$: $x\, R^m\, z$ и $y\, R^n\, z$. По условию (3а) при фильтрации ребро переходит в ребро, а значит цепь — в цепь.

Теорема (Габбай, 1972)

Следующие формулы сохраняются при минимальных фильтрациях:

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m, n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые конечным набором формул из этого множества, — допускают фильтрацию $\Rightarrow$ разрешимы.

Примеры: $\Box p \to p$ (рефл.), $p \to \Box\Diamond p$ (сим.), $\Box\Box p \to \Box p$ (плотность).

Доказательство. Эти формулы задают такие классы шкал:

$$(1) \quad \Box^m p \to \Diamond^n p \qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge \ x\, R^n\, z)$$

$$(2) \quad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p \qquad \forall x, y\, \big(x\, R\, y \ \Rightarrow \ \exists z\, (x\, R^m\, z \ \wedge \ y\, R^n\, z)\big)$$

Пусть шкала $F = (W, R)$ обладает свойством (2) (для (1) аналог.).
Почему минимальная фильтрованная шкала $\widehat{F} = (\widehat{W}, R^{\min}_{\sim})$ — тоже?
Допустим $\widehat{x}\, R^{\min}_{\sim}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$.
По (2) $\exists z$: $x\, R^m\, z$ и $y\, R^n\, z$. По условию (3а) при фильтрации ребро переходит в ребро, а значит цепь — в цепь.
Поэтому $\widehat{x}\, \widehat{R}^m\, \widehat{z}$ и $\widehat{y}\, \widehat{R}^n\, \widehat{z}$. $\Box$

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных:

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^{n}\bot$.

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Доказательство.

Берем модель $M = (F, V)$ со шкалой $F \models L'$, и множество формул Φ.

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Доказательство.

Берем модель $M = (F, V)$ со шкалой $F \models L'$, и множество формул Φ.
Расширим его: $\Phi' = \Phi \cup \mathrm{Sub}(\Sigma)$.

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Доказательство.

Берем модель $M = (F, V)$ со шкалой $F \models L'$, и множество формул Φ.
Расширим его: $\Phi' = \Phi \cup \mathrm{Sub}(\Sigma)$.
Существует $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ — фильтрация M через Φ', такая что $\widehat{F} \models L$.

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Доказательство.

Берем модель $M = (F, V)$ со шкалой $F \models L'$, и множество формул Φ.
Расширим его: $\Phi' = \Phi \cup \mathrm{Sub}(\Sigma)$.
Существует $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ — фильтрация M через Φ', такая что $\widehat{F} \models L$.
Поскольку $M \models \Sigma$ и $\Sigma \subseteq \Phi'$, то имеем $\widehat{M} \models \Sigma$.

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Доказательство.

Берем модель $M = (F, V)$ со шкалой $F \models L'$, и множество формул Φ.
Расширим его: $\Phi' = \Phi \cup \mathrm{Sub}(\Sigma)$.
Существует $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ — фильтрация M через Φ', такая что $\widehat{F} \models L$.
Поскольку $M \models \Sigma$ и $\Sigma \subseteq \Phi'$, то имеем $\widehat{M} \models \Sigma$.
Но это — замкнутые формулы! Поэтому $\widehat{F} \models \Sigma$.

Замкнутые (= константные) модальные формулы

Замкнутая формула — без переменных: $\Diamond\top$, $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Доказательство.

Берем модель $M = (F, V)$ со шкалой $F \models L'$, и множество формул Φ.
Расширим его: $\Phi' = \Phi \cup \mathrm{Sub}(\Sigma)$.
Существует $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ — фильтрация M через Φ', такая что $\widehat{F} \models L$.
Поскольку $M \models \Sigma$ и $\Sigma \subseteq \Phi'$, то имеем $\widehat{M} \models \Sigma$.
Но это — замкнутые формулы! Поэтому $\widehat{F} \models \Sigma$.
Тем самым $\widehat{F} \models L'$. $\square$

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathsf{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathsf{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.

Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathrm{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \ \Rightarrow \ M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R^{\min}_{\Phi} \subseteq R^{\mathrm{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{y}$.

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.

Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathsf{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathsf{Lem}}\, \widehat{y} \quad\Leftrightarrow\quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R_{\Phi}^{\min} \subseteq R^{\mathsf{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R_{\Phi}^{\min}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathrm{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R_{\Phi}^{\min} \subseteq R^{\mathrm{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R_{\Phi}^{\min}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$. Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}$? Воспользуемся тем, что $M \models \Box B \to \Box\Box B$.

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.

Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathrm{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R^{\min}_{\Phi} \subseteq R^{\mathrm{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$. Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}$? Воспользуемся тем, что $M \models \Box B \to \Box\Box B$.
   a) $\quad M, x \models \Box B \implies M, y \models B$,

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathrm{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq R^{\mathrm{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\,R\,y$.
   Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}$? Воспользуемся тем, что $M \models \Box B \to \Box\Box B$.
   a) $\quad M, x \models \Box B \implies M, y \models B,$
   b) $\quad M, x \models \Box B \implies M, x \models \Box\Box B \implies M, y \models \Box B.$

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathrm{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R^{\min}_{\Phi} \subseteq R^{\mathrm{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$. Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}$? Воспользуемся тем, что $M \models \Box B \to \Box\Box B$.
   a) $M, x \models \Box B \implies M, y \models B$,
   b) $M, x \models \Box B \implies M, x \models \Box\Box B \implies M, y \models \Box B$.
2. $R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R^{\max}_{\Phi}$ — тривиально.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.

Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathrm{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \,\big(\, M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \,\big).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R^{\min}_{\Phi} \subseteq R^{\mathrm{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$. Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}$? Воспользуемся тем, что $M \models \Box B \to \Box\Box B$.
   a) $M, x \models \Box B \implies M, y \models B$,
   b) $M, x \models \Box B \implies M, x \models \Box\Box B \implies M, y \models \Box B$.
2. $R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R^{\max}_{\Phi}$ — тривиально.
3. R^{Lem} транзитивно?

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathrm{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R^{\min}_{\Phi} \subseteq R^{\mathrm{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$.
   Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}$? Воспользуемся тем, что $M \models \Box B \to \Box\Box B$.
   a) $M, x \models \Box B \implies M, y \models B$,
   b) $M, x \models \Box B \implies M, x \models \Box\Box B \implies M, y \models \Box B$.
2. $R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R^{\max}_{\Phi}$ — тривиально.
3. R^{Lem} транзитивно? Пусть $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{z}$?

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 1: Фильтрация Леммона.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := R^{\mathrm{Lem}}$ так:

$$\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \left(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B \right).$$

Докажем, что оно транзитивно и между мин. и макс.

1. $R^{\min}_{\Phi} \subseteq R^{\mathrm{Lem}}$. Пусть $\widehat{x}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$.
   Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}$? Воспользуемся тем, что $M \models \Box B \to \Box\Box B$.
   a) $M, x \models \Box B \implies M, y \models B$,
   b) $M, x \models \Box B \implies M, x \models \Box\Box B \implies M, y \models \Box B$.
2. $R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R^{\max}_{\Phi}$ — тривиально.
3. R^{Lem} транзитивно? Пусть $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{y}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{z}$. Почему $\widehat{x}\, R^{\mathrm{Lem}}\, \widehat{z}$?

   Имеем: $x \models \Box B \implies y \models B \wedge \Box B \implies z \models B \wedge \Box B$.

◁

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

1. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

1. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
2. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

1. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
2. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
3. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

1. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
2. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
3. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
4. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

1. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
2. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
3. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
4. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
5. $R^+ = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} R^n \ = \ R \cup R^2 \cup \ldots$

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

1. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
2. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
3. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
4. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
5. $R^+ = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} R^n \; = \; R \cup R^2 \cup \ldots$
6. $x\, R^+\, y \iff$ существует конечная цепь из $n \geqslant 1$ ребра, соединяющая x и y: $x = x_0\, R\, x_1\, R\, \ldots\, R\, x_n = y$.

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

1. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
2. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
3. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
4. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
5. $R^+ = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} R^n \; = \; R \cup R^2 \cup \ldots$
6. $x \, R^+ \, y \iff$ существует конечная цепь из $n \geqslant 1$ ребра, соединяющая x и y: $x = x_0 \, R \, x_1 \, R \, \ldots \, R \, x_n = y$.
7. R^+ можно построить как предел итеративного процесса: $R_1 = R$, $R_{n+1} = R_n \cup (R_n \circ R_n)$; тогда $R^+ = \bigcup_{n \geqslant 1} R_n$.

Определение

Транзитивное замыкание R^+ отношения $R \subseteq W \times W$ можно задать следующими эквивалентными определениями:

1. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
2. R^+ — это наименьшее такое отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
3. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq S \circ S$.
4. R^+ — это пересечение всех таких отн. S, что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
5. $R^+ = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} R^n \;=\; R \cup R^2 \cup \ldots$
6. $x\, R^+\, y \iff$ существует конечная цепь из $n \geqslant 1$ ребра, соединяющая x и y: $x = x_0\, R\, x_1\, R\, \ldots\, R\, x_n = y$.
7. R^+ можно построить как предел итеративного процесса: $R_1 = R$, $R_{n+1} = R_n \cup (R_n \circ R_n)$; тогда $R^+ = \bigcup_{n \geqslant 1} R_n$.
8. R^+ можно построить как предел итеративного процесса: $S_1 = R$, $S_{n+1} = S_n \cup (R \circ S_n)$; тогда $R^+ = \bigcup_{n \geqslant 1} S_n$.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.

Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_{\Phi}^{\min})^{+}$.

1. $R_{\Phi}^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_{\Phi}^{\max}$?

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.

Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.
   Способ 2: непосредственно проверим, что $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R_\Phi^{\max}$.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.
   Способ 2: непосредственно проверим, что $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R_\Phi^{\max}$.
   Пусть имеем цепь по мин. отношению: $\widehat{x}_0 \, R_\Phi^{\min} \, \ldots \, R_\Phi^{\min} \, \widehat{x}_n$.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.
   Способ 2: непосредственно проверим, что $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R_\Phi^{\max}$.
   Пусть имеем цепь по мин. отношению: $\widehat{x_0}\; R_\Phi^{\min} \;\ldots\; R_\Phi^{\min}\; \widehat{x_n}$.
   Значит, имеем рваную цепь: $x_0 \,R\, y_1 \sim x_1 \,R\, y_2 \sim x_2 \,R \ldots R\, y_n \sim x_n$.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.
   Способ 2: непосредственно проверим, что $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R_\Phi^{\max}$.
   Пусть имеем цепь по мин. отношению: $\widehat{x_0}\ R_\Phi^{\min}\ \ldots\ R_\Phi^{\min}\ \widehat{x_n}$.
   Значит, имеем рваную цепь: $x_0\ R\ y_1 \sim x_1\ R\ y_2 \sim x_2\ R \ldots R\ y_n \sim x_n$.

   $x_0 \models \Box B$

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.
   Способ 2: непосредственно проверим, что $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R_\Phi^{\max}$.
   Пусть имеем цепь по мин. отношению: $\widehat{x_0}\ R_\Phi^{\min} \ \dots \ R_\Phi^{\min}\ \widehat{x_n}$.
   Значит, имеем рваную цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R \dots R\, y_n \sim x_n$.

   $x_0 \models \Box B \Longrightarrow x_0 \models \Box\Box B$

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.

Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.
   Способ 2: непосредственно проверим, что $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R_\Phi^{\max}$.
   Пусть имеем цепь по мин. отношению: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min} \ldots R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_n}$.
   Значит, имеем рваную цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R \ldots R\, y_n \sim x_n$.

   $$x_0 \models \Box B \Longrightarrow x_0 \models \Box\Box B \Longrightarrow y_1 \models \Box B$$

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.
Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.
   Способ 2: непосредственно проверим, что $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R_\Phi^{\max}$.
   Пусть имеем цепь по мин. отношению: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min} \ldots R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_n}$.
   Значит, имеем рваную цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R \ldots R\, y_n \sim x_n$.

   $x_0 \models \Box B \Longrightarrow x_0 \models \Box\Box B \Longrightarrow y_1 \models \Box B \Longrightarrow x_1 \models \Box B$, ибо $\Box B \in \Phi$.

Фильтрация транзитивной логики

Теорема

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство. Способ 2: Транзитивное замыкание мин. отн.

Дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Φ. Задаем $\widehat{R} := (R_\Phi^{\min})^+$.

1. $R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R}$ — тривиально.
2. $\widehat{R}$ транзитивно — тривиально.
3. Почему $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
   Способ 1: $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R^{\mathrm{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\max}$. Ибо R^{Lem} — некоторое транз. отношение, содержащее $R_\Phi^{\min}$, а $(R_\Phi^{\min})^+$ — наименьшее из таких.
   Способ 2: непосредственно проверим, что $(R_\Phi^{\min})^+ \subseteq R_\Phi^{\max}$.
   Пусть имеем цепь по мин. отношению: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min} \ldots R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_n}$.
   Значит, имеем рваную цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R \ldots R\, y_n \sim x_n$.

   $x_0 \models \Box B \Longrightarrow x_0 \models \Box\Box B \Longrightarrow y_1 \models \Box B \Longrightarrow x_1 \models \Box B$, ибо $\Box B \in \Phi$.

Мы «пронесли» формулу $\Box B$ от x_0 к x_1. Далее аналогично. $\triangleleft$

Рефлексивная транзитивная логика

Теорема

Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Рефлексивная транзитивная логика

Теорема

Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Фильтрация любой рефлексивной модели — рефлексивная модель. $\Box$

Рефлексивная транзитивная логика

Теорема

Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Фильтрация любой рефлексивной модели — рефлексивная модель. $\Box$

Теорема

Логика $\mathbf{KD4} = \mathbf{K4} \oplus \Diamond\top$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Рефлексивная транзитивная логика

Теорема

Логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus (\Box p \to p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Фильтрация любой рефлексивной модели — рефлексивная модель. $\Box$

Теорема

Логика $\mathbf{KD4} = \mathbf{K4} \oplus \Diamond\top$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Ибо можно добавлять любые замкнутые формулы.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \ \oplus \ (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \ \supseteq \ R \circ R \circ R$.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \ldots$

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \ \oplus \ (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \ \supseteq \ R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \dots$

$x \, R^{+2} \, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \ \oplus \ (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \ \supseteq \ R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \ldots$

$x\,R^{+2}\,y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять 2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \ \oplus \ (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \ \supseteq \ R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \dots$

$x \, R^{+2} \, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять 2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.

Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.
Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.
Такие отношения будем называть 2-транзитивными.
Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.
Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \ldots$
$x\, R^{+2}\, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять
2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.
Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \dots$

$x \, R^{+2} \, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять 2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.

Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?

Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0} \, R_\Phi^{\min} \, \widehat{x_1} \, R_\Phi^{\min} \, \widehat{x_2} \, R_\Phi^{\min} \, \widehat{x_3}$.

В F будет «рваная» цепь: $x_0 \, R \, y_1 \sim x_1 \, R \, y_2 \sim x_2 \, R \, y_3 \sim x_3$.

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.
Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.
Такие отношения будем называть 2-транзитивными.
Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.
Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \dots$
$x\, R^{+2}\, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять
2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R^{\min}_{\Phi})^{+2}$.
Единственное, что нужно доказать — почему $(R^{\min}_{\Phi})^{+2} \subseteq R^{\max}_{\Phi}$?
Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{x_1}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{x_2}\, R^{\min}_{\Phi}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \ldots$

$x\, R^{+2}\, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять

2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.

Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?

Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.

В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.

Надо «пронести» $\Box B$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).

$x_0 \models \Box B$

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \ldots$

$x\, R^{+2}\, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять 2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.

Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?

Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.

В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.

Надо «пронести» $\Box B$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).

$x_0 \models \Box B \Longrightarrow x_0 \models \Box\Box\Box B$

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.
Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.
Такие отношения будем называть 2-транзитивными.
Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.
Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \dots$
$x\, R^{+2}\, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять
2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.
Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
$x_0 \models \Box B \implies x_0 \models \Box\Box\Box B \implies y_1 \models \Box\Box B$

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \ldots$

$x\, R^{+2}\, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять 2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.

Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?

Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.

В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.

Надо «пронести» $\Box B$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).

$x_0 \models \Box B \implies x_0 \models \Box\Box\Box B \implies y_1 \models \Box\Box B \overset{???}{\implies} x_1 \models \Box\Box B,$

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \ \oplus \ (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.
Она полна относительно шкал с условием: $R \ \supseteq \ R \circ R \circ R$.
Такие отношения будем называть 2-транзитивными.
Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.
Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \ldots$
$x\, R^{+2}\, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять
2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.
Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?
Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
$x_0 \models \Box B \implies x_0 \models \Box\Box\Box B \implies y_1 \models \Box\Box B \stackrel{???}{\implies} x_1 \models \Box\Box B$,
Формула $\Box B \in \Phi$, но необязательно $\Box\Box B \in \Phi$! Проблема...

2-транзитивная логика: загвоздка

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box\Box p)$.

Она полна относительно шкал с условием: $R \supseteq R \circ R \circ R$.

Такие отношения будем называть 2-транзитивными.

Наим. 2-транзитивное отношение, содержащее R, обозначаем R^{+2}.

Это 2-транзитивное замыкание: $R^{+2} = R \cup R^3 \cup R^5 \cup R^7 \ldots$

$x\, R^{+2}\, y \iff$ точки x и y соединяет R-цепь нечетной длины.

Попробуем провести фильтрацию по Способу 2 — взять 2-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\min})^{+2}$.

Единственное, что нужно доказать — почему $(R_\Phi^{\min})^{+2} \subseteq R_\Phi^{\max}$?

Для примера возьмем цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.

В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.

Надо «пронести» $\Box B$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).

$x_0 \models \Box B \implies x_0 \models \Box\Box\Box B \implies y_1 \models \Box\Box B \overset{???}{\implies} x_1 \models \Box\Box B$,

Формула $\Box B \in \Phi$, но необязательно $\Box\Box B \in \Phi$! Проблема...

Выход: Будем фильтровать по большему Φ, но сохранять истинность формул из меньшего множества Γ.

Фильтрация в узком смысле (прежняя)

Определение (Фильтрация модели M через Φ, $\approx$ фактор-модель)

Фильтрацией модели $M = (W, R, V)$ **через** множество формул Φ назыв. всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Phi$:
$$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \ \leftrightharpoons \ M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Phi$ $(M, x \models \Box B \ \Rightarrow \ M, y \models B)$

Фильтрация в широком смысле

Определение (Фильтрация модели M через Φ, соглас. с Γ)

Фильтрация модели $M = (W, R, V)$ **через** Φ, **согласованная с** $\Gamma \subseteq \Phi$ — это всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Gamma$:
$$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Gamma$ $(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B)$

Фильтрация в широком смысле

Определение (Фильтрация модели M через Φ, соглас. с Γ)

Фильтрация модели $M = (W, R, V)$ через Φ, согласованная с $\Gamma \subseteq \Phi$ — это всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Gamma$:
$$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   - (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   - (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Gamma$ $(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B)$

Условия (3a) и (3b) перепишутся теперь так: $\boxed{R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}}$

Фильтрация в широком смысле

Определение (Фильтрация модели M через Φ, соглас. с Γ)

Фильтрация модели $M = (W, R, V)$ через Φ, согласованная с $\Gamma \subseteq \Phi$ — это всякая модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, удовлетворяющая условиям:

1. $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактор-множество W по $\equiv_\Phi$;
2. оценка $\widehat{V}$ — «каноническая» на переменных $p \in \Gamma$:
$$\widehat{M}, \widehat{x} \models p \;\leftrightharpoons\; M, x \models p.$$
3. отношение $\widehat{R} \subseteq \widehat{W} \times \widehat{W}$ — любое, удовлетворяющее условиям:
   (a) $x\,R\,y \implies \widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$
   (b) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y} \implies$ для всех формул $\Box B \in \Gamma$ $(M, x \models \Box B \Rightarrow M, y \models B)$

Условия (3a) и (3b) перепишутся теперь так: $\boxed{R_\Phi^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}}$

Упражнение. Проверьте, что всегда есть включение $R_\Phi^{\min} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.

Перенос результатов

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ, *согласованная с* $\Gamma \subseteq \Phi$. *Тогда для любой точки* $\forall x \in W$ *и любой формулы* $A \in \Gamma$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

Перенос результатов

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ *— фильтрация модели* M *через* Φ, *согласованная с* $\Gamma \subseteq \Phi$. *Тогда для любой точки* $\forall x \in W$ *и любой формулы* $A \in \Gamma$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

(!) Фильтрация теперь не обязана быть модально различимой:

Перенос результатов

Лемма (о фильтрации)

Пусть $\widehat{M}$ — фильтрация модели M через Φ, согласованная с $\Gamma \subseteq \Phi$. Тогда для любой точки $\forall x \in W$ и любой формулы $A \in \Gamma$

$$\widehat{M}, \widehat{x} \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad M, x \models A.$$

(!) Фильтрация теперь не обязана быть модально различимой: если $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, то x и y отличаются некоторой формулой $A \in \Phi$, но на модель $\widehat{M}$ переносится лишь истинность формул из Γ!

Определение (Логики, доп. фильтрацию (в широком смысле))

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \quad \xrightarrow{\text{фильтрация}} \quad \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

Определение (Логики, доп. фильтрацию (в широком смысле))

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \quad \xrightarrow{\text{фильтрация}} \quad \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ конечное Sub-замкнутое множество $\Phi \supseteq \Gamma$ и
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ, согласованная с Γ.

Определение (Логики, доп. фильтрацию (в широком смысле))

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ конечное Sub-замкнутое множество $\Phi \supseteq \Gamma$ и
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ, согласованная с Γ.

Теперь 2 степени свободы при фильтрации: выбор $\Phi \supseteq \Gamma$ и $\widehat{R}$.

Определение (Логики, доп. фильтрацию (в широком смысле))

Говорим, что логика L допускает фильтрацию (ДФ), если

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного Sub-замкнутого множества формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ конечное Sub-замкнутое множество $\Phi \supseteq \Gamma$ и
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть фильтрация модели M через Φ, согласованная с Γ.

Теперь 2 степени свободы при фильтрации: выбор $\Phi \supseteq \Gamma$ и $\widehat{R}$.

Теорема

$$\left.\begin{array}{l} L \text{ — полна} \\ L \text{ — доп. фильтрацию} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} L \text{ — ПОКШ} \\ L \text{ — кон. акс.} \end{array}\right\} \Longrightarrow L \text{ — разрешима}$$

Перенос результатов

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ *— полна, и каждая формула* $A \in \Sigma$ *сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Перенос результатов

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ — полна, и каждая формула $A \in \Sigma$ сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда L — допускает фильтрацию.

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Перенос результатов

Лемма

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$ *— полна, и каждая формула* $A \in \Sigma$ *сохраняется при минимальных фильтрациях. Тогда* L *— допускает фильтрацию.*

Теорема

Пусть логика L — допускает фильтрацию,
Σ — конечное множество замкнутых модальных формул.
Тогда логика $L' = L \oplus \Sigma$ — тоже допускает фильтрацию.

Доказательство.

Берем модель $M = (F, V)$ со шкалой $F \models L'$, и множество формул Γ.
Расширим его: $\Gamma' = \Gamma \cup \mathrm{Sub}(\Sigma)$. Существует $\widehat{M} = (\widehat{F}, \widehat{V})$ — фильтрация M через некоторое $\Phi \supseteq \Gamma'$, такая что $\widehat{F} \models L$.
Поскольку $M \models \Sigma$ и $\Sigma \subseteq \Gamma'$, то имеем $\widehat{M} \models \Sigma$.
Но это — замкнутые формулы! Поэтому $\widehat{F} \models \Sigma$.
Тем самым $\widehat{F} \models L'$. □

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus \ (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Задаваемые ею шкалы — удовлетворяют: $R \supseteq R^n \circ R$.

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Задаваемые ею шкалы — удовлетворяют: $R \supseteq R^n \circ R$.

n-транзитивное замыкание отношения R вычисляется так:

$$R^{+n} = R \ \cup \ (R^n \circ R) \ \cup \ (R^n \circ R^n \circ R) \ \cup \ \ldots$$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Задаваемые ею шкалы — удовлетворяют: $R \supseteq R^n \circ R$.

n-транзитивное замыкание отношения R вычисляется так:

$$R^{+n} = R \ \cup \ (R^n \circ R) \ \cup \ (R^n \circ R^n \circ R) \ \cup \ \ldots$$

Пусть дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Γ.

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Задаваемые ею шкалы — удовлетворяют: $R \supseteq R^n \circ R$.
n-транзитивное замыкание отношения R вычисляется так:

$$R^{+n} = R \cup (R^n \circ R) \cup (R^n \circ R^n \circ R) \cup \ldots$$

Пусть дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Γ.
Построим Φ так: $\Phi = \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box^n B \mid \Box B \in \Gamma\}$.

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus \ (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Задаваемые ею шкалы — удовлетворяют: $R \supseteq R^n \circ R$.

n-транзитивное замыкание отношения R вычисляется так:

$$R^{+n} = R \ \cup \ (R^n \circ R) \ \cup \ (R^n \circ R^n \circ R) \ \cup \ \ldots$$

Пусть дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Γ.

Построим Φ так: $\Phi = \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box^n B \mid \Box B \in \Gamma\}$.

Отношением $\widehat{R}$ будет n-транзитивное замыкание мин. отношения:

$$\widehat{R} \ = \ (R_\Phi^{\min})^{+n}.$$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus \ (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Задаваемые ею шкалы — удовлетворяют: $R \supseteq R^n \circ R$.

n-транзитивное замыкание отношения R вычисляется так:

$$R^{+n} = R \ \cup \ (R^n \circ R) \ \cup \ (R^n \circ R^n \circ R) \ \cup \ \ldots$$

Пусть дана $M = (W, R, V)$ и множество формул Γ.

Построим Φ так: $\Phi = \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box^n B \mid \Box B \in \Gamma\}$.

Отношением $\widehat{R}$ будет n-транзитивное замыкание мин. отношения:

$$\widehat{R} \ = \ (R_\Phi^{\min})^{+n}.$$

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$. $\Box$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\; R_\Phi^{\min}\; \widehat{x_1}\; R_\Phi^{\min}\; \widehat{x_2}\; R_\Phi^{\min}\; \widehat{x_3}$.

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus \ (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus \ (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
Для каждой формулы $\Box B \in \Gamma$ имеем: $\Box\Box B \in \Phi$. Поэтому:

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus \ (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\ R_\Phi^{\min}\ \widehat{x_1}\ R_\Phi^{\min}\ \widehat{x_2}\ R_\Phi^{\min}\ \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\ R\ y_1 \sim x_1\ R\ y_2 \sim x_2\ R\ y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
Для каждой формулы $\Box B \in \Gamma$ имеем: $\Box\Box B \in \Phi$. Поэтому:

$x_0 \models \Box B$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
Для каждой формулы $\Box B \in \Gamma$ имеем: $\Box\Box B \in \Phi$. Поэтому:

$x_0 \models \Box B \Rightarrow x_0 \models \Box\Box\Box B$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
Для каждой формулы $\Box B \in \Gamma$ имеем: $\Box\Box B \in \Phi$. Поэтому:

$$x_0 \models \Box B \Rightarrow x_0 \models \Box\Box\Box B \Rightarrow y_1 \models \Box\Box B$$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\ R_\Phi^{\min}\ \widehat{x_1}\ R_\Phi^{\min}\ \widehat{x_2}\ R_\Phi^{\min}\ \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\ R\ y_1 \sim x_1\ R\ y_2 \sim x_2\ R\ y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
Для каждой формулы $\Box B \in \Gamma$ имеем: $\Box\Box B \in \Phi$. Поэтому:

$$x_0 \models \Box B \Rightarrow x_0 \models \Box\Box\Box B \Rightarrow y_1 \models \Box\Box B \overset{!!!}{\Rightarrow} x_1 \models \Box\Box B$$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus \ (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R^{\min}_{\Phi})^{+n} \subseteq R^{\max}_{\Gamma}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\ R^{\min}_{\Phi}\ \widehat{x_1}\ R^{\min}_{\Phi}\ \widehat{x_2}\ R^{\min}_{\Phi}\ \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\ R\ y_1 \sim x_1\ R\ y_2 \sim x_2\ R\ y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
Для каждой формулы $\Box B \in \Gamma$ имеем: $\Box\Box B \in \Phi$. Поэтому:

$$x_0 \models \Box B \Rightarrow x_0 \models \Box\Box\Box B \Rightarrow y_1 \models \Box\Box B \overset{!!!}{\Rightarrow} x_1 \models \Box\Box B \Rightarrow y_2 \models \Box B$$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
Для каждой формулы $\Box B \in \Gamma$ имеем: $\Box\Box B \in \Phi$. Поэтому:

$$x_0 \models \Box B \Rightarrow x_0 \models \Box\Box\Box B \Rightarrow y_1 \models \Box\Box B \overset{!!!}{\Rightarrow} x_1 \models \Box\Box B \Rightarrow y_2 \models \Box B \Rightarrow x_2 \models \Box B$$

Логики с аксиомой n-транзитивности

Теорема (Габбай, 1972)

Логика $L = \mathbf{K} \oplus \ (\Box p \to \Box^n \Box p)$ допускает фильтрацию $\Rightarrow$ разрешима.

Доказательство.

Единственное, что нужно проверить: $(R_\Phi^{\min})^{+n} \subseteq R_\Gamma^{\max}$.
Для примера $n = 2$ и цепь длины 3: $\widehat{x_0}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_1}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_2}\, R_\Phi^{\min}\, \widehat{x_3}$.
В F будет «рваная» цепь: $x_0\, R\, y_1 \sim x_1\, R\, y_2 \sim x_2\, R\, y_3 \sim x_3$.
Надо «пронести» $\Box B \in \Gamma$ от точки x_0 до точки x_2 (через 2 шага!).
Для каждой формулы $\Box B \in \Gamma$ имеем: $\Box\Box B \in \Phi$. Поэтому:

$$x_0 \models \Box B \Rightarrow x_0 \models \Box\Box\Box B \Rightarrow y_1 \models \Box\Box B \overset{!!!}{\Rightarrow} x_1 \models \Box\Box B \Rightarrow y_2 \models \Box B \Rightarrow x_2 \models \Box B$$

Мы пронесли через n стрелок формулу $\Box B \in \Gamma$. Аналогично через $n + \ldots + n$ стрелок. На последней стрелке $\Box B$ превратится в B. $\Box$

Комбинируем аксиомы n-транзитивности

Теорема (Шехтман, 1998)

Пусть $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, \ldots\}$ — произвольное конечное множество чисел.

Комбинируем аксиомы n-транзитивности

Теорема (Шехтман, 1998)

Пусть $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, \ldots\}$ — произвольное конечное множество чисел. Логика $L_\alpha = \mathbf{K} \oplus \{\Box p \to \Box^n \Box p \mid n \in \alpha\}$ допускает фильтрацию. Следовательно, она разрешима.

Комбинируем аксиомы n-транзитивности

Теорема (Шехтман, 1998)

Пусть $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, \dots\}$ — произвольное конечное множество чисел. Логика $L_\alpha = \mathbf{K} \ \oplus \ \{\Box p \to \Box^n \Box p \ \mid \ n \in \alpha\}$ допускает фильтрацию. Следовательно, она разрешима.

Подсказка:

$\Phi = \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box^n B \mid \Box B \in \Gamma, \ n \in \alpha\}$.

Комбинируем аксиомы n-транзитивности

Теорема (Шехтман, 1998)

Пусть $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, \ldots\}$ — произвольное конечное множество чисел. Логика $L_\alpha = \mathbf{K} \oplus \{\Box p \to \Box^n \Box p \mid n \in \alpha\}$ допускает фильтрацию. Следовательно, она разрешима.

Подсказка:

$\Phi = \Gamma \cup \mathrm{Sub}\{\Box^n B \mid \Box B \in \Gamma,\ n \in \alpha\}$.

В качестве $\widehat{R}$ берем α-замыкание минимального отношения. $\Box$

Модальные логики, фильтрация и грамматики

1. Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

Модальные логики, фильтрация и грамматики

1. Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$
   Транзитивное замыкание отношения R — это наименьшее отношение S, такое что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.

1. Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$
   Транзитивное замыкание отношения R — это наименьшее отношение S, такое что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
   Язык $\{a, a^2, a^3, \ldots\}$ — регулярный.

Модальные логики, фильтрация и грамматики

1. Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$
   Транзитивное замыкание отношения R — это наименьшее отношение S, такое что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
   Язык $\{a, a^2, a^3, \dots\}$ — регулярный.
   Этот язык задается грамматикой $b \to a$, $b \to ab$.

Модальные логики, фильтрация и грамматики

1. Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$
   Транзитивное замыкание отношения R — это наименьшее отношение S, такое что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
   Язык $\{a, a^2, a^3, \ldots\}$ — регулярный.
   Этот язык задается грамматикой $b \to a$, $b \to ab$.
2. Язык $\{a, a^3, a^5, a^7, \ldots\}$ — тоже регулярный.

1. Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$
   Транзитивное замыкание отношения R — это наименьшее отношение S, такое что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
   Язык $\{a, a^2, a^3, \ldots\}$ — регулярный.
   Этот язык задается грамматикой $b \to a$, $b \to ab$.
2. Язык $\{a, a^3, a^5, a^7, \ldots\}$ — тоже регулярный.
3. Когда еще работает метод «взять замыкание минимального отношения и проверить его включение в максимальное»?

Модальные логики, фильтрация и грамматики

1. Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$
   Транзитивное замыкание отношения R — это наименьшее отношение S, такое что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
   Язык $\{a, a^2, a^3, \ldots\}$ — регулярный.
   Этот язык задается грамматикой $b \to a$, $b \to ab$.
2. Язык $\{a, a^3, a^5, a^7, \ldots\}$ — тоже регулярный.
3. Когда еще работает метод «взять замыкание минимального отношения и проверить его включение в максимальное»?
4. В чем существенная разница (в плане фильтрации) между

$$\Box_b p \to \Box_a \Box_b p \quad \text{и} \quad \Box_b p \to \Box_b \Box_a p?$$

Модальные логики, фильтрация и грамматики

1. Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$
   Транзитивное замыкание отношения R — это наименьшее отношение S, такое что $S \supseteq R$ и $S \supseteq R \circ S$.
   Язык $\{a, a^2, a^3, \ldots\}$ — регулярный.
   Этот язык задается грамматикой $b \to a$, $b \to ab$.
2. Язык $\{a, a^3, a^5, a^7, \ldots\}$ — тоже регулярный.
3. Когда еще работает метод «взять замыкание минимального отношения и проверить его включение в максимальное»?
4. В чем существенная разница (в плане фильтрации) между
   $$\Box_b p \to \Box_a \Box_b p \quad \text{и} \quad \Box_b p \to \Box_b \Box_a p?$$

Конец лекции 10. Спасибо за внимание!