Модальная логика. Лекция 9: Разрешимые модальные логики. Финитно аппроксимируемые модальные логики. Конечные канонические модели. Разрешимость логик K, KT, K4, KB, S4, S5.

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

20 ноября 2020 года

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. *D, E — разрешимы $\Rightarrow D \cap E$, $D \cup E$, $\overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — разрешимы.*

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. D, E — *разрешимы* $\Rightarrow D \cap E$, $D \cup E$, $\overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — *разрешимы.*

Факты, имеющие отношение к модальной логике:

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. D, E — *разрешимы* $\Rightarrow D \cap E, D \cup E, \overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — *разрешимы.*

Факты, имеющие отношение к модальной логике:

- Множество модальных формул Fm — разрешимо.

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. D, E — *разрешимы* $\Rightarrow D \cap E$, $D \cup E$, $\overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — *разрешимы.*

Факты, имеющие отношение к модальной логике:

- Множество модальных формул Fm — разрешимо.
- Логики **Triv** и **Ver** — разрешимы.

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. D, E — *разрешимы* $\Rightarrow D \cap E$, $D \cup E$, $\overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — *разрешимы.*

Факты, имеющие отношение к модальной логике:

- Множество модальных формул Fm — разрешимо.
- Логики **Triv** и **Ver** — разрешимы.
- Всякая табличная логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ (F конечна) — разрешима.

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. D, E — *разрешимы* $\Rightarrow D \cap E$, $D \cup E$, $\overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — *разрешимы.*

Факты, имеющие отношение к модальной логике:

- Множество модальных формул Fm — разрешимо.
- Логики **Triv** и **Ver** — разрешимы.
- Всякая табличная логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ (F конечна) — разрешима.
- $\{A \in \mathrm{Fm} \mid \exists F\colon\ F \models A\}$

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. D, E — *разрешимы* $\Rightarrow D \cap E$, $D \cup E$, $\overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — *разрешимы.*

Факты, имеющие отношение к модальной логике:

- Множество модальных формул Fm — разрешимо.
- Логики **Triv** и **Ver** — разрешимы.
- Всякая табличная логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ (F конечна) — разрешима.
- $\{A \in \mathrm{Fm} \mid \exists F\colon\ F \models A\} = \mathbf{Triv} \cup \mathbf{Ver}$ (т. Макинсона)

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. D, E — *разрешимы* $\Rightarrow D \cap E$, $D \cup E$, $\overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — *разрешимы.*

Факты, имеющие отношение к модальной логике:

- Множество модальных формул Fm — разрешимо.
- Логики **Triv** и **Ver** — разрешимы.
- Всякая табличная логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ (F конечна) — разрешима.
- $\{A \in \mathrm{Fm} \mid \exists F\colon\ F \models A\} = \mathbf{Triv} \cup \mathbf{Ver}$ (т. Макинсона) разрешимо.

Теория алгоритмов: разрешимые множества

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечный алфавит,
Σ^* — множество всех слов (включая пустое) в алфавите Σ.
Язык — это произвольное подмножество $D \subseteq \Sigma^*$.

Определение

$D \subseteq \Sigma^*$ — разрешимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий хар. функцию:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Факт. D, E — *разрешимы* $\Rightarrow D \cap E$, $D \cup E$, $\overline{D} = \Sigma^* \setminus D$ — *разрешимы.*

Факты, имеющие отношение к модальной логике:

- Множество модальных формул Fm — разрешимо.
- Логики **Triv** и **Ver** — разрешимы.
- Всякая табличная логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ (F конечна) — разрешима.
- $\{A \in \mathrm{Fm} \mid \exists F\colon\ F \models A\} = \mathbf{Triv} \cup \mathbf{Ver}$ (т. Макинсона) разрешимо.
- Логики **K**, **KD**, **KT**, **KB**, **K4**, **S4**, **KD45**, **S5** и т.д. — разрешимы?

Определение (вариант 1)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий полухар. ф.:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \pi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ \text{неопределена}, & x \notin D. \end{cases}$$

Теория алгоритмов: перечислимые множества

Определение (вариант 1)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий полухар. ф.:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \pi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ \text{неопределена}, & x \notin D. \end{cases}$$

Определение (вариант 2)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ его вычислимый пересчет, то есть тотальная вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$, такая что $\mathrm{Ran}(f) = D$.

Теория алгоритмов: перечислимые множества

Определение (вариант 1)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий полухар. ф.:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \pi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ \text{неопределена}, & x \notin D. \end{cases}$$

Определение (вариант 2)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ его вычислимый пересчет, то есть тотальная вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$, такая что $\mathrm{Ran}(f) = D$.

Факт 1. *Два определения перечислимости равносильны.*

Теория алгоритмов: перечислимые множества

Определение (вариант 1)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий полухар. ф.:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \pi_D(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \in D, \\ \text{неопределена}, & x \notin D. \end{cases}$$

Определение (вариант 2)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ его вычислимый пересчет, то есть тотальная вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$, такая что $\mathrm{Ran}(f) = D$.

Факт 1. *Два определения перечислимости равносильны.*

Факт 2. *Всякое разрешимое множество перечислимо.*

Теория алгоритмов: перечислимые множества

Определение (вариант 1)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий полухар. ф.:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \pi_D(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \in D, \\ \text{неопределена}, & x \notin D. \end{cases}$$

Определение (вариант 2)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ его вычислимый пересчет, то есть тотальная вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$, такая что $\mathrm{Ran}(f) = D$.

Факт 1. *Два определения перечислимости равносильны.*

Факт 2. *Всякое разрешимое множество перечислимо.*

Факт 3. D, E — *перечислимы* $\implies$ $D \cap E$, $D \cup E$ — *перечислимы.*

Теория алгоритмов: перечислимые множества

Определение (вариант 1)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ алгоритм, вычисляющий полухар. ф.:

$$\forall x \in \Sigma^* \qquad \pi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ \text{неопределена}, & x \notin D. \end{cases}$$

Определение (вариант 2)

$D \subseteq \Sigma^*$ — перечислимое, если $\exists$ его вычислимый пересчет, то есть тотальная вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$, такая что $\mathrm{Ran}(f) = D$.

Факт 1. *Два определения перечислимости равносильны.*

Факт 2. *Всякое разрешимое множество перечислимо.*

Факт 3. D, E *— перечислимы* $\implies$ $D \cap E$, $D \cup E$ *— перечислимы.*

Факт 4. D *— разрешимо* $\iff$ D *и* $\overline{D}$ *перечислимы.* (Теорема Поста)

Перечислимые модальные логики

Теорема 1

Всякая конечно аксиоматизируемая модальная логика перечислима.

Перечислимые модальные логики

Теорема 1

Всякая конечно аксиоматизируемая модальная логика перечислима.

Теорема 2

Если Γ — разрешимое множество модальных формул, то аксиоматизируемая им логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — перечислима.

Перечислимые модальные логики

Теорема 1

Всякая конечно аксиоматизируемая модальная логика перечислима.

Теорема 2

Если Γ — разрешимое множество модальных формул, то аксиоматизируемая им логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — перечислима.

Доказательство.

$$A \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ вывод } C_1, \ldots, C_n = A \text{ в логике } L.$$

Перечислимые модальные логики

Теорема 1

Всякая конечно аксиоматизируемая модальная логика перечислима.

Теорема 2

Если Γ — разрешимое множество модальных формул, то аксиоматизируемая им логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — перечислима.

Доказательство.

$$A \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ вывод } C_1, \ldots, C_n = A \text{ в логике } L.$$

Алгоритм проверки $A \in L$: перебирать все конечные посл-ти формул $C_1, \ldots, C_n$ и проверять, является ли она выводом формулы A в L.

Перечислимые модальные логики

Теорема 1

Всякая конечно аксиоматизируемая модальная логика перечислима.

Теорема 2

Если Γ — разрешимое множество модальных формул, то аксиоматизируемая им логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — перечислима.

Доказательство.

$$A \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ вывод } C_1, \ldots, C_n = A \text{ в логике } L.$$

Алгоритм проверки $A \in L$: перебирать все конечные посл-ти формул $C_1, \ldots, C_n$ и проверять, является ли она выводом формулы A в L. В этой проверке свойство «быть аксиомой логики L» разрешимо. $\square$

Логики с перечислимым множеством аксиом

Теорема 3

Если Γ — перечислимое множество модальных формул, то аксиоматизируемая ими логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — перечислима.

Логики с перечислимым множеством аксиом

Теорема 3

Если Γ — перечислимое множество модальных формул, то аксиоматизируемая ими логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — перечислима.

Доказательство.

$$A \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ вывод } C_1, \ldots, C_n = A$$
$$\text{из некоторых аксиом } B_1, \ldots, B_m \in \Gamma$$
$$\text{(и аксиом и правил логики } \mathbf{K}\text{).}$$

Логики с перечислимым множеством аксиом

Теорема 3

Если Γ — перечислимое множество модальных формул, то аксиоматизируемая ими логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — перечислима.

Доказательство.

$$A \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ вывод } C_1, \ldots, C_n = A$$
$$\text{из некоторых аксиом } B_1, \ldots, B_m \in \Gamma$$
$$\text{(и аксиом и правил логики } \mathbf{K}\text{).}$$

Алгоритм проверки $B \in \Gamma$ на входе B_i останавливается за t_i шагов.

Логики с перечислимым множеством аксиом

Теорема 3

Если Γ — перечислимое множество модальных формул, то аксиоматизируемая ими логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — перечислима.

Доказательство.

$$A \in L \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ вывод } C_1, \ldots, C_n = A$$
$$\text{из некоторых аксиом } B_1, \ldots, B_m \in \Gamma$$
$$\text{(и аксиом и правил логики } \mathbf{K}\text{).}$$

Алгоритм проверки $B \in \Gamma$ на входе B_i останавливается за t_i шагов. Поэтому можно переписать так:

$A \in L \quad \Leftrightarrow$ $\exists n \geqslant |A|$ такое что $\exists$ посл-ть длины $\leqslant n$ из формул, имеющих длину $\leqslant n$, на некоторых из них алгоритм проверки принадлежности $\in \Gamma$ остановился за $\leqslant n$ шагов (а значит, эти формулы — аксиомы логики L) и эта посл-ть является выводом формулы A в L.

Рекурсивно аксиоматизируемые логики

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Рекурсивно аксиоматизируемые логики

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, Γ — перечислимое и $f(n) = B_n$ — вычислимый пересчет множества $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots\}$.

Рекурсивно аксиоматизируемые логики

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, Γ — перечислимое и $f(n) = B_n$ — вычислимый пересчет множества $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Положим

$$C_n = \underbrace{B_n \wedge \ldots \wedge B_n}_{n \text{ конъюнктов}} \qquad \text{(скобки сгруппированы, например, вправо).}$$

Рекурсивно аксиоматизируемые логики

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, Γ — перечислимое и $f(n) = B_n$ — вычислимый пересчет множества $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Положим

$$C_n = \underbrace{B_n \wedge \ldots \wedge B_n}_{n \text{ конъюнктов}} \qquad \text{(скобки сгруппированы, например, вправо).}$$

и $\Gamma' = \{C_1, C_2, \ldots\}$. Очевидно, $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma'$. Почему Γ' разрешимо?

Рекурсивно аксиоматизируемые логики

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, Γ — перечислимое и $f(n) = B_n$ — вычислимый пересчет множества $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Положим

$$C_n = \underbrace{B_n \wedge \ldots \wedge B_n}_{n \text{ конъюнктов}} \qquad \text{(скобки сгруппированы, например, вправо).}$$

и $\Gamma' = \{C_1, C_2, \ldots\}$. Очевидно, $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma'$. Почему Γ' разрешимо? Дана $A \in \mathrm{Fm}$.

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, Γ — перечислимое и $f(n) = B_n$ — вычислимый пересчет множества $\Gamma = \{B_1, B_2, \dots\}$. Положим

$$C_n = \underbrace{B_n \wedge \ldots \wedge B_n}_{n \text{ конъюнктов}} \qquad \text{(скобки сгруппированы, например, вправо).}$$

и $\Gamma' = \{C_1, C_2, \dots\}$. Очевидно, $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma'$. Почему Γ' разрешимо?
Дана $A \in \mathrm{Fm}$. Выпишем $f(1) = B_1$. Если $A = B_1$, выдаем **Да**.

Рекурсивно аксиоматизируемые логики

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, Γ — перечислимое и $f(n) = B_n$ — вычислимый пересчет множества $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Положим

$$C_n = \underbrace{B_n \wedge \ldots \wedge B_n}_{n \text{ конъюнктов}} \qquad \text{(скобки сгруппированы, например, вправо).}$$

и $\Gamma' = \{C_1, C_2, \ldots\}$. Очевидно, $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma'$. Почему Γ' разрешимо? Дана $A \in \mathrm{Fm}$. Выпишем $f(1) = B_1$. Если $A = B_1$, выдаем **Да**. Если нет, проверим, имеет ли A вид $E \wedge \ldots \wedge E$ (с группировкой скобок вправо).

Рекурсивно аксиоматизируемые логики

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, Γ — перечислимое и $f(n) = B_n$ — вычислимый пересчет множества $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Положим

$$C_n = \underbrace{B_n \wedge \ldots \wedge B_n}_{n \text{ конъюнктов}} \qquad \text{(скобки сгруппированы, например, вправо).}$$

и $\Gamma' = \{C_1, C_2, \ldots\}$. Очевидно, $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma'$. Почему Γ' разрешимо? Дана $A \in \mathrm{Fm}$. Выпишем $f(1) = B_1$. Если $A = B_1$, выдаем **Да**. Если нет, проверим, имеет ли A вид $E \wedge \ldots \wedge E$ (с группировкой скобок вправо). Если да и конъюнктов n, то выпишем формулу $f(n) = B_n$, и если $E = B_n$, то выдаем **Да**.

Рекурсивно аксиоматизируемые логики

Теорема Крейга

Всякая логика с перечислимым множеством аксиом может быть аксиоматизирована и некоторым разрешимым множеством аксиом.

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, Γ — перечислимое и $f(n) = B_n$ — вычислимый пересчет множества $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Положим

$$C_n = \underbrace{B_n \wedge \ldots \wedge B_n}_{n \text{ конъюнктов}} \qquad \text{(скобки сгруппированы, например, вправо).}$$

и $\Gamma' = \{C_1, C_2, \ldots\}$. Очевидно, $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma'$. Почему Γ' разрешимо? Дана $A \in \mathrm{Fm}$. Выпишем $f(1) = B_1$. Если $A = B_1$, выдаем **Да**. Если нет, проверим, имеет ли A вид $E \wedge \ldots \wedge E$ (с группировкой скобок вправо). Если да и конъюнктов n, то выпишем формулу $f(n) = B_n$, и если $E = B_n$, то выдаем **Да**. Иначе выдаем **Нет**. $\square$

Полнота относительно конечных шкал (ПОКШ)

Другой термин: логика L финитно аппроксимируема.

Полнота относительно конечных шкал (ПОКШ)

Другой термин: логика L финитно аппроксимируема. (L has the FMP.)

Полнота относительно конечных шкал (ПОКШ)

Другой термин: логика L финитно аппроксимируема. (L has the FMP.)

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$L \vdash A \iff$ для всякой конечной шкалы F $\big(\, F \models L \implies F \models A \,\big)$.

Полнота относительно конечных шкал (ПОКШ)

Другой термин: логика L финитно аппроксимируема. (L has the FMP.)

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Замечание: $\Longrightarrow$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Полнота относительно конечных шкал (ПОКШ)

Другой термин: логика L финитно аппроксимируема. (L has the FMP.)

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Замечание: $\Longrightarrow$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Определение. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Полнота относительно конечных шкал (ПОКШ)

Другой термин: логика L финитно аппроксимируема. (L has the FMP.)

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Замечание: $\Longrightarrow$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Определение. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Замечание: здесь тоже $\Longrightarrow$ верно всегда.

Полнота относительно конечных шкал (ПОКШ)

Другой термин: логика L финитно аппроксимируема. (L has the FMP.)

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Замечание: $\implies$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Определение. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Замечание: здесь тоже $\implies$ верно всегда.

Простое сравнение двух определений дает:

Лемма

Если логика ПОКШ (то есть ФА), то она полна по Крипке:

$$\textit{ПОКШ} \implies \textit{полнота.}$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(\, F \models L \implies F \models A \,\big).$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$L \vdash A \iff$ для всякой конечной шкалы F $\left(F \models L \implies F \models A \right)$.

Определение

Из множества формул Γ следует на конечных шкалах формула A:

$\Gamma \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A$, если для всякой конечной шкалы F $\left(F \models \Gamma \implies F \models A \right)$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Определение

Из множества формул Γ следует на конечных шкалах формула A:

$\Gamma \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A$, если для всякой конечной шкалы F $\big(F \models \Gamma \implies F \models A \big)$.

Определение 2. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff L \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A.$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение

Из множества формул Γ следует на конечных шкалах формула A:

$\Gamma \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A$, если для всякой конечной шкалы F $\left(F \models \Gamma \implies F \models A \right)$.

Определение 2. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff L \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A.$$

Очевидно: **Определение 1** $\iff$ **Определение 2**.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$L \vdash A \iff$ для всякой конечной шкалы F $\left(F \models L \implies F \models A \right)$.

Определение

Формула A опровержима на шкале $F = (W, R)$, если $F \not\models A$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(\ F \models L \implies F \models A\ \big).$$

Определение

Формула A опровержима на шкале $F = (W, R)$, если $F \not\models A$.

Шкалу F будем называть L-шкалой, если $F \models L$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение

Формула A опровержима на шкале $F = (W, R)$, если $F \not\models A$.

Шкалу F будем называть L-шкалой, если $F \models L$.

Определение 3. Логика L — ПОКШ, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой конечной L-шкале.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 3. Логика L — ПОКШ, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой конечной L-шкале.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Определение 3. Логика L — ПОКШ, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой конечной L-шкале.

Доказательство эквивалентности **Опр. 1** $\iff$ **Опр. 3.**

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Определение 3. Логика L — ПОКШ, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой конечной L-шкале.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 3.

Так как в Опр. 1 импликация $\Rightarrow$ верна всегда, оставим лишь $\Leftarrow$:

$$A \in L \impliedby \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 3. Логика L — ПОКШ, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой конечной L-шкале.

Доказательство эквивалентности **Опр. 1** $\iff$ **Опр. 3.**

Так как в Опр. 1 импликация $\Rightarrow$ верна всегда, оставим лишь $\Leftarrow$:

$$A \in L \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Перепишем эквивалентно по контрапозиции:

$$A \notin L \implies \text{существует конечная шкала } F \ \left(F \models L \text{ и } F \not\models A \right).$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 3. Логика L — ПОКШ, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой конечной L-шкале.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 3.

Так как в Опр. 1 импликация $\Rightarrow$ верна всегда, оставим лишь $\Leftarrow$:

$$A \in L \impliedby \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Перепишем эквивалентно по контрапозиции:

$$A \notin L \implies \text{существует конечная шкала } F \ \left(F \models L \text{ и } F \not\models A \right).$$

Это и означает: A опровержима на некоторой конечной L-шкале. $\square$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$L \vdash A \iff$ для всякой конечной шкалы F $\big(F \models L \implies F \models A \big)$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(\ F \models L \implies F \models A\ \big).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(\, F \models L \implies F \models A\,\big).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Обозначим $\mathrm{FinFr}(L) = \{F \text{ — конечная шкала} \mid F \models L\}$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \; \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Обозначим $\mathrm{FinFr}(L) = \{F \text{ — конечная шкала } \mid F \models L\}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности **Опр. 4** $\iff$ **Опр. 5.**

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности **Опр. 4** $\iff$ **Опр. 5.**

$(\Longleftarrow)$ Тривиально.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \; \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{FinFr}(L)$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(\, F \models L \implies F \models A\,\big).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{FinFr}(L)$. Тогда:

$$L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \;\; (\, F \models L \implies F \models A \,).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.
($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{FinFr}(L)$. Тогда:

$$L \;\subseteq\; \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)) \;\subseteq\; \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{FinFr}(L)$. Тогда:

$$L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{FinFr}(L)$. Тогда:

$$L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L.$$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{FinFr}(L)$. Тогда:

$$L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L.$$

Получили Определение 5. $\square$

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности **Опр. 1** $\iff$ **Опр. 5**.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 5.

Правая часть Определения 1 есть: $\mathrm{FinFr}(L) \models A$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 5.

Правая часть Определения 1 есть: $\mathrm{FinFr}(L) \models A$.
Иначе говоря: $A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 5.

Правая часть Определения 1 есть: $\mathrm{FinFr}(L) \models A$.
Иначе говоря: $A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$.
А само Определение 1 становится: $A \in L \Leftrightarrow A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$.

Эквивалентные определения ПОКШ

Определение 1. Логика L — ПОКШ, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой конечной шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса конечных шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — ПОКШ, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ класса всех конечных L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 5.

Правая часть Определения 1 есть: $\mathrm{FinFr}(L) \models A$.
Иначе говоря: $A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$.
А само Определение 1 становится: $A \in L \Leftrightarrow A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$.
То есть $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{FinFr}(L))$ — это и есть Определение 5. $\square$

Табличные логики

Факт. *Табличная логика — ПОКШ,*

Табличные логики

Факт. *Табличная логика — ПОКШ, а также кон. акс. и разрешима.*

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \;\;\&\;\; \textit{ПОКШ} \;\Rightarrow\; \textit{разрешимость}}$$

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \quad \& \quad \textit{ПОКШ} \quad \Rightarrow \quad \textit{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал.

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \quad \& \quad \textit{ПОКШ} \quad \Rightarrow \quad \textit{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал. А именно: $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(B)$.

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \;\;\&\;\; \textit{ПОКШ} \;\;\Rightarrow\;\; \textit{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал. А именно: $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(B)$.

1) L — КА, а значит, перечислима (было доказано выше).

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \;\; \& \;\; \textit{ПОКШ} \;\Rightarrow\; \textit{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал. А именно: $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(B)$.

1) L — КА, а значит, перечислима (было доказано выше).

2) Докажем: $(\mathrm{Fm} \setminus L)$ перечислимо.

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \ \ \& \ \ \textit{ПОКШ} \ \ \Rightarrow \ \ \textit{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал. А именно: $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(B)$.

1) L — КА, а значит, перечислима (было доказано выше).

2) Докажем: $(\mathrm{Fm} \setminus L)$ перечислимо. Тогда по т. Поста L — разрешима.

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \quad \& \quad \textit{ПОКШ} \quad \Rightarrow \quad \textit{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал. А именно: $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(B)$.

1) L — КА, а значит, перечислима (было доказано выше).

2) Докажем: $(\mathrm{Fm} \setminus L)$ перечислимо. Тогда по т. Поста L — разрешима.

Мы знаем: $A \notin L \;\Leftrightarrow\; \exists F \in \mathbb{F}\colon F \not\models A$.

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \quad \& \quad \textit{ПОКШ} \quad \Rightarrow \quad \textit{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал. А именно: $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(B)$.

1) L — КА, а значит, перечислима (было доказано выше).

2) Докажем: $(\mathrm{Fm} \setminus L)$ перечислимо. Тогда по т. Поста L — разрешима.

Мы знаем: $A \notin L \;\Leftrightarrow\; \exists F \in \mathbb{F}\colon F \not\models A$.

Алгоритм: дана формула A.

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\text{КА} \;\;\&\;\; \text{ПОКШ} \;\Rightarrow\; \text{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал. А именно: $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(B)$.

1) L — КА, а значит, перечислима (было доказано выше).

2) Докажем: $(\mathrm{Fm} \setminus L)$ перечислимо. Тогда по т. Поста L — разрешима.

Мы знаем: $A \notin L \;\Leftrightarrow\; \exists F \in \mathbb{F}\colon F \not\models A$.

Алгоритм: дана формула A.

Перебирать все конечные шкалы F, для каждой из них проверять:

– $F \in \mathbb{F}$, то есть $F \models B$,

– $F \not\models A$.

Теорема Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \ \ \& \ \ \textit{ПОКШ} \ \Rightarrow \ \textit{разрешимость}}$$

Доказательство.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus B = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторой формулы B и класса $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(L)$ всех конечных L-шкал. А именно: $\mathbb{F} = \mathrm{FinFr}(B)$.

1) L — КА, а значит, перечислима (было доказано выше).

2) Докажем: $(\mathrm{Fm} \setminus L)$ перечислимо. Тогда по т. Поста L — разрешима.

Мы знаем: $A \notin L \ \Leftrightarrow \ \exists F \in \mathbb{F}\colon F \not\models A$.

Алгоритм: дана формула A.

Перебирать все конечные шкалы F, для каждой из них проверять:

– $F \in \mathbb{F}$, то есть $F \models B$,

– $F \not\models A$.

Если такая шкала нашлась, выдать «Да». Иначе продолжать работать. □

Модификация теоремы Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \ \ \& \ \ \textit{ПОКШ} \ \Rightarrow \ \textit{разрешимость}}$$

Модификация теоремы Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \;\; \& \;\; \textit{ПОКШ} \;\Rightarrow\; \textit{разрешимость}}$$

Теорема (модификация)

Пусть

- *логика L — рекурсивно аксиоматизируема (задается разрешимым множеством аксиом Γ)*

Модификация теоремы Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \ \ \& \ \ \textit{ПОКШ} \ \Rightarrow \ \ \textit{разрешимость}}$$

Теорема (модификация)

Пусть

- *логика L — рекурсивно аксиоматизируема (задается разрешимым множеством аксиом Γ)*
- *L есть логика некоторого разрешимого множества конечных шкал $\mathbb{F}$.*

Модификация теоремы Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \ \ \& \ \ \textit{ПОКШ} \ \Rightarrow \ \textit{разрешимость}}$$

Теорема (модификация)

Пусть

- *логика L — рекурсивно аксиоматизируема (задается разрешимым множеством аксиом Γ)*
- *L есть логика некоторого разрешимого множества конечных шкал $\mathbb{F}$.*

Тогда логика L — разрешима.

Модификация теоремы Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \;\; \& \;\; \textit{ПОКШ} \;\Rightarrow\; \textit{разрешимость}}$$

Теорема (модификация)

Пусть

- *логика L — рекурсивно аксиоматизируема (задается разрешимым множеством аксиом Γ)*
- *L есть логика некоторого разрешимого множества конечных шкал $\mathbb{F}$.*

Тогда логика L — разрешима.

Доказательство.

Перечислимость L: следует из рекурсивной аксиоматизируемости.

Модификация теоремы Харропа

Теорема (R. Harrop, 1958)

Конечно аксиом. и финитно-аппрокс. логика — разрешима:

$$\boxed{\textit{КА} \ \ \& \ \ \textit{ПОКШ} \ \ \Rightarrow \ \ \textit{разрешимость}}$$

Теорема (модификация)

Пусть

- *логика L — рекурсивно аксиоматизируема (задается разрешимым множеством аксиом Γ)*
- *L есть логика некоторого разрешимого множества конечных шкал $\mathbb{F}$.*

Тогда логика L — разрешима.

Доказательство.

Перечислимость L: следует из рекурсивной аксиоматизируемости.
Ко-перечислимость L: перебираем всевозможные конечные шкалы F, для каждой проверяем, что $F \in \mathbb{F}$ и $F \not\models A$. □

Метод доказательства ПОКШ: ККМ

Для некоторых логик L для доказательства ПОКШ работает метод построения «конечных канонических моделей».

Метод доказательства ПОКШ: ККМ

Для некоторых логик L для доказательства ПОКШ работает метод построения «конечных канонических моделей».

Для формулы $A_0 \notin L$ строим конечную контрмодель $M_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ, V_L^\circ)$ над L-шкалой:

Метод доказательства ПОКШ: ККМ

Для некоторых логик L для доказательства ПОКШ работает метод построения «конечных канонических моделей».

Для формулы $A_0 \notin L$ строим конечную контрмодель $M_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ, V_L^\circ)$ над L-шкалой:

1. Строим два конечных множества формул: $A_0 \in \Gamma \subseteq \Gamma'$.

Метод доказательства ПОКШ: ККМ

Для некоторых логик L для доказательства ПОКШ работает метод построения «конечных канонических моделей».

Для формулы $A_0 \notin L$ строим конечную контрмодель $M_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ, V_L^\circ)$ над L-шкалой:

1. Строим два конечных множества формул: $A_0 \in \Gamma \subseteq \Gamma'$.
2. Точки этой модели — *максимальные* L*-непротиворечивые* подмножества $x \subseteq \Gamma'$.

Метод доказательства ПОКШ: ККМ

Для некоторых логик L для доказательства ПОКШ работает метод построения «конечных канонических моделей».

Для формулы $A_0 \notin L$ строим конечную контрмодель $M_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ, V_L^\circ)$ над L-шкалой:

1. Строим два конечных множества формул: $A_0 \in \Gamma \subseteq \Gamma'$.
2. Точки этой модели — *максимальные L-непротиворечивые* подмножества $x \subseteq \Gamma'$.
3. Оценка V_L° — канонически: $x \models p \Leftrightarrow p \in x$.

Метод доказательства ПОКШ: ККМ

Для некоторых логик L для доказательства ПОКШ работает метод построения «конечных канонических моделей».

Для формулы $A_0 \notin L$ строим конечную контрмодель $M_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ, V_L^\circ)$ над L-шкалой:

1. Строим два конечных множества формул: $A_0 \in \Gamma \subseteq \Gamma'$.
2. Точки этой модели — *максимальные* L*-непротиворечивые* подмножества $x \subseteq \Gamma'$.
3. Оценка V_L° — канонически: $x \models p \Leftrightarrow p \in x$.
4. Отношение R_L° на W_L° приходится для каждой логики L «изобретать» так,

Метод доказательства ПОКШ: ККМ

Для некоторых логик L для доказательства ПОКШ работает метод построения «конечных канонических моделей».

Для формулы $A_0 \notin L$ строим конечную контрмодель $M_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ, V_L^\circ)$ над L-шкалой:

1. Строим два конечных множества формул: $A_0 \in \Gamma \subseteq \Gamma'$.
2. Точки этой модели — *максимальные L-непротиворечивые* подмножества $x \subseteq \Gamma'$.
3. Оценка V_L° — канонически: $x \models p \Leftrightarrow p \in x$.
4. Отношение R_L° на W_L° приходится для каждой логики L «изобретать» так,

   1) чтобы получалась L-шкала,

Метод доказательства ПОКШ: ККМ

Для некоторых логик L для доказательства ПОКШ работает метод построения «конечных канонических моделей».

Для формулы $A_0 \notin L$ строим конечную контрмодель $M_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ, V_L^\circ)$ над L-шкалой:

1. Строим два конечных множества формул: $A_0 \in \Gamma \subseteq \Gamma'$.
2. Точки этой модели — *максимальные L-непротиворечивые* подмножества $x \subseteq \Gamma'$.
3. Оценка V_L° — канонически: $x \models p \Leftrightarrow p \in x$.
4. Отношение R_L° на W_L° приходится для каждой логики L «изобретать» так,

   1) чтобы получалась L-шкала,

   2) чтобы был верен аналог

   Леммы о канон. модели: $M_L^\circ, x \models A \Leftrightarrow A \in x$, для всех $A \in \Gamma$.

Связи ККМ с другими темами

Построение ККМ связано с такими конструкциями, как:

- каноническая модель логики L: $M_L = (W_L, R_L, V_L)$,

Связи ККМ с другими темами

Построение ККМ связано с такими конструкциями, как:

- каноническая модель логики L: $M_L = (W_L, R_L, V_L)$,
- фильтрация (любых моделей или канонической модели),

Связи ККМ с другими темами

Построение ККМ связано с такими конструкциями, как:

- каноническая модель логики L: $M_L = (W_L, R_L, V_L)$,
- фильтрация (любых моделей или канонической модели),
- секвенциальное исчисление для L (с устранимым сечением),

Связи ККМ с другими темами

Построение ККМ связано с такими конструкциями, как:

- каноническая модель логики L: $M_L = (W_L, R_L, V_L)$,
- фильтрация (любых моделей или канонической модели),
- секвенциальное исчисление для L (с устранимым сечением),
- табличный (tableau) алгоритм для логики L.

Связи ККМ с другими темами

Построение ККМ связано с такими конструкциями, как:

- каноническая модель логики L: $M_L = (W_L, R_L, V_L)$,
- фильтрация (любых моделей или канонической модели),
- секвенциальное исчисление для L (с устранимым сечением),
- табличный (tableau) алгоритм для логики L.

Кроме того, если удалось построить ККМ, то это дает следствия для вычислительной сложности логики L (зачастую, влечет верхнюю оценку сложности $\textsc{NExpTime}$ для проблемы проверки формулы A на выполнимость в классе L-шкал).

Подформулы

Определение

Множество подформул $\mathrm{Sub}(A)$ формулы A определяется по индукции:

Подформулы

Определение

Множество подформул $\mathrm{Sub}(A)$ формулы A определяется по индукции:

- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\}$,
- $\mathrm{Sub}(\bot) = \{\bot\}$,

Подформулы

Определение

Множество подформул $\mathrm{Sub}(A)$ формулы A определяется по индукции:

- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\}$,
- $\mathrm{Sub}(\bot) = \{\bot\}$,
- $\mathrm{Sub}(A \to B) = \{A \to B\} \cup \mathrm{Sub}(A) \cup \mathrm{Sub}(B)$,

Подформулы

Определение

Множество подформул $\mathrm{Sub}(A)$ формулы A определяется по индукции:

- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\}$,
- $\mathrm{Sub}(\bot) = \{\bot\}$,
- $\mathrm{Sub}(A \to B) = \{A \to B\} \cup \mathrm{Sub}(A) \cup \mathrm{Sub}(B)$,
- $\mathrm{Sub}(\Box A) = \{\Box A\} \cup \mathrm{Sub}(A)$.

Подформулы

Определение

Множество подформул $\mathrm{Sub}(A)$ формулы A определяется по индукции:

- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\}$,
- $\mathrm{Sub}(\bot) = \{\bot\}$,
- $\mathrm{Sub}(A \to B) = \{A \to B\} \cup \mathrm{Sub}(A) \cup \mathrm{Sub}(B)$,
- $\mathrm{Sub}(\Box A) = \{\Box A\} \cup \mathrm{Sub}(A)$.

Множество подформул множества Γ: $\quad \mathrm{Sub}(\Gamma) = \bigcup\limits_{A \in \Gamma} \mathrm{Sub}(A)$.

Подформулы

Определение

Множество подформул $\mathrm{Sub}(A)$ формулы A определяется по индукции:

- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\}$,
- $\mathrm{Sub}(\bot) = \{\bot\}$,
- $\mathrm{Sub}(A \to B) = \{A \to B\} \cup \mathrm{Sub}(A) \cup \mathrm{Sub}(B)$,
- $\mathrm{Sub}(\Box A) = \{\Box A\} \cup \mathrm{Sub}(A)$.

Множество подформул множества Γ: $\mathrm{Sub}(\Gamma) = \bigcup\limits_{A \in \Gamma} \mathrm{Sub}(A)$.

Множество формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ будем называть Sub-замкнутым, если подформула каждой формулы из Γ лежит в Γ.

Подформулы

Определение

Множество подформул $\mathrm{Sub}(A)$ формулы A определяется по индукции:

- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\}$,
- $\mathrm{Sub}(\bot) = \{\bot\}$,
- $\mathrm{Sub}(A \to B) = \{A \to B\} \cup \mathrm{Sub}(A) \cup \mathrm{Sub}(B)$,
- $\mathrm{Sub}(\Box A) = \{\Box A\} \cup \mathrm{Sub}(A)$.

Множество подформул множества Γ: $\quad \mathrm{Sub}(\Gamma) = \bigcup\limits_{A \in \Gamma} \mathrm{Sub}(A)$.

Множество формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ будем называть Sub-замкнутым, если подформула каждой формулы из Γ лежит в Γ. То есть $\mathrm{Sub}(\Gamma) \subseteq \Gamma$.

Построение ККМ: общая конструкция

Дана формула $A_0 \notin L$.

Построение ККМ: общая конструкция

Дана формула $A_0 \notin L$. Рассмотрим конечные множества формул:

$$\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0),$$

Построение ККМ: общая конструкция

Дана формула $A_0 \notin L$. Рассмотрим конечные множества формул:

$$\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0), \qquad \Gamma' := \ \Gamma \cup \neg\Gamma, \quad \text{где } \neg\Gamma = \{\neg B \mid B \in \Gamma\}.$$

Построение ККМ: общая конструкция

Дана формула $A_0 \notin L$. Рассмотрим конечные множества формул:

$$\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0), \qquad \Gamma' := \ \Gamma \cup \neg\Gamma, \quad \text{где } \neg\Gamma = \{\neg B \mid B \in \Gamma\}.$$

Определение

Множество формул $x \subseteq \Gamma'$ наз. L-непротиворечивым, если L не доказывает отрицание конъюнкции всех формул из x: $L \nvdash \neg \bigwedge x$.

Построение ККМ: общая конструкция

Дана формула $A_0 \notin L$. Рассмотрим конечные множества формул:

$$\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0), \qquad \Gamma' := \Gamma \cup \neg\Gamma, \quad \text{где } \neg\Gamma = \{\neg B \mid B \in \Gamma\}.$$

Определение

Множество формул $x \subseteq \Gamma'$ наз. *L-непротиворечивым*, если L не доказывает отрицание конъюнкции всех формул из x: $L \nvdash \neg \bigwedge x$.

Лемма о пополнении

Если $x \subseteq \Gamma'$ — L-непр., $A \in \Gamma$, то $x \cup \{A\}$ L-непр. или $x \cup \{\neg A\}$ L-непр.

Построение ККМ: общая конструкция

Дана формула $A_0 \notin L$. Рассмотрим конечные множества формул:

$$\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0), \qquad \Gamma' := \Gamma \cup \neg\Gamma, \quad \text{где } \neg\Gamma = \{\neg B \mid B \in \Gamma\}.$$

Определение

Множество формул $x \subseteq \Gamma'$ наз. *L-непротиворечивым*, если L не доказывает отрицание конъюнкции всех формул из x: $L \nvdash \neg \bigwedge x$.

Лемма о пополнении

Если $x \subseteq \Gamma'$ — L-непр., $A \in \Gamma$, то $x \cup \{A\}$ L-непр. или $x \cup \{\neg A\}$ L-непр.

Доказательство.

Если бы
$L \vdash \neg \bigwedge(x \cup \{A\})$ и
$L \vdash \neg \bigwedge(x \cup \{\neg A\})$,

Построение ККМ: общая конструкция

Дана формула $A_0 \notin L$. Рассмотрим конечные множества формул:

$$\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0), \qquad \Gamma' := \Gamma \cup \neg\Gamma, \qquad \text{где } \neg\Gamma = \{\neg B \mid B \in \Gamma\}.$$

Определение

Множество формул $x \subseteq \Gamma'$ наз. L-непротиворечивым, если L не доказывает отрицание конъюнкции всех формул из x: $L \nvdash \neg \bigwedge x$.

Лемма о пополнении

Если $x \subseteq \Gamma'$ — L-непр., $A \in \Gamma$, то $x \cup \{A\}$ L-непр. или $x \cup \{\neg A\}$ L-непр.

Доказательство.

Если бы
$L \vdash \neg \bigwedge (x \cup \{A\})$ и
$L \vdash \neg \bigwedge (x \cup \{\neg A\})$,
то по тавтологии $(B \to A) \land (B \to \neg A) \to \neg B$, где $B := \bigwedge x$,
получили бы $L \vdash \neg \bigwedge x$. $\square$

Максимальные L-непротиворечивые множества

Определение

L-непротиворечивое множество $x \subseteq \Gamma'$ называется **максимальным L-непротиворечивым** (L-м.н.м.), если (эквивалентные определения):

1. множество x максимально (по $\subseteq$) среди L-непротиворечивых;

Максимальные L-непротиворечивые множества

Определение

L-непротиворечивое множество $x \subseteq \Gamma'$ называется **максимальным L-непротиворечивым** (L-м.н.м.), если (эквивалентные определения):

1. множество x максимально (по $\subseteq$) среди L-непротиворечивых;
2. для каждой формулы $A \in \Gamma$ либо $A \in x$, либо $(\neg A) \in x$.

Максимальные L-непротиворечивые множества

Определение

L-непротиворечивое множество $x \subseteq \Gamma'$ называется максимальным L-непротиворечивым (L-м.н.м.), если (эквивалентные определения):

1. множество x максимально (по $\subseteq$) среди L-непротиворечивых;
2. для каждой формулы $A \in \Gamma$ либо $A \in x$, либо $(\neg A) \in x$.

Лемма

Два определения равносильны: $(1) \iff (2)$.

Максимальные L-непротиворечивые множества

Определение

L-непротиворечивое множество $x \subseteq \Gamma'$ называется **максимальным L-непротиворечивым** (L-м.н.м.), если (эквивалентные определения):

1. множество x максимально (по $\subseteq$) среди L-непротиворечивых;
2. для каждой формулы $A \in \Gamma$ либо $A \in x$, либо $(\neg A) \in x$.

Лемма

Два определения равносильны: $(1) \iff (2)$.

Доказательство.

$(1) \implies (2)$ Если бы $A, \neg A \notin x$, то по Лемме о пополнении x можно было бы расширить.

Максимальные L-непротиворечивые множества

Определение

L-непротиворечивое множество $x \subseteq \Gamma'$ называется **максимальным L-непротиворечивым** (L-м.н.м.), если (эквивалентные определения):

1. множество x максимально (по $\subseteq$) среди L-непротиворечивых;
2. для каждой формулы $A \in \Gamma$ либо $A \in x$, либо $(\neg A) \in x$.

Лемма

Два определения равносильны: $(1) \iff (2)$.

Доказательство.

$(1) \implies (2)$ Если бы $A, \neg A \notin x$, то по Лемме о пополнении x можно было бы расширить.

$(1) \impliedby (2)$ Допустим $x \subsetneq x'$, то $\exists A \in (x' \setminus x)$. Случай 1. $A \in \Gamma$.

Максимальные L-непротиворечивые множества

Определение

L-непротиворечивое множество $x \subseteq \Gamma'$ называется **максимальным L-непротиворечивым** (L-м.н.м.), если (эквивалентные определения):

1. множество x максимально (по $\subseteq$) среди L-непротиворечивых;
2. для каждой формулы $A \in \Gamma$ либо $A \in x$, либо $(\neg A) \in x$.

Лемма

Два определения равносильны: $(1) \Longleftrightarrow (2)$.

Доказательство.

$(1) \Longrightarrow (2)$ Если бы $A, \neg A \notin x$, то по Лемме о пополнении x можно было бы расширить.

$(1) \Longleftarrow (2)$ Допустим $x \subsetneq x'$, то $\exists A \in (x' \setminus x)$. Случай 1. $A \in \Gamma$. Тогда $\neg A \in x \subseteq x'$ и x' оказался бы L-противоречивым.

Максимальные L-непротиворечивые множества

Определение

L-непротиворечивое множество $x \subseteq \Gamma'$ называется **максимальным L-непротиворечивым** (L-м.н.м.), если (эквивалентные определения):

1. множество x максимально (по $\subseteq$) среди L-непротиворечивых;
2. для каждой формулы $A \in \Gamma$ либо $A \in x$, либо $(\neg A) \in x$.

Лемма

Два определения равносильны: $(1) \iff (2)$.

Доказательство.

$(1) \implies (2)$ Если бы $A, \neg A \notin x$, то по Лемме о пополнении x можно было бы расширить.

$(1) \impliedby (2)$ Допустим $x \subsetneq x'$, то $\exists A \in (x' \setminus x)$. Случай 1. $A \in \Gamma$. Тогда $\neg A \in x \subseteq x'$ и x' оказался бы L-противоречивым.

Случай 2. $A \in \neg\Gamma$. Аналогично. $\square$

Максимальные непротиворечивые множества формул

Аналог леммы Линденбаума

Всякое L-непр. множество содержится в некотором L-м.н.м.

Максимальные непротиворечивые множества формул

Аналог леммы Линденбаума

Всякое L-непр. множество содержится в некотором L-м.н.м.

Тривиально, ибо всё конечно.

МНМ согласованы со связками и логикой

Лемма (О конечных МНМ)

Пусть $x \subseteq \Gamma'$ — любое L-м.н.м.

1. *Пусть $A, B \in \Gamma'$ и $L \vdash A \to B$. Тогда если $A \in x$, то $B \in x$.*
2. *Пусть $A \in \Gamma$. Тогда: $\neg A \in x \iff A \notin x$.*
3. *Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \wedge B) \in x \iff A \in x$ и $B \in x$.*
4. *Пусть $(A \vee B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \vee B) \in x \iff A \in x$ или $B \in x$.*
5. *Пусть $(A \to B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \to B) \in x \iff (A \in x \Rightarrow B \in x)$.*
6. *Если $A_1, \ldots, A_n \in x$ и $L \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, где $B \in \Gamma'$, то $B \in x$.*

МНМ согласованы со связками и логикой

Лемма (О конечных МНМ)

Пусть $x \subseteq \Gamma'$ — *любое* L-*м.н.м.*

1. *Пусть* $A, B \in \Gamma'$ *и* $L \vdash A \to B$. *Тогда если* $A \in x$, *то* $B \in x$.
2. *Пусть* $A \in \Gamma$. *Тогда:* $\neg A \in x \iff A \notin x$.
3. *Пусть* $(A \wedge B) \in \Gamma$. *Тогда:* $(A \wedge B) \in x \iff A \in x$ *и* $B \in x$.
4. *Пусть* $(A \vee B) \in \Gamma$. *Тогда:* $(A \vee B) \in x \iff A \in x$ *или* $B \in x$.
5. *Пусть* $(A \to B) \in \Gamma$. *Тогда:* $(A \to B) \in x \iff (A \in x \Rightarrow B \in x)$.
6. *Если* $A_1, \ldots, A_n \in x$ *и* $L \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, *где* $B \in \Gamma'$, *то* $B \in x$.

Доказательство (1–5): как для канонической модели.

МНМ согласованы со связками и логикой

Лемма (О конечных МНМ)

Пусть $x \subseteq \Gamma'$ — любое L-м.н.м.

1. *Пусть $A, B \in \Gamma'$ и $L \vdash A \to B$. Тогда если $A \in x$, то $B \in x$.*
2. *Пусть $A \in \Gamma$. Тогда: $\neg A \in x \iff A \notin x$.*
3. *Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \wedge B) \in x \iff A \in x$ и $B \in x$.*
4. *Пусть $(A \vee B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \vee B) \in x \iff A \in x$ или $B \in x$.*
5. *Пусть $(A \to B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \to B) \in x \iff (A \in x \Rightarrow B \in x)$.*
6. *Если $A_1, \ldots, A_n \in x$ и $L \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, где $B \in \Gamma'$, то $B \in x$.*

Доказательство (1–5): как для канонической модели.

(6) Случай 1. $B \in \Gamma$. Если бы $B \notin x$, то $\neg B \in x$.

МНМ согласованы со связками и логикой

Лемма (О конечных МНМ)

Пусть $x \subseteq \Gamma'$ — любое L-м.н.м.

1. *Пусть $A, B \in \Gamma'$ и $L \vdash A \to B$. Тогда если $A \in x$, то $B \in x$.*
2. *Пусть $A \in \Gamma$. Тогда: $\neg A \in x \iff A \notin x$.*
3. *Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \wedge B) \in x \iff A \in x$ и $B \in x$.*
4. *Пусть $(A \vee B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \vee B) \in x \iff A \in x$ или $B \in x$.*
5. *Пусть $(A \to B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \to B) \in x \iff (A \in x \Rightarrow B \in x)$.*
6. *Если $A_1, \ldots, A_n \in x$ и $L \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, где $B \in \Gamma'$, то $B \in x$.*

Доказательство (1–5): как для канонической модели.

(6) Случай 1. $B \in \Gamma$. Если бы $B \notin x$, то $\neg B \in x$. Поскольку $L \vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$, то имели бы $L \vdash \neg \bigwedge x$.

МНМ согласованы со связками и логикой

Лемма (О конечных МНМ)

Пусть $x \subseteq \Gamma'$ — любое L-м.н.м.

1. *Пусть $A, B \in \Gamma'$ и $L \vdash A \to B$. Тогда если $A \in x$, то $B \in x$.*
2. *Пусть $A \in \Gamma$. Тогда: $\neg A \in x \iff A \notin x$.*
3. *Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \wedge B) \in x \iff A \in x$ и $B \in x$.*
4. *Пусть $(A \vee B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \vee B) \in x \iff A \in x$ или $B \in x$.*
5. *Пусть $(A \to B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \to B) \in x \iff (A \in x \Rightarrow B \in x)$.*
6. *Если $A_1, \ldots, A_n \in x$ и $L \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, где $B \in \Gamma'$, то $B \in x$.*

Доказательство (1–5): как для канонической модели.

(6) Случай 1. $B \in \Gamma$. Если бы $B \notin x$, то $\neg B \in x$. Поскольку $L \vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$, то имели бы $L \vdash \neg \bigwedge x$.

Случай 2. $B \in \neg\Gamma$, то есть $B = \neg C$, для некоторой $C \in \Gamma$.

МНМ согласованы со связками и логикой

Лемма (О конечных МНМ)

Пусть $x \subseteq \Gamma'$ *— любое* L*-м.н.м.*

1. *Пусть* $A, B \in \Gamma'$ *и* $L \vdash A \to B$*. Тогда если* $A \in x$*, то* $B \in x$*.*
2. *Пусть* $A \in \Gamma$*.* *Тогда:* $\neg A \in x \iff A \notin x$*.*
3. *Пусть* $(A \wedge B) \in \Gamma$*. Тогда:* $(A \wedge B) \in x \iff A \in x$ *и* $B \in x$*.*
4. *Пусть* $(A \vee B) \in \Gamma$*. Тогда:* $(A \vee B) \in x \iff A \in x$ *или* $B \in x$*.*
5. *Пусть* $(A \to B) \in \Gamma$*. Тогда:* $(A \to B) \in x \iff (A \in x \Rightarrow B \in x)$*.*
6. *Если* $A_1, \ldots, A_n \in x$ *и* $L \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$*, где* $B \in \Gamma'$*, то* $B \in x$*.*

Доказательство (1–5): как для канонической модели.

(6) Случай 1. $B \in \Gamma$. Если бы $B \notin x$, то $\neg B \in x$. Поскольку $L \vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$, то имели бы $L \vdash \neg \bigwedge x$.

Случай 2. $B \in \neg\Gamma$, то есть $B = \neg C$, для некоторой $C \in \Gamma$. Если бы $B \notin x$, то $C \in x$. Но $L \vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge C)$ и $L \vdash \neg \bigwedge x$. □

Конечная каноническая модель (для L и A_0

Теорема (ПОКШ для некоторых логик L)

Для некоторых логик L будет доказано: $L \vdash A \iff L \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A$.

Конечная каноническая модель (для L и A_0

Теорема (ПОКШ для некоторых логик L)

Для некоторых логик L будет доказано: $L \vdash A \iff L \models^{\mathsf{fin}}_{\mathsf{Fr}} A$.

Доказательство. Для $A_0 \notin L$ берем $\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' := \ \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Конечная каноническая модель (для L и A_0

Теорема (ПОКШ для некоторых логик L)

Для некоторых логик L будет доказано: $L \vdash A \iff L \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A.$

Доказательство. Для $A_0 \notin L$ берем $\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' := \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Определение (Для логики L и формулы $A_0 \notin L$)

Конечная каноническая шкала $F_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ)$ и модель $M_L^\circ = (F_L^\circ, V_L^\circ)$:

- $W_L^\circ = \{x \subseteq \Gamma' \mid x$ есть L-м.н.м.$\}$;

Конечная каноническая модель (для L и A_0

Теорема (ПОКШ для некоторых логик L)

Для некоторых логик L будет доказано: $L \vdash A \iff L \models^{\mathsf{fin}}_{\mathsf{Fr}} A.$

Доказательство. Для $A_0 \notin L$ берем $\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' := \ \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Определение (Для логики L и формулы $A_0 \notin L$)

Конечная каноническая шкала $F^\circ_L = (W^\circ_L, R^\circ_L)$ и модель $M^\circ_L = (F^\circ_L, V^\circ_L)$:

- $W^\circ_L = \{x \subseteq \Gamma' \mid \ x$ есть L-м.н.м.$\}$;
- оценка V°_L задана так, что $x \models p \Leftrightarrow p \in x$, для $p \in \mathrm{Var}(A_0)$;

Конечная каноническая модель (для L и A_0

Теорема (ПОКШ для некоторых логик L)

Для некоторых логик L будет доказано: $L \vdash A \iff L \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A$.

Доказательство. Для $A_0 \notin L$ берем $\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' := \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Определение (Для логики L и формулы $A_0 \notin L$)

Конечная каноническая шкала $F_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ)$ и модель $M_L^\circ = (F_L^\circ, V_L^\circ)$:

- $W_L^\circ = \{x \subseteq \Gamma' \mid x \text{ есть } L\text{-м.н.м.}\}$;
- оценка V_L° задана так, что $x \models p \Leftrightarrow p \in x$, для $p \in \mathrm{Var}(A_0)$;
- отношение R_L° — любое, удовлетворяющее условиям:
  (1) $F_L^\circ \models L$;
  (2) $\forall \Box A \in \Gamma \ \forall x \in W_L^\circ \ \left(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \right)$.

Конечная каноническая модель (для L и A_0

Теорема (ПОКШ для некоторых логик L)

Для некоторых логик L будет доказано: $L \vdash A \iff L \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A.$

Доказательство. Для $A_0 \notin L$ берем $\Gamma := \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' := \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Определение (Для логики L и формулы $A_0 \notin L$)

Конечная каноническая шкала $F_L^\circ = (W_L^\circ, R_L^\circ)$ и модель $M_L^\circ = (F_L^\circ, V_L^\circ)$:

- $W_L^\circ = \{x \subseteq \Gamma' \mid x \text{ есть } L\text{-м.н.м.}\}$;
- оценка V_L° задана так, что $x \models p \Leftrightarrow p \in x$, для $p \in \mathrm{Var}(A_0)$;
- отношение R_L° — любое, удовлетворяющее условиям:
  (1) $F_L^\circ \models L$;
  (2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \left(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \right)$.

Условие (2) — чтобы доказать аналог Леммы о канонической модели.

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$x \models \Box A$

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A$

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff}$

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x$, *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y$$

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \overset{(iii)}{\iff} \Box A \in x.$$

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \overset{(iii)}{\iff} \Box A \in x.$$

$\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики,
$\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции,
$\overset{(iii)}{\iff}$ по условию (2). $\square$

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \overset{(iii)}{\iff} \Box A \in x.$$

$\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики,
$\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции,
$\overset{(iii)}{\iff}$ по условию (2). $\square$

Окончание доказательства ПОКШ: $L \nvdash A_0$

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \overset{(iii)}{\iff} \Box A \in x.$$

$\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики,
$\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции,
$\overset{(iii)}{\iff}$ по условию (2). $\square$

Окончание доказательства ПОКШ: $L \nvdash A_0 \implies \{\neg A_0\}$ является L-непротиворечивым.

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \overset{(iii)}{\iff} \Box A \in x.$$

$\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики,
$\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции,
$\overset{(iii)}{\iff}$ по условию (2). $\square$

Окончание доказательства ПОКШ: $L \nvdash A_0 \implies \{\neg A_0\}$ является L-непротиворечивым. $\implies \neg A_0 \in x$ для некоторого $x \in W_L^\circ$.

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x$, *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \overset{(iii)}{\iff} \Box A \in x.$$

$\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики,
$\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции,
$\overset{(iii)}{\iff}$ по условию (2). $\square$

Окончание доказательства ПОКШ: $L \nvdash A_0 \implies \{\neg A_0\}$ является L-непротиворечивым. $\implies \neg A_0 \in x$ для некоторого $x \in W_L^\circ$. $\implies$ Тогда $M_L^\circ, x \not\models A_0$.

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\bot$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \overset{(iii)}{\iff} \Box A \in x.$$

$\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики,
$\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции,
$\overset{(iii)}{\iff}$ по условию (2). $\square$

Окончание доказательства ПОКШ: $L \nvdash A_0 \implies \{\neg A_0\}$ является L-непротиворечивым. $\implies \neg A_0 \in x$ для некоторого $x \in W_L^\circ$. $\implies$ Тогда $M_L^\circ, x \not\models A_0$. Таким образом, всякая $A_0 \notin L$ опровергнута на некоторой конечной L-шкале: неверно, что $L \models_{\mathrm{Fr}}^{\mathrm{fin}} A$.

Лемма (Ключевая)

$M_L^\circ, x \models A \iff A \in x$, *для всех* $x \in W_L^\circ$ *и формул* $A \in \Gamma$.

Доказательство.

Индукция по A. Для p, $\perp$, $(B \to C)$ легко. Остался $\Box$:

$$x \models \Box A \overset{(i)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ y \models A \overset{(ii)}{\iff} \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \overset{(iii)}{\iff} \Box A \in x.$$

$\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики,
$\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции,
$\overset{(iii)}{\iff}$ по условию (2). $\square$

Окончание доказательства ПОКШ: $L \nvdash A_0 \implies \{\neg A_0\}$ является L-непротиворечивым. $\implies \neg A_0 \in x$ для некоторого $x \in W_L^\circ$. $\implies$ Тогда $M_L^\circ, x \not\models A_0$. Таким образом, всякая $A_0 \notin L$ опровергнута на некоторой конечной L-шкале: неверно, что $L \models^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{Fr}} A$.

Итак, как задавать R_L° для разных логик?

K-правило

Лемма

Всякая нормальная логика $L \supseteq \mathbf{K}$ *замкнута отн. правила:*

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

K-правило

Лемма

Всякая нормальная логика $L \supseteq \mathbf{K}$ *замкнута отн. правила:*

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

Доказательство.

$L \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$.

$\mathbf{K}$-правило

Лемма

Всякая нормальная логика $L \supseteq \mathbf{K}$ *замкнута отн. правила:*

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

Доказательство.

$L \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A)$.

K-правило

Лемма

Всякая нормальная логика $L \supseteq \mathbf{K}$ *замкнута отн. правила:*

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

Доказательство.

$L \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A)$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to \Box A$.

$\mathbf{K}$-правило

Лемма

Всякая нормальная логика $L \supseteq \mathbf{K}$ замкнута отн. правила:

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

Доказательство.

$L \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A)$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to \Box A$.
но $\mathbf{K} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$.

$\mathbf{K}$-правило

Лемма

Всякая нормальная логика $L \supseteq \mathbf{K}$ *замкнута отн. правила:*

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

Доказательство.

$L \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A)$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to \Box A$.
но $\mathbf{K} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$.
$L \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$. $\Box$

$\mathbf{K}$-правило

Лемма

Всякая нормальная логика $L \supseteq \mathbf{K}$ *замкнута отн. правила:*

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

Доказательство.

$L \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A)$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to \Box A$.
но $\mathbf{K} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$.
$L \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$. $\Box$

Видна аналогия с правилом секвенциального исчисления для $\mathbf{K}$:

$$\frac{B_1, \ldots, B_n \;\Rightarrow\; A}{\Box B_1, \ldots, \Box B_n \Rightarrow \Box A}$$

$\mathbf{K}$-правило

Лемма

Всякая нормальная логика $L \supseteq \mathbf{K}$ замкнута отн. правила:

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

Доказательство.

$L \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A)$.
$L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to \Box A$.
но $\mathbf{K} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$.
$L \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$. $\Box$

Видна аналогия с правилом секвенциального исчисления для $\mathbf{K}$:

$$\frac{B_1, \ldots, B_n \;\Rightarrow\; A}{\Box B_1, \ldots, \Box B_n \Rightarrow \Box A} \quad \text{или более кратко:} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$$

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Логика **K**:

$$x \, R^\circ_{\mathbf{K}} \, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma \, (\Box B \in x \; \Rightarrow \; B \in y)$$

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\,\big)$.

Логика **K**:

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B \in y\,)$$

Обозначая $\sharp x := \{A \mid \Box A \in x\}$, можно переписать так:

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \sharp x \subseteq y.$$

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\,\big)$.

Логика **K**:

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B \in y\,)$$

Обозначая $\sharp x := \{A \mid \Box A \in x\}$, можно переписать так:

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \sharp x \subseteq y.$$

(1) выполнено автоматически.

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\ \big)$.

Логика **K**:

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\,\Box B \in x \ \Rightarrow\ B \in y\,)$$

Обозначая $\sharp x := \{A \mid \Box A \in x\}$, можно переписать так:

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \sharp x \subseteq y.$$

(1) выполнено автоматически.

(2) ($\Rightarrow$) Если $\Box A \in x$ и $x\, R_K^\circ\, y$,

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Логика **K**:

$$x \, R_{\mathbf{K}}^\circ \, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma \, (\Box B \in x \;\Rightarrow\; B \in y)$$

Обозначая $\sharp x := \{A \mid \Box A \in x\}$, можно переписать так:

$$x \, R_{\mathbf{K}}^\circ \, y \quad \leftrightharpoons \quad \sharp x \subseteq y.$$

(1) выполнено автоматически.

(2) ($\Rightarrow$) Если $\Box A \in x$ и $x \, R_K^\circ \, y$, то $A \in \sharp x$ и $\sharp x \subseteq y$, значит, $A \in y$.

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B \in y\,)$$

Конечная каноническая модель для логики $\mathbf{K}$

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B \in y\,)$$

(2) ($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in \Gamma$, но $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B \in y\,)$$

(2) ($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in \Gamma$, но $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Если докажем, что оно **K**-непротиворечиво, то $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W_K^\circ$, и тогда $x\, R_K^\circ\, y$ и $A \notin y$.

Конечная каноническая модель для логики $\mathbf{K}$

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B \in y\,)$$

(2) ($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in \Gamma$, но $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Если докажем, что оно $\mathbf{K}$-непротиворечиво, то $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W_K^\circ$, и тогда $x\, R_K^\circ\, y$ и $A \notin y$. Итак, допустим Y $\mathbf{K}$-противоречив.

Конечная каноническая модель для логики $\mathbf{K}$

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \left(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\right)$.

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\Box B \in x \;\Rightarrow\; B \in y)$$

(2) ($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in \Gamma$, но $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Если докажем, что оно $\mathbf{K}$-непротиворечиво, то $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W_K^\circ$, и тогда $x\, R_K^\circ\, y$ и $A \notin y$. Итак, допустим Y $\mathbf{K}$-противоречив.

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Тогда:

Конечная каноническая модель для логики $\mathbf{K}$

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

$$x \, R_{\mathbf{K}}^\circ \, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma \, (\Box B \in x \;\Rightarrow\; B \in y)$$

(2) ($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in \Gamma$, но $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Если докажем, что оно $\mathbf{K}$-непротиворечиво, то $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W_K^\circ$, и тогда $x \, R_K^\circ \, y$ и $A \notin y$. Итак, допустим Y $\mathbf{K}$-противоречив.

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Тогда:
$\mathbf{K} \vdash \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg A)$,

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \;\Rightarrow\; B \in y\,)$$

(2) ($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in \Gamma$, но $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Если докажем, что оно **K**-непротиворечиво, то $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W_K^\circ$, и тогда $x\, R_K^\circ\, y$ и $A \notin y$. Итак, допустим Y **K**-противоречив.

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Тогда:
$\mathbf{K} \vdash \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg A)$,
$\mathbf{K} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$,

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\big)$.

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\Box B \in x \;\Rightarrow\; B \in y)$$

(2) ($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in \Gamma$, но $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Если докажем, что оно **K**-непротиворечиво, то $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W_K^\circ$, и тогда $x\, R_K^\circ\, y$ и $A \notin y$. Итак, допустим Y **K**-противоречив.

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Тогда:
$\mathbf{K} \vdash \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg A)$,
$\mathbf{K} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$,
$\mathbf{K} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$.

Конечная каноническая модель для логики **K**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\ \big)$.

$$x\, R_{\mathbf{K}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B \in y\,)$$

(2) ($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in \Gamma$, но $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Если докажем, что оно **K**-непротиворечиво, то $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W_K^\circ$, и тогда $x\, R_K^\circ\, y$ и $A \notin y$. Итак, допустим Y **K**-противоречив.

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Тогда:
$\mathbf{K} \vdash \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg A)$,
$\mathbf{K} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$,
$\mathbf{K} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$.
Поскольку все $\Box B_i \in x$, то $\Box A \in x$. Противоречие.

Конечная каноническая модель для логики **K4**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\ \big)$.

Конечная каноническая модель для логики **K4**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

Конечная каноническая модель для логики K4

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ \ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{K4}}\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma \,(\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B, \Box B \in y\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\ \big).$

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{K4}}\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\,\Box B \in x \ \Rightarrow\ B, \Box B \in y\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) Транзитивность: пусть $x\, R\, y\, R\, z$.

Конечная каноническая модель для логики **K4**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \;\; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x \, R^\circ_{\mathbf{K4}} \, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma \, (\, \Box B \in x \; \Rightarrow \; B, \Box B \in y \,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) Транзитивность: пусть $x \, R \, y \, R \, z$.
Тогда $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq \sharp z$.

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \;\; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \,\big)$.

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x \, R_{\mathbf{K4}}^\circ \, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma \, (\, \Box B \in x \;\Rightarrow\; B, \Box B \in y \,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) Транзитивность: пусть $x \, R \, y \, R \, z$.
Тогда $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq \sharp z$. значит, $x \, R \, z$.

Конечная каноническая модель для логики **K4**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\ \big)$.

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{K4}}\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B, \Box B \in y\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) Транзитивность: пусть $x\, R\, y\, R\, z$.
Тогда $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq \sharp z$. значит, $x\, R\, z$.

(2) $(\Leftarrow)$ Строим Y так:

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} \ \subseteq\ \Gamma'.$$

Конечная каноническая модель для логики **K4**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \;\; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x \, R^\circ_{\mathbf{K4}} \, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma \, (\, \Box B \in x \; \Rightarrow \; B, \Box B \in y \,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) Транзитивность: пусть $x \, R \, y \, R \, z$.
Тогда $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq \sharp z$. значит, $x \, R \, z$.

(2) ($\Leftarrow$) Строим Y так:

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

$\mathbf{K4} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to A$.

Конечная каноническая модель для логики **K4**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big).$

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x\, R_{\mathbf{K4}}^\circ\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B, \Box B \in y\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) Транзитивность: пусть $x\, R\, y\, R\, z$.
Тогда $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq \sharp z$. значит, $x\, R\, z$.

(2) $(\Leftarrow)$ Строим Y так:

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

$\mathbf{K4} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to A.$
$\mathbf{K4} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_n \to \Box A.$

Конечная каноническая модель для логики **K4**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{K4}}\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \;\Rightarrow\; B, \Box B \in y\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) Транзитивность: пусть $x\, R\, y\, R\, z$.
Тогда $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq \sharp z$. значит, $x\, R\, z$.

(2) $(\Leftarrow)$ Строим Y так:

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

$\mathbf{K4} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to A$.
$\mathbf{K4} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_n \to \Box A$.
Но $\mathbf{K4} \vdash \Box B_i \to \Box\Box B_i$, поэтому

Конечная каноническая модель для логики **K4**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **K4** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ (логика транзитивных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{K4}}\, y \quad \leftrightharpoons \quad \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \ \Rightarrow\ B, \Box B \in y\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

(1) Транзитивность: пусть $x\, R\, y\, R\, z$.
Тогда $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq \sharp z$. значит, $x\, R\, z$.

(2) $(\Leftarrow)$ Строим Y так:

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

$\mathbf{K4} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to A$.
$\mathbf{K4} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_n \to \Box A$.
Но $\mathbf{K4} \vdash \Box B_i \to \Box\Box B_i$, поэтому
$\mathbf{K4} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$.

Конечная каноническая модель для логики **KB**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Конечная каноническая модель для логики **KB**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\ \big)$.

Логика **KB** $= \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ (логика симметричных шкал):

Конечная каноническая модель для логики **KB**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **KB** $= \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ (логика симметричных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{KB}}\, y \ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\, (\, \Box C \in y \Rightarrow C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq x$.

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\, \big)$.

Логика **KB** $= \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ (логика симметричных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{KB}}\, y \ \ \leftrightharpoons\ \ \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\, (\, \Box C \in y \Rightarrow C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq x$.

(1) Симметричность очевидна.

Конечная каноническая модель для логики **KB**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\,\big)$.

Логика **KB** $= \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ (логика симметричных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{KB}}\, y \ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\, (\,\Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\, (\,\Box C \in y \Rightarrow C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq x$.

(1) Симметричность очевидна.

(2) Строим множество:

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg C \in x \text{ и } \Box C \in \Gamma\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

Конечная каноническая модель для логики **KB**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \left(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \right)$.

Логика **KB** $= \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ (логика симметричных шкал):

$$x \, R^\circ_{\mathbf{KB}} \, y \;\leftrightharpoons\; \forall B \in \Gamma \, (\Box B \in x \Rightarrow B \in y) \;\&\; \forall C \in \Gamma \, (\Box C \in y \Rightarrow C \in x)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq x$.

(1) Симметричность очевидна.

(2) Строим множество:

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg C \in x \text{ и } \Box C \in \Gamma\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

$\mathbf{KB} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A$.

Конечная каноническая модель для логики **KB**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **KB** $= \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ (логика симметричных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{KB}}\, y \ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\, (\, \Box C \in y \Rightarrow C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq x$.

(1) Симметричность очевидна.

(2) Строим множество:

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg C \in x \text{ и } \Box C \in \Gamma\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

$\mathbf{KB} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A.$
$\mathbf{KB} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg\Box C_m \to \Box A.$

Конечная каноническая модель для логики KB

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\ \big)$.

Логика **KB** $= \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ (логика симметричных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{KB}}\, y \ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\, (\,\Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\, (\,\Box C \in y \Rightarrow C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq x$.

(1) Симметричность очевидна.

(2) Строим множество:

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg C \in x \text{ и } \Box C \in \Gamma\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

$\mathbf{KB} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A$.
$\mathbf{KB} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg\Box C_m \to \Box A$.
Но $\mathbf{KB} \vdash \neg C_j \to \Box\neg\Box C_j$, поэтому

Конечная каноническая модель для логики **KB**

(1) $F_L^\circ \models L$;
(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\,\big)$.

Логика **KB** $= \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ (логика симметричных шкал):

$$x\, R^\circ_{\mathbf{KB}}\, y \ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\,(\,\Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\,(\,\Box C \in y \Rightarrow C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq x$.

(1) Симметричность очевидна.

(2) Строим множество:

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg C \in x \text{ и } \Box C \in \Gamma\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

KB $\vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A$.
KB $\vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg\Box C_m \to \Box A$.
Но **KB** $\vdash \neg C_j \to \Box\neg\Box C_j$, поэтому
KB $\vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg C_1 \wedge \ldots \wedge \neg C_m \to \Box A$.

Конечная каноническая модель для логики **K5** (?)

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Конечная каноническая модель для логики **K5** (?)

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Логика **K5** $= \mathbf{K} \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ (логика евклидовых шкал):
$x\,R\,y \;\&\; x\,R\,z \;\Rightarrow\; y\,R\,z$.

Конечная каноническая модель для логики **K5** (?)

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \ \forall x \in W_L^\circ \ \ \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \ \big)$.

Логика **K5** $= \mathbf{K} \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ (логика евклидовых шкал):
$x\,R\,y \,\&\, x\,R\,z \ \Rightarrow\ y\,R\,z$.
Кандидат на отношение в конечной канонической модели:

$$x\,R^\circ_{\mathbf{K5}}\,y \ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\,(\,\Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\,(\,\Box C \in y \Rightarrow \Box C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq \sharp x$.

Конечная каноническая модель для логики **K5** (?)

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\, \big).$

Логика **K5** $= \mathbf{K} \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ (логика евклидовых шкал):

$x\, R\, y\ \&\ x\, R\, z\ \Rightarrow\ y\, R\, z$.

Кандидат на отношение в конечной канонической модели:

$$x\, R^\circ_{\mathbf{K5}}\, y\ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\, (\, \Box C \in y \Rightarrow \Box C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq \sharp x$.

(1) Является ли это отношение евклидовым? (неясно)

Конечная каноническая модель для логики **K5** (?)

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\, \big)$.

Логика **K5** $= \mathbf{K} \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ (логика евклидовых шкал):
$x\,R\,y\ \&\ x\,R\,z\ \Rightarrow\ y\,R\,z$.
Кандидат на отношение в конечной канонической модели:

$$x\,R^\circ_{\mathbf{K5}}\,y\ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\,(\,\Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\,(\,\Box C \in y \Rightarrow \Box C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq \sharp x$.

(1) Является ли это отношение евклидовым? (неясно)

(2) Далее всё сходится, если рассмотреть

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\}\ \cup\ \{\neg\Box C \mid \neg\Box C \in x\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

Конечная каноническая модель для логики **K5** (?)

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Логика **K5** $= \mathbf{K} \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ (логика евклидовых шкал):
$x \, R \, y \;\&\; x \, R \, z \;\Rightarrow\; y \, R \, z$.
Кандидат на отношение в конечной канонической модели:

$$x \, R^\circ_{\mathbf{K5}} \, y \;\leftrightharpoons\; \forall B \in \Gamma \, (\Box B \in x \Rightarrow B \in y) \;\&\; \forall C \in \Gamma \, (\Box C \in y \Rightarrow \Box C \in x)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq \sharp x$.

(1) Является ли это отношение евклидовым? (неясно)

(2) Далее всё сходится, если рассмотреть

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \;\cup\; \{\neg\Box C \mid \neg\Box C \in x\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

Чтобы сошлось и в (1), вероятно, нужно расширить Γ' (см. ниже).

Конечная каноническая модель для логики **K5** (?)

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **K5** $= \mathbf{K} \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ (логика евклидовых шкал):
$x\,R\,y\ \&\ x\,R\,z\ \Rightarrow\ y\,R\,z$.
Кандидат на отношение в конечной канонической модели:

$$x\,R^\circ_{\mathbf{K5}}\,y\ \leftrightharpoons\ \forall B \in \Gamma\,(\,\Box B \in x \Rightarrow B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\,(\,\Box C \in y \Rightarrow \Box C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq \sharp x$.

(1) Является ли это отношение евклидовым? (неясно)

(2) Далее всё сходится, если рассмотреть

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\}\ \cup\ \{\neg\Box C \mid \neg\Box C \in x\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

Чтобы сошлось и в (1), вероятно, нужно расширить Γ' (см. ниже).
Но Лемму $x \models A \Leftrightarrow A \in x$ доказывать по-прежнему для $A \in \Gamma$.

Конечная каноническая модель для логики **K45**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \; \big(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \big)$.

Конечная каноническая модель для логики **K45**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \; \forall x \in W_L^\circ \;\; \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \; A \in y \,\big)$.

Логика **K45** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$
(логика транзитивных евклидовых шкал): отношение $x \, R^\circ_{\mathbf{K45}} \, y$:

$$\forall B \in \Gamma \, (\, \Box B \in x \Rightarrow B, \Box B \in y \,) \; \& \; \forall C \in \Gamma \, (\, \Box C \in y \Rightarrow \Box C \in x \,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x = \sharp y$.

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **K45** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$
(логика транзитивных евклидовых шкал): отношение $x\, R^\circ_{\mathbf{K45}}\, y$:

$$\forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \Rightarrow B, \Box B \in y\,)\ \&\ \forall C \in \Gamma\, (\, \Box C \in y \Rightarrow \Box C \in x\,)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x = \sharp y$.

(1) Это отношение — транзитивно и евклидово!

Конечная каноническая модель для логики **K45**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma \ \forall x \in W_L^\circ \ \left(\Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x) \ A \in y \right)$.

Логика **K45** $= \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$
(логика транзитивных евклидовых шкал): отношение $x \, R^\circ_{\mathbf{K45}} \, y$:

$$\forall B \in \Gamma \, (\Box B \in x \Rightarrow B, \Box B \in y) \;\&\; \forall C \in \Gamma \, (\Box C \in y \Rightarrow \Box C \in x)$$

То есть: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x = \sharp y$.

(1) Это отношение — транзитивно и евклидово!

(2) Далее всё сходится, если рассмотреть

$$Y = \{ B \mid \Box B \in x \} \ \cup \ \{ \neg\Box C \mid \neg\Box C \in x \} \cup \{ \neg A \} \ \subseteq \ \Gamma'.$$

Для каких еще логик работает ККМ?

Эта же конструкция работает для таких логик:

Для каких еще логик работает ККМ?

Эта же конструкция работает для таких логик:

- для $\mathbf{KB4} = \mathbf{KB5} = \mathbf{KB45}$,

Для каких еще логик работает ККМ?

Эта же конструкция работает для таких логик:

- для **KB4** $=$ **KB5** $=$ **KB45**,
- для сериальных логик **KD**, **KDB**, **KD4**, **KD5**, **KD5**: можно просто добавить формулу $\Box\bot$ в Γ;

Для каких еще логик работает ККМ?

Эта же конструкция работает для таких логик:

- для **KB4** = **KB5** = **KB45**,
- для сериальных логик **KD**, **KDB**, **KD4**, **KD5**, **KD5**: можно просто добавить формулу $\Box\bot$ в Γ;
- для **S5** (шкалы с отношением эквивалентности).

Для каких еще логик работает ККМ?

Эта же конструкция работает для таких логик:

- для $\mathbf{KB4} = \mathbf{KB5} = \mathbf{KB45}$,
- для сериальных логик **KD**, **KDB**, **KD4**, **KD5**, **KD5**:
  можно просто добавить формулу $\Box\bot$ в Γ;
- для **S5** (шкалы с отношением эквивалентности).
- для **GL** (конечные шкалы — иррефлексивные транзитивные).

Для каких еще логик работает ККМ?

Эта же конструкция работает для таких логик:

- для $\mathbf{KB4} = \mathbf{KB5} = \mathbf{KB45}$,
- для сериальных логик **KD**, **KDB**, **KD4**, **KD5**, **KD5**: можно просто добавить формулу $\Box\bot$ в Γ;
- для **S5** (шкалы с отношением эквивалентности).
- для **GL** (конечные шкалы — иррефлексивные транзитивные).
- для **Grz** — с небольшим трюком.

Конечная каноническая модель для логики **Grz**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Конечная каноническая модель для логики **Grz**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ \ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **Grz** $= \mathbf{K} \ \oplus\ \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$

Конечная каноническая модель для логики **Grz**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y\ \big)$.

Логика **Grz** $= \mathbf{K} \oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$

Ее конечные шкалы — рефлексивные транзитивные антисимметричные $(x\,R\,y\ \&\ y\,R\,x\ \Rightarrow\ x = y)$.

Конечная каноническая модель для логики **Grz**

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **Grz** $= \mathbf{K} \oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$

Ее конечные шкалы — рефлексивные транзитивные антисимметричные $(x\,R\,y \;\&\; y\,R\,x \;\Rightarrow\; x = y)$.

Трюк: модифицируем множества Γ'. Положим $\Gamma = \mathrm{Sub}(A_0)$ и

$$\Gamma' \;=\; \Gamma \;\cup\; \mathrm{Sub}\{\Box(A \to \Box A) \mid \Box A \in \Gamma\} \cup \{\text{отрицания этих формул}\}.$$

(1) $F_L^\circ \models L$;

(2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_L^\circ\ \ \big(\, \Box A \in x \iff \forall y \in R_L^\circ(x)\ A \in y \,\big)$.

Логика **Grz** $= \mathbf{K} \oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$

Ее конечные шкалы — рефлексивные транзитивные антисимметричные ($x\,R\,y\ \&\ y\,R\,x \ \Rightarrow\ x = y$).

Трюк: модифицируем множества Γ'. Положим $\Gamma = \mathrm{Sub}(A_0)$ и

$$\Gamma' \;=\; \Gamma \;\cup\; \mathrm{Sub}\{\Box(A \to \Box A) \mid \Box A \in \Gamma\} \cup \{\text{отрицания этих формул}\}.$$

Однако Ключевую лемму доказываем по-прежнему для формул из Γ. В частности, условие (2) проверяется по-прежнему для $\Box A \in \Gamma$.

Exponential model property

Лемма

Пусть для логики L работает вышеприведенная конструкция для $\Gamma = \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Exponential model property

Лемма

Пусть для логики L работает вышеприведенная конструкция для $\Gamma = \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Тогда L обладает свойством ExpMP: всякая невыводимая формула $A \notin L$ длины $|A| = n$ опровергается на L-шкале размера $\leqslant 2^{q(n)}$.

Exponential model property

Лемма

Пусть для логики L *работает вышеприведенная конструкция для* $\Gamma = \mathrm{Sub}(A_0)$ *и* $\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Тогда L *обладает свойством ExpMP: всякая невыводимая формула* $A \notin L$ *длины* $|A| = n$ *опровергается на* L*-шкале размера* $\leqslant 2^{q(n)}$.

Следовательно, проблема выполнимости модальных формул на классе L*-шкал лежит в сложностном классе* $\mathrm{NExpTime}$.

Exponential model property

Лемма

Пусть для логики L работает вышеприведенная конструкция для $\Gamma = \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Тогда L обладает свойством ExpMP: всякая невыводимая формула $A \notin L$ длины $|A| = n$ опровергается на L-шкале размера $\leqslant 2^{q(n)}$.

Следовательно, проблема выполнимости модальных формул на классе L-шкал лежит в сложностном классе $\mathrm{NE{\scriptsize XP}T{\scriptsize IME}}$.

Доказательство.

Если $A \notin L$, то заведомо найдется контрмодель (а именно, KKM) для A размера $\leqslant 2^{2\cdot|A|}$.

Exponential model property

Лемма

Пусть для логики L работает вышеприведенная конструкция для $\Gamma = \mathrm{Sub}(A_0)$ и $\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma$.

Тогда L обладает свойством ExpMP: всякая невыводимая формула $A \notin L$ длины $|A| = n$ опровергается на L-шкале размера $\leqslant 2^{q(n)}$.

Следовательно, проблема выполнимости модальных формул на классе L-шкал лежит в сложностном классе $\mathrm{NE{\scriptsize XP}T{\scriptsize IME}}$.

Доказательство.

Если $A \notin L$, то заведомо найдется контрмодель (а именно, ККМ) для A размера $\leqslant 2^{2\cdot|A|}$.
Значит, алгоритм таков: «угадать» экспоненциально большую (от $|A|$) модель над L-шкалой и проверить, что в ней опровергается A. □

Вопросы на размышление

Вопросы на размышление

1. Довести до конца конструкцию для **K5** (если возможно).

Вопросы на размышление

1. Довести до конца конструкцию для **K5** (если возможно).
2. Какова связь с фильтрацией?
   С фильтрацией канонической модели, в частности.

Вопросы на размышление

1. Довести до конца конструкцию для **K5** (если возможно).
2. Какова связь с фильтрацией?
   С фильтрацией канонической модели, в частности.
3. Какова связь с секвенциальными исчислениями?
   С устранимостью сечения в них?

Вопросы на размышление

1. Довести до конца конструкцию для **K5** (если возможно).
2. Какова связь с фильтрацией?
   С фильтрацией канонической модели, в частности.
3. Какова связь с секвенциальными исчислениями?
   С устранимостью сечения в них?

Конец лекции 9. Спасибо за внимание!