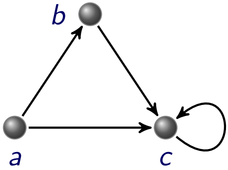
Модальная логика. Лекция 8: Характеристическая формула Янкова — Файна. Критерий ван Бентема модальной определимости классов конечных транзитивных шкал. Теорема об изоморфизме конечных шкал.

Евгений Золин

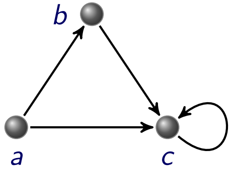
Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

13 ноября 2020 года

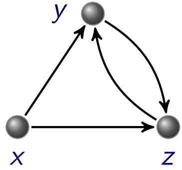
Модальная логика и конечная шкала



Модальная логика и конечная шкала

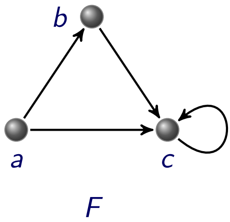


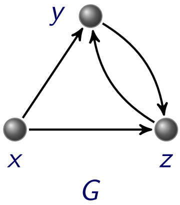
F



G

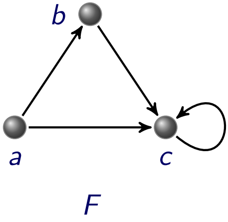
Модальная логика и конечная шкала

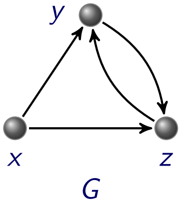




- Являются ли эти шкалы модально эквивалентными: $F \equiv_{\mathrm{ML}} G$?

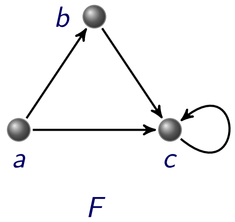
Модальная логика и конечная шкала

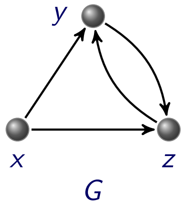




- Являются ли эти шкалы модально эквивалентными: $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$?
  То есть: для всякой модальной формулы A $(F \models A \Leftrightarrow G \models A)$.

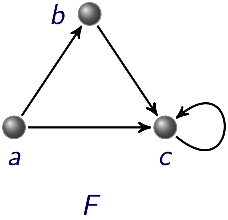
Модальная логика и конечная шкала

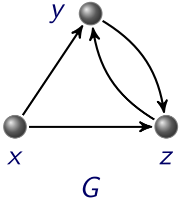




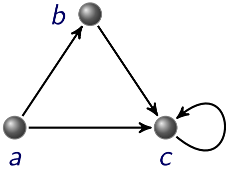
- Являются ли эти шкалы модально эквивалентными: $F \equiv_{\mathrm{ML}} G$?
  То есть: для всякой модальной формулы A $(F \models A \Leftrightarrow G \models A)$.
- Будет ли верно включение $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(G)$? А обратное $\supseteq$?

Модальная логика и конечная шкала

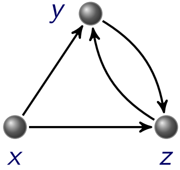




- Являются ли эти шкалы модально эквивалентными: $F \equiv_{\mathrm{ML}} G$?
  То есть: для всякой модальной формулы A $(F \models A \Leftrightarrow G \models A)$.
- Будет ли верно включение $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(G)$? А обратное $\supseteq$?
  Мы будем обозначать это включение $F \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} G$ и $F \sqsupseteq_{\mathrm{ML}} G$, соотв.

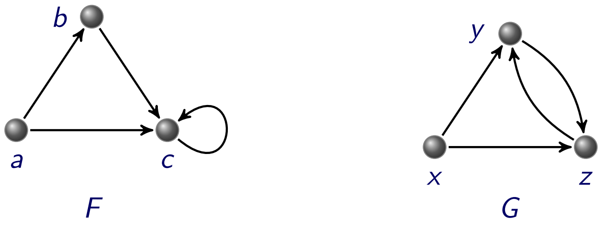


F



G

- Являются ли эти шкалы модально эквивалентными: $F \equiv_{\mathrm{ML}} G$?
  То есть: для всякой модальной формулы A ($F \models A \Leftrightarrow G \models A$).
- Будет ли верно включение $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(G)$? А обратное $\supseteq$?
  Мы будем обозначать это включение $F \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} G$ и $F \sqsupseteq_{\mathrm{ML}} G$, соотв.
- Существует ли алгоритм распознавания по двум конечным шкалам F и G условий $\equiv_{\mathrm{ML}}$ и $\sqsubseteq_{\mathrm{ML}}$?



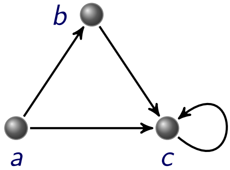
- Являются ли эти шкалы модально эквивалентными: $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$?
То есть: для всякой модальной формулы A $(F \models A \Leftrightarrow G \models A)$.

- Будет ли верно включение $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(G)$? А обратное $\supseteq$?
Мы будем обозначать это включение $F \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} G$ и $F \sqsupseteq_{\mathsf{ML}} G$, соотв.

- Существует ли алгоритм распознавания по двум конечным шкалам F и G условий $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$?

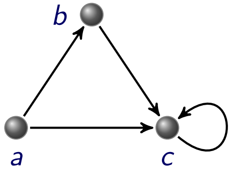
- Если $F \not\equiv_{\mathsf{ML}} G$, то можно ли алгоритмически построить формулу, различающую эти шкалы?

Конечная структура и язык 1-го порядка



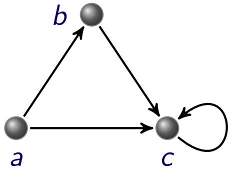
Дан конечный граф $F = (W, R)$, в нашем случае $W = \{a, b, c\}$.

Конечная структура и язык 1-го порядка



Дан конечный граф $F = (W, R)$, в нашем случае $W = \{a, b, c\}$.
Обозначим $A_F = \exists x, y, z\, D_F(x, y, z)$, где D_F — конъюнкция формул:

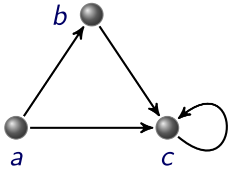
Конечная структура и язык 1-го порядка



Дан конечный граф $F = (W, R)$, в нашем случае $W = \{a, b, c\}$.
Обозначим $A_F = \exists x, y, z\, D_F(x, y, z)$, где D_F — конъюнкция формул:

1. $\forall t\ (t = x \ \vee\ t = y \ \vee\ t = z)$,

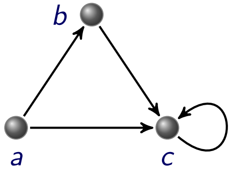
Конечная структура и язык 1-го порядка



Дан конечный граф $F = (W, R)$, в нашем случае $W = \{a, b, c\}$.
Обозначим $A_F = \exists x, y, z\, D_F(x, y, z)$, где D_F — конъюнкция формул:

1. $\forall t\ (t = x \ \vee\ t = y \ \vee\ t = z)$,
2. $x \neq y,\ \ x \neq z,\ \ y \neq z,$

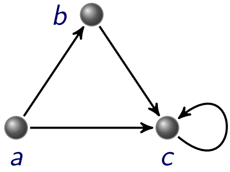
Конечная структура и язык 1-го порядка



Дан конечный граф $F = (W, R)$, в нашем случае $W = \{a, b, c\}$.
Обозначим $A_F = \exists x, y, z\, D_F(x, y, z)$, где D_F — конъюнкция формул:

1. $\forall t\ (t = x\ \vee\ t = y\ \vee\ t = z)$,
2. $x \neq y,\ \ x \neq z,\ \ y \neq z$,
3. $R(x, y),\ \ R(x, z),\ \ R(y, z),\ \ R(z, z)$,

Конечная структура и язык 1-го порядка



Дан конечный граф $F = (W, R)$, в нашем случае $W = \{a, b, c\}$.
Обозначим $A_F = \exists x, y, z\, D_F(x, y, z)$, где D_F — конъюнкция формул:

1. $\forall t\ (t = x \ \vee\ t = y \ \vee\ t = z)$,
2. $x \neq y,\ \ x \neq z,\ \ y \neq z$,
3. $R(x, y),\ \ R(x, z),\ \ R(y, z),\ \ R(z, z)$,
4. $\neg R(y, x),\ \ \neg R(z, x),\ \ \neg R(z, y),\ \ \neg R(y, y),\ \ \neg R(z, z)$.

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$.

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \dots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$. Формула $\Phi_F := \exists x_1, \dots, x_m \; D_F(x_1, \dots, x_m)$, где D_F — диаграмма 1-го порядка графа F — конъюнкция следующих формул:

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$. Формула $\Phi_F := \exists x_1, \ldots, x_m \; D_F(x_1, \ldots, x_m)$, где D_F — диаграмма 1-го порядка графа F — конъюнкция следующих формул:

1. $\forall y \; (y = x_1 \;\vee\; \ldots \;\vee\; y = x_m)$,

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \dots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$. Формула $\Phi_F := \exists x_1, \dots, x_m \; D_F(x_1, \dots, x_m)$, где D_F — диаграмма 1-го порядка графа F — конъюнкция следующих формул:

1. $\forall y \; (y = x_1 \;\vee\; \dots \;\vee\; y = x_m)$,
2. $(x_i \neq x_j)$ для всех пар индексов $i \neq j$,

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \dots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$. Формула $\Phi_F := \exists x_1, \dots, x_m \; D_F(x_1, \dots, x_m)$, где D_F — диаграмма 1-го порядка графа F — конъюнкция следующих формул:

1. $\forall y \; (y = x_1 \;\vee\; \dots \;\vee\; y = x_m)$,
2. $(x_i \neq x_j)$ для всех пар индексов $i \neq j$,
3. $\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$. Формула $\Phi_F := \exists x_1, \ldots, x_m\ D_F(x_1, \ldots, x_m)$, где D_F — диаграмма 1-го порядка графа F — конъюнкция следующих формул:

1. $\forall y\ (y = x_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ y = x_m)$,
2. $(x_i \neq x_j)$ для всех пар индексов $i \neq j$,
3. $\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,
4. $\neg\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \notin R$.

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$. Формула $\Phi_F := \exists x_1, \ldots, x_m \; D_F(x_1, \ldots, x_m)$, где D_F — диаграмма 1-го порядка графа F — конъюнкция следующих формул:

1. $\forall y \; (y = x_1 \;\vee\; \ldots \;\vee\; y = x_m)$,
2. $(x_i \neq x_j)$ для всех пар индексов $i \neq j$,
3. $\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,
4. $\neg\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \notin R$.

Теорема (Сильная категоричность теории конечной структуры)

Для любого графа G имеем: $G \models \Phi_F \iff G \cong F$ *(изоморфизм).*

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \dots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$. Формула $\Phi_F := \exists x_1, \dots, x_m \; D_F(x_1, \dots, x_m)$, где D_F — диаграмма 1-го порядка графа F — конъюнкция следующих формул:

1. $\forall y \; (y = x_1 \;\vee\; \dots \;\vee\; y = x_m)$,
2. $(x_i \neq x_j)$ для всех пар индексов $i \neq j$,
3. $\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,
4. $\neg\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \notin R$.

Теорема (Сильная категоричность теории конечной структуры)

Для любого графа G имеем: $G \models \Phi_F \iff G \cong F$ *(изоморфизм).*

Теорема (Конечная аксиом-сть теории конечной структуры)

Теория 1-го порядка кон. графа F равна: $\mathrm{Theory}_{\mathrm{FO}}(F) \;=\; \text{ИП} + \Phi_F$.

Конечная структура и язык 1-го порядка

Пусть $F = (W, R)$ — конечный граф, $W = \{a_1, \dots, a_m\}$, $R \subseteq W \times W$. Формула $\Phi_F := \exists x_1, \dots, x_m \; D_F(x_1, \dots, x_m)$, где D_F — диаграмма 1-го порядка графа F — конъюнкция следующих формул:

1. $\forall y \; (y = x_1 \;\vee\; \dots \;\vee\; y = x_m)$,
2. $(x_i \neq x_j)$ для всех пар индексов $i \neq j$,
3. $\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,
4. $\neg\mathrm{R}(x_i, x_j)$ для каждой пары $(a_i, a_j) \notin R$.

Теорема (Сильная категоричность теории конечной структуры)

Для любого графа G имеем: $G \models \Phi_F \iff G \cong F$ *(изоморфизм).*

Теорема (Конечная аксиом-сть теории конечной структуры)

Теория 1-го порядка кон. графа F равна: $\mathrm{Theory}_{\mathrm{FO}}(F) \;=\; \text{ИП} + \Phi_F$.

Аналогичной для любой кон. модели 1-го порядка (в кон. сигнатуре).

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \dots, a_m\}$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.
Обозначим $\mathrm{Diagram}_F(p_0, \ldots, p_m)$ конъюнкцию модальных формул:

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.
Обозначим $\mathrm{Diagram}_F(p_0, \ldots, p_m)$ конъюнкцию модальных формул:

1. $(p_0 \vee \ldots \vee p_m)$,

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.
Обозначим $\mathrm{Diagram}_F(p_0, \ldots, p_m)$ конъюнкцию модальных формул:

1. $(p_0 \vee \ldots \vee p_m)$,
2. $\neg(p_i \ \& \ p_j) \quad$ для всех $i \neq j$,

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.
Обозначим $\mathrm{Diagram}_F(p_0, \ldots, p_m)$ конъюнкцию модальных формул:

1. $(p_0 \vee \ldots \vee p_m)$,
2. $\neg(p_i \ \& \ p_j)$ для всех $i \neq j$,
3. $p_i \to \Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.
Обозначим $\mathrm{Diagram}_F(p_0, \ldots, p_m)$ конъюнкцию модальных формул:

1. $(p_0 \vee \ldots \vee p_m)$,
2. $\neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$,
3. $p_i \to \Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,
4. $p_i \to \neg\Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \notin R$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.
Обозначим $\mathrm{Diagram}_F(p_0, \ldots, p_m)$ конъюнкцию модальных формул:

1. $(p_0 \vee \ldots \vee p_m)$,
2. $\neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$,
3. $p_i \to \Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,
4. $p_i \to \neg\Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \notin R$.

При оценке $V(p_i) = \{a_i\}$, очевидно, имеем: $(F, V) \models \mathrm{Diagram}_F$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.
Обозначим $\mathrm{Diagram}_F(p_0, \ldots, p_m)$ конъюнкцию модальных формул:

1. $(p_0 \vee \ldots \vee p_m)$,
2. $\neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$,
3. $p_i \to \Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,
4. $p_i \to \neg\Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \notin R$.

При оценке $V(p_i) = \{a_i\}$, очевидно, имеем: $(F, V) \models \mathrm{Diagram}_F$.

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы G справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F$

$\iff$

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала, где $W = \{a_0, \ldots, a_m\}$.
Введем пропозициональные переменные $p_0, \ldots, p_m$.
Обозначим $\mathrm{Diagram}_F(p_0, \ldots, p_m)$ конъюнкцию модальных формул:

1. $(p_0 \vee \ldots \vee p_m)$,
2. $\neg(p_i \ \& \ p_j)$ для всех $i \neq j$,
3. $p_i \to \Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \in R$,
4. $p_i \to \neg\Diamond p_j$ для каждой пары $(a_i, a_j) \notin R$.

При оценке $V(p_i) = \{a_i\}$, очевидно, имеем: $(F, V) \models \mathrm{Diagram}_F$.

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы G справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем: $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F$*

   $\Longleftrightarrow$

2. *$\exists$ p-морфизм $h\colon G \to F$ (не обязательно сюръективный).*

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \iff$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство $(1) \Rightarrow (2)$. Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \iff$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) ⇒ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \dots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что

$M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем: $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \iff$*
2. *$\exists$ p-морфизм $h\colon G \to F$ (не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \dots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \iff$
2. $\exists$ *p-морфизм $h\colon G \to F$ (не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \dots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство $(1) \Rightarrow (2)$. Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$. Но $M', x \models p_i$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$. Но $M', x \models p_i$. Значит, $M', x \models \Diamond p_j$. Тогда $\exists y \in W'\colon x \, R' \, y$ и $M', y \models p_j$,

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$. Но $M', x \models p_i$. Значит, $M', x \models \Diamond p_j$. Тогда $\exists y \in W'\colon x \, R' \, y$ и $M', y \models p_j$, и $h(y) = a_j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \iff$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h \colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) ⇒ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h \colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$. Но $M', x \models p_i$. Значит, $M', x \models \Diamond p_j$. Тогда $\exists y \in W' \colon x \, R' \, y$ и $M', y \models p_j$, и $h(y) = a_j$.

- (forth) Пусть $x \, R' \, y$ и $h(x) = a_i$, $h(y) = a_j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем: $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$*
2. *$\exists$ p-морфизм $h\colon G \to F$ (не обязательно сюръективный).*

Доказательство $(1) \Rightarrow (2)$. Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$. Но $M', x \models p_i$. Значит, $M', x \models \Diamond p_j$. Тогда $\exists y \in W'\colon x \, R' \, y$ и $M', y \models p_j$, и $h(y) = a_j$.

- (forth) Пусть $x \, R' \, y$ и $h(x) = a_i$, $h(y) = a_j$. Почему $a_i \, R \, a_j$?

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \iff$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i\, R\, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$. Но $M', x \models p_i$. Значит, $M', x \models \Diamond p_j$. Тогда $\exists y \in W'\colon x\, R'\, y$ и $M', y \models p_j$, и $h(y) = a_j$.

- (forth) Пусть $x\, R'\, y$ и $h(x) = a_i$, $h(y) = a_j$. Почему $a_i\, R\, a_j$? Если бы $(a_i, a_j) \notin R$, то $M' \models p_i \to \neg\Diamond p_j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *р-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюрьективный).*

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$. Но $M', x \models p_i$. Значит, $M', x \models \Diamond p_j$. Тогда $\exists y \in W'\colon x \, R' \, y$ и $M', y \models p_j$, и $h(y) = a_j$.

- (forth) Пусть $x \, R' \, y$ и $h(x) = a_i$, $h(y) = a_j$. Почему $a_i \, R \, a_j$?
Если бы $(a_i, a_j) \notin R$, то $M' \models p_i \to \neg\Diamond p_j$.
Но $M' x \models p_i$, $M', y \models p_j$ и $M', x \models \Diamond p_j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) ⇒ (2). Обозначим $M' = (W', R', U)$.

Строим $h\colon W' \to \{a_0, \ldots, a_m\}$ так: $\boxed{h(x) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', x \models p_i}$

- h — всюду определенная функция, ввиду того что $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \mathbin{\&} p_j)$ для всех $i \neq j$.

- (back) Пусть $h(x) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда $M' \models p_i \to \Diamond p_j$. Но $M', x \models p_i$. Значит, $M', x \models \Diamond p_j$. Тогда $\exists y \in W'\colon x \, R' \, y$ и $M', y \models p_j$, и $h(y) = a_j$.

- (forth) Пусть $x \, R' \, y$ и $h(x) = a_i$, $h(y) = a_j$. Почему $a_i \, R \, a_j$? Если бы $(a_i, a_j) \notin R$, то $M' \models p_i \to \neg\Diamond p_j$. Но $M' x \models p_i$, $M', y \models p_j$ и $M', x \models \Diamond p_j$. Значит, $M', x \not\models p_i \to \neg\Diamond p_j$. □

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Leftarrow$ (2).

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем: $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \iff$*
2. *$\exists$ p-морфизм $h\colon G \to F$ (не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Leftarrow$ (2).

Имея $h\colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Leftarrow$ (2).

Имея $h\colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

- Очевидно $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h \colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Leftarrow$ (2).

Имея $h \colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

- Очевидно $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- Пусть $a_i \, R \, a_j$. Почему $M' \models p_i \to \Diamond p_j$?

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство $(1) \Leftarrow (2)$.

Имея $h\colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

- Очевидно $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- Пусть $a_i \, R \, a_j$. Почему $M' \models p_i \to \Diamond p_j$?

Берем любой x. Пусть $M', x \models p_i$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Leftarrow$ (2).

Имея $h\colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

- Очевидно $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- Пусть $a_i \, R \, a_j$. Почему $M' \models p_i \to \Diamond p_j$?

Берем любой x. Пусть $M', x \models p_i$. Тогда $h(x) = a_i$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h \colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Leftarrow$ (2).

Имея $h \colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

- Очевидно $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- Пусть $a_i \, R \, a_j$. Почему $M' \models p_i \to \Diamond p_j$?

Берем любой x. Пусть $M', x \models p_i$. Тогда $h(x) = a_i$.
По (back), $\exists y \colon x \, R' \, y$ и $h(y) = a_j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ *справедлива эквивалентность:*

1. *для некоторой оценки* U *имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство $(1) \Leftarrow (2)$.

Имея $h\colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

- Очевидно $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- Пусть $a_i \, R \, a_j$. Почему $M' \models p_i \to \Diamond p_j$?

Берем любой x. Пусть $M', x \models p_i$. Тогда $h(x) = a_i$.
По (back), $\exists y\colon x \, R' \, y$ и $h(y) = a_j$. Значит $M', y \models p_j$ и $M', x \models \Diamond p_j$.

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюръективный).*

Доказательство (1) $\Leftarrow$ (2).

Имея $h\colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

- Очевидно $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- Пусть $a_i \, R \, a_j$. Почему $M' \models p_i \to \Diamond p_j$?

Берем любой x. Пусть $M', x \models p_i$. Тогда $h(x) = a_i$.
По (back), $\exists y\colon x \, R' \, y$ и $h(y) = a_j$. Значит $M', y \models p_j$ и $M', x \models \Diamond p_j$.

- Пусть $\neg(a_i \, R \, a_j)$. Почему $M' \models p_i \to \neg\Diamond p_j$?

Модальная диаграмма конечной шкалы Крипке

Лемма (О модальной диаграмме)

Для любой шкалы $G = (W', R')$ справедлива эквивалентность:

1. *для некоторой оценки U имеем:* $(G, U) \models \mathrm{Diagram}_F \quad \Longleftrightarrow$
2. $\exists$ *p-морфизм* $h\colon G \to F$ *(не обязательно сюрьективный).*

Доказательство (1) $\Leftarrow$ (2).

Имея $h\colon G \to F$, строим оценку: $\boxed{M', x \models p_i \quad \leftrightharpoons \quad h(x) = a_i}$

- Очевидно $M' \models (p_0 \vee \ldots \vee p_m)$ и $M' \models \neg(p_i \,\&\, p_j)$ для всех $i \neq j$.

- Пусть $a_i \, R \, a_j$. Почему $M' \models p_i \to \Diamond p_j$?

Берем любой x. Пусть $M', x \models p_i$. Тогда $h(x) = a_i$.
По (back), $\exists y\colon x \, R' \, y$ и $h(y) = a_j$. Значит $M', y \models p_j$ и $M', x \models \Diamond p_j$.

- Пусть $\neg(a_i \, R \, a_j)$. Почему $M' \models p_i \to \neg\Diamond p_j$?

Провести рассуждение самостоятельно, используя (forth). $\square$

Субредукция шкал (комбинация $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$)

Определение

Говорим, что шкала F получается субредукцией из шкалы G:

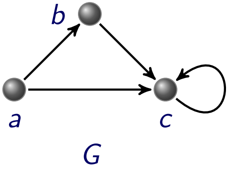
$$G \rightarrowtail F, \quad \text{если для некоторой} \quad G' \hookrightarrow G \quad \text{имеем} \quad G' \twoheadrightarrow F.$$

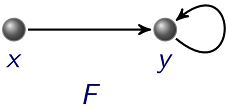
Субредукция шкал (комбинация $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$)

Определение

Говорим, что шкала F получается субредукцией из шкалы G:

$$G \rightarrowtail F, \quad \text{если для некоторой} \quad G' \hookrightarrow G \quad \text{имеем} \quad G' \twoheadrightarrow F.$$





Субредукция шкал (комбинация $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$)

Определение

Говорим, что шкала F получается субредукцией из шкалы G:

$$G \rightarrowtail F, \quad \text{если для некоторой} \quad G' \hookrightarrow G \quad \text{имеем} \quad G' \twoheadrightarrow F.$$

Пример. $G \rightarrowtail F$.

Субредукция шкал (комбинация $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$)

Определение

Говорим, что шкала F получается субредукцией из шкалы G:

$$G \rightarrowtail F, \quad \text{если для некоторой} \quad G' \hookrightarrow G \quad \text{имеем} \quad G' \twoheadrightarrow F.$$

Пример. $G \rightarrowtail F$. Взять $G' = (\{b, c\}, R')$. Тогда $G' \hookrightarrow G$ и $G' \twoheadrightarrow F$.

Субредукция шкал (комбинация $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$)

Определение

Говорим, что шкала F получается субредукцией из шкалы G:

$$G \rightarrowtail F, \quad \text{если для некоторой} \quad G' \hookrightarrow G \quad \text{имеем} \quad G' \twoheadrightarrow F.$$

Пример. $G \rightarrowtail F$. Взять $G' = (\{b, c\}, R')$. Тогда $G' \hookrightarrow G$ и $G' \twoheadrightarrow F$.

Очевидно, условие $G \rightarrowtail F$ — алгоритмически проверяемое.

Субредукция шкал (комбинация $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$)

Определение

Говорим, что шкала F получается субредукцией из шкалы G:

$$G \rightarrowtail F, \text{ если для некоторой } G' \hookrightarrow G \text{ имеем } G' \twoheadrightarrow F.$$

Пример. $G \rightarrowtail F$. Взять $G' = (\{b, c\}, R')$. Тогда $G' \hookrightarrow G$ и $G' \twoheadrightarrow F$.

Очевидно, условие $G \rightarrowtail F$ — алгоритмически проверяемое.
Поскольку $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} G' \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, то верен следующий

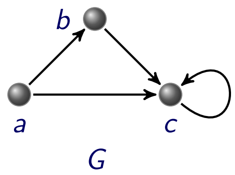
Факт. *Если* $G \rightarrowtail F$, *то* $\mathrm{Logic}(G) \subseteq \mathrm{Logic}(F)$

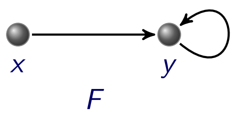
Субредукция шкал (комбинация $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$)

Определение

Говорим, что шкала F получается субредукцией из шкалы G:

$$G \rightarrowtail F, \text{ если для некоторой } G' \hookrightarrow G \text{ имеем } G' \twoheadrightarrow F.$$





Пример. $G \rightarrowtail F$. Взять $G' = (\{b, c\}, R')$. Тогда $G' \hookrightarrow G$ и $G' \twoheadrightarrow F$.

Очевидно, условие $G \rightarrowtail F$ — алгоритмически проверяемое.
Поскольку $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} G' \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, то верен следующий

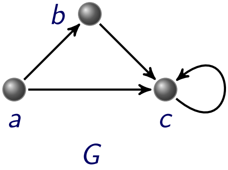
Факт. *Если* $G \rightarrowtail F$, *то* $\mathrm{Logic}(G) \subseteq \mathrm{Logic}(F)$, *то есть* $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$.

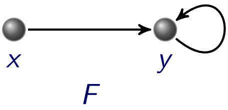
Субредукция шкал (комбинация $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$)

Определение

Говорим, что шкала F получается субредукцией из шкалы G:

$$G \rightarrowtail F, \text{ если для некоторой } G' \hookrightarrow G \text{ имеем } G' \twoheadrightarrow F.$$





Пример. $G \rightarrowtail F$. Взять $G' = (\{b, c\}, R')$. Тогда $G' \hookrightarrow G$ и $G' \twoheadrightarrow F$.

Очевидно, условие $G \rightarrowtail F$ — алгоритмически проверяемое.
Поскольку $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} G' \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, то верен следующий

Факт. *Если* $G \rightarrowtail F$, *то* $\mathrm{Logic}(G) \subseteq \mathrm{Logic}(F)$, *то есть* $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$.

Когда верно обратное?

Характеристические формулы: история

Для конечной шкалы Крипке F строится модальная (или инт.) формула $\chi(F)$.

Семантика	Int	ML $\supseteq$ **K4**
алгебры	Янков (1963)	Rautenberg (1980)
шкалы Крипке	de Jongh (1968)	Fine (1974)

Характеристические формулы: история

Для конечной шкалы Крипке F строится модальная (или инт.) формула $\chi(F)$.

Семантика	Int	ML $\supseteq$ **K4**
алгебры	Янков (1963)	Rautenberg (1980)
шкалы Крипке	de Jongh (1968)	Fine (1974)

Далее были их применения и многочисленные обобщения:
McKenzie, Blok, Zakharyaschev, Kracht, Wolter, N. & G. Bezhanishvili...

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.
Итак, F — конечный транз. конус, a_0 — корень: $W = \{a_0\} \cup R(a_0)$.

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.
Итак, F — конечный транз. конус, a_0 — корень: $W = \{a_0\} \cup R(a_0)$.

Сильная необходимость: $\boxdot A := A \wedge \Box A$.

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.
Итак, F — конечный транз. конус, a_0 — корень: $W = \{a_0\} \cup R(a_0)$.

Сильная необходимость: $\boxdot A := A \wedge \Box A$.
Если M транзитивна и порождена точкой x, то: $M, x \models \boxdot A \Leftrightarrow M \models A$.

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.
Итак, F — конечный транз. конус, a_0 — корень: $W = \{a_0\} \cup R(a_0)$.

Сильная необходимость: $\boxdot A := A \wedge \Box A$.
Если M транзитивна и порождена точкой x, то: $M, x \models \boxdot A \Leftrightarrow M \models A$.

Определение (формула Файна)

Формула описания конечного транзитивного конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}(F, a_0) \ = \ p_0 \ \wedge \ \boxdot\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right)$$

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.
Итак, F — конечный транз. конус, a_0 — корень: $W = \{a_0\} \cup R(a_0)$.

Сильная необходимость: $\boxdot A := A \wedge \Box A$.
Если M транзитивна и порождена точкой x, то: $M, x \models \boxdot A \Leftrightarrow M \models A$.

Определение (формула Файна)

Формула описания конечного транзитивного конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}(F, a_0) \ = \ p_0 \ \wedge \ \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big)$$

$\mathrm{Descr}(F, a_0)$ выполнима в шкале F (в точке a_0) — при $V(p_i) = \{a_i\}$.

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.
Итак, F — конечный транз. конус, a_0 — корень: $W = \{a_0\} \cup R(a_0)$.

Сильная необходимость: $\boxdot A := A \wedge \Box A$.
Если M транзитивна и порождена точкой x, то: $M, x \models \boxdot A \Leftrightarrow M \models A$.

Определение (формула Файна)

Формула описания конечного транзитивного конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}(F, a_0) \;=\; p_0 \;\wedge\; \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big)$$

$\mathrm{Descr}(F, a_0)$ выполнима в шкале F (в точке a_0) — при $V(p_i) = \{a_i\}$.

Определение (формула Янкова – Файна)

Хар. формула конечного транзитивного конуса (F, a_0):

$$\chi(F, a_0) \;=\; \neg\mathrm{Descr}(F, a_0)$$

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.
Итак, F — конечный транз. конус, a_0 — корень: $W = \{a_0\} \cup R(a_0)$.

Сильная необходимость: $\boxdot A := A \wedge \Box A$.
Если M транзитивна и порождена точкой x, то: $M, x \models \boxdot A \Leftrightarrow M \models A$.

Определение (формула Файна)

Формула описания конечного транзитивного конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}(F, a_0) \;=\; p_0 \;\wedge\; \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big)$$

$\mathrm{Descr}(F, a_0)$ выполнима в шкале F (в точке a_0) — при $V(p_i) = \{a_i\}$.

Определение (формула Янкова – Файна)

Хар. формула конечного транзитивного конуса (F, a_0):

$$\chi(F, a_0) \;=\; \neg\mathrm{Descr}(F, a_0) \;=\; \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big) \;\to \neg p_0$$

Характ. формула конечного транзитивного конуса

Шкала $F = (W, R)$ — конечна, транзитивна и порождена точкой a_0.
Итак, F — конечный транз. конус, a_0 — корень: $W = \{a_0\} \cup R(a_0)$.

Сильная необходимость: $\boxdot A := A \wedge \Box A$.
Если M транзитивна и порождена точкой x, то: $M, x \models \boxdot A \Leftrightarrow M \models A$.

Определение (формула Файна)

Формула описания конечного транзитивного конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}(F, a_0) \;=\; p_0 \;\wedge\; \boxdot\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right)$$

$\mathrm{Descr}(F, a_0)$ выполнима в шкале F (в точке a_0) — при $V(p_i) = \{a_i\}$.

Определение (формула Янкова – Файна)

Хар. формула конечного транзитивного конуса (F, a_0):

$$\chi(F, a_0) \;=\; \neg\mathrm{Descr}(F, a_0) \;\;=\; \boxdot\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right) \;\to \neg p_0$$

Таким образом, $F \not\models \chi(F, a_0)$.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$;

Теорема о характеристической формуле

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

(1) $G \rightarrowtail F$,

(2) $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$,

(3) $G \not\models \chi(F)$.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

(1) $G \rightarrowtail F$,

(2) $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$,

(3) $G \not\models \chi(F)$.

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Обосновано ранее.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

(1) $G \rightarrowtail F$,

(2) $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$,

(3) $G \not\models \chi(F)$.

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Обосновано ранее.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$.
То есть для всякой формулы A ($G \models A \Rightarrow F \models A$).

Теорема о характеристической формуле

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F,$$
$$\textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F,$$
$$\textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) Обосновано ранее.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$.
То есть для всякой формулы A ($G \models A \Rightarrow F \models A$).
Если бы $G \models \chi(F)$, то и $F \models \chi(F)$, что не так.

$\square$

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1).

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$.
Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) ⇒ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Пorожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \ \models \ p_0 \ \wedge \ \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big).$$

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \ \models \ p_0 \ \wedge \ \boxdot\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \models p_0 \wedge \boxdot\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает р-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) ⇒ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \ \models\ p_0 \ \wedge\ \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает р-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$. Осталось выяснить, почему h — сюръекция?

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \models p_0 \wedge \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает р-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$. Осталось выяснить, почему h — сюръекция?

- Ищем прообраз точки $a = a_0$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) ⇒ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \ \models \ p_0 \ \wedge \ \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает р-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$. Осталось выяснить, почему h — сюръекция?

- Ищем прообраз точки $a = a_0$. Очевидно, $h(b) = a_0$, ибо $N, b \models p_0$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \models p_0 \wedge \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает p-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$. Осталось выяснить, почему h — сюръекция?

- Ищем прообраз точки $a = a_0$. Очевидно, $h(b) = a_0$, ибо $N, b \models p_0$.
- Ищем прообраз точки $a_i \in F$, где $i > 0$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) ⇒ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \models p_0 \wedge \boxdot\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает р-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$. Осталось выяснить, почему h — сюръекция?

- Ищем прообраз точки $a = a_0$. Очевидно, $h(b) = a_0$, ибо $N, b \models p_0$.

- Ищем прообраз точки $a_i \in F$, где $i > 0$. Поскольку a_0 — корень F, то $a_0\, R\, a_i$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) ⇒ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \ \models\ p_0 \ \wedge\ \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает р-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$. Осталось выяснить, почему h — сюръекция?

- Ищем прообраз точки $a = a_0$. Очевидно, $h(b) = a_0$, ибо $N, b \models p_0$.

- Ищем прообраз точки $a_i \in F$, где $i > 0$. Поскольку a_0 — корень F, то $a_0\, R\, a_i$. Тогда в $\mathrm{Diagram}_F$ есть $p_0 \to \Diamond p_i$. Значит, $N, b \models p_0 \to \Diamond p_i$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) ⇒ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \models p_0 \wedge \boxdot\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает р-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$. Осталось выяснить, почему h — сюръекция?

- Ищем прообраз точки $a = a_0$. Очевидно, $h(b) = a_0$, ибо $N, b \models p_0$.

- Ищем прообраз точки $a_i \in F$, где $i > 0$. Поскольку a_0 — корень F, то $a_0\, R\, a_i$. Тогда в $\mathrm{Diagram}_F$ есть $p_0 \to \Diamond p_i$. Значит, $N, b \models p_0 \to \Diamond p_i$. Тогда $\exists y \in G'$ такая, что $x\, R'\, y$ и $N, y \models p_i$.

Теорема 1 (для транзитивных шкал)

Пусть F — конечный транзитивный конус с корнем a, $\chi(F) := \chi(F, a)$; и G — транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi(F).$$

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть $G \not\models \chi(F)$. Значит, $\mathrm{Descr}(F)$ выполнима в некоторой $b \in G$. Порожд. точкой b подшкала: $G' \hookrightarrow G$. Итак, $\exists$ модель $N = (G', U)$:

$$N, b \ \models\ p_0 \ \wedge\ \boxdot\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big).$$

Значит, $N \models \mathrm{Diagram}_F$. Вспомним: это дает р-морфизм $h\colon G' \to F$: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$. Осталось выяснить, почему h — сюръекция?

- Ищем прообраз точки $a = a_0$. Очевидно, $h(b) = a_0$, ибо $N, b \models p_0$.

- Ищем прообраз точки $a_i \in F$, где $i > 0$. Поскольку a_0 — корень F, то $a_0\, R\, a_i$. Тогда в $\mathrm{Diagram}_F$ есть $p_0 \to \Diamond p_i$. Значит, $N, b \models p_0 \to \Diamond p_i$. Тогда $\exists y \in G'$ такая, что $x\, R'\, y$ и $N, y \models p_i$. Значит, $h(y) = a_i$. $\square$

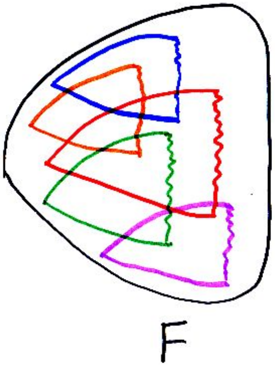
Лемма о накрытии

Лемма (о накрытии)

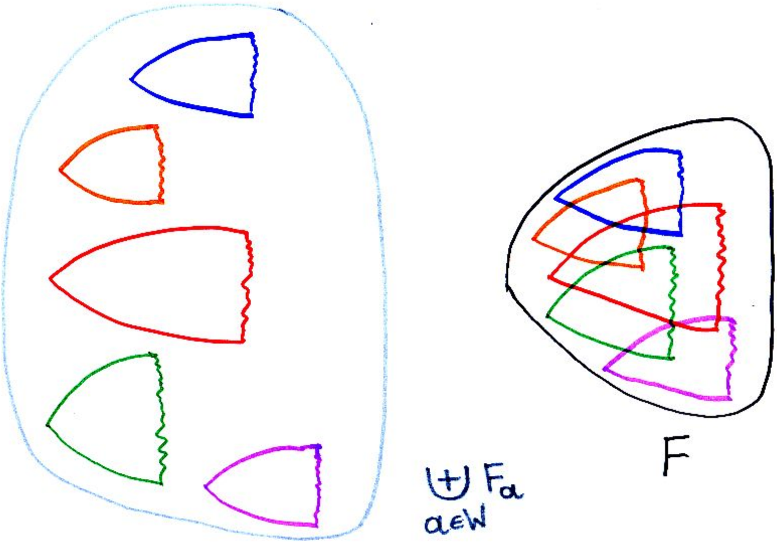
Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы всех своих подшкал, порожденных одной точкой (конусов):

$$\left(\biguplus_{a \in W} F_a \right) \twoheadrightarrow F.$$

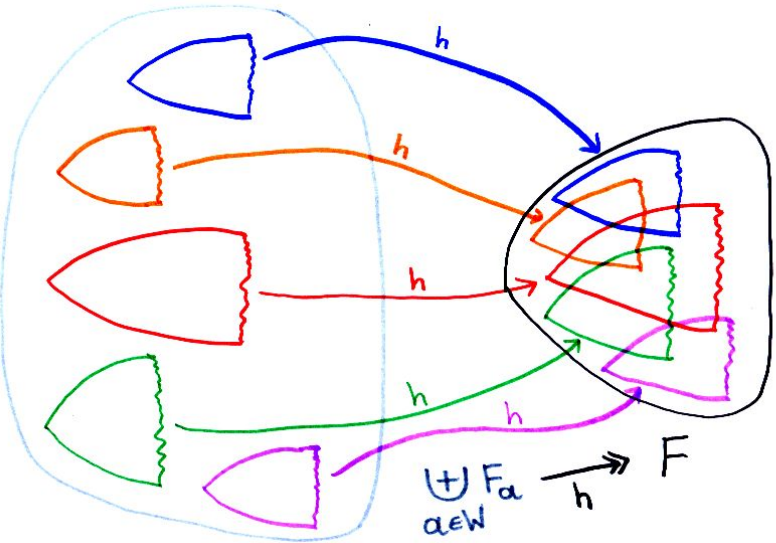
Лемма о накрытии



Лемма о накрытии



Лемма о накрытии



Лемма о накрытии

Лемма (о накрытии)

Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы всех своих подшкал, порожденных одной точкой (конусов):

$$\left(\biguplus_{a \in W} F_a \right) \twoheadrightarrow F.$$

Лемма о накрытии

Лемма (о накрытии)

Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы всех своих подшкал, порожденных одной точкой (конусов):

$$\Big(\biguplus_{a\in W} F_a\Big) \twoheadrightarrow F.$$

Доказательство.

Шкала $\biguplus\limits_{a\in W} F_a = (W', R')$ состоит из точек:

$$W' = \bigcup_{a\in I} (\{a\} \times W_a)$$

Лемма о накрытии

Лемма (о накрытии)

Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы всех своих подшкал, порожденных одной точкой (конусов):

$$\Big(\biguplus_{a \in W} F_a\Big) \twoheadrightarrow F.$$

Доказательство.

Шкала $\biguplus_{a \in W} F_a = (W', R')$ состоит из точек:

$$W' = \bigcup_{a \in I} (\{a\} \times W_a) = \{\langle a, x\rangle \mid a \in I,\ x \in W_a\}.$$

Лемма о накрытии

Лемма (о накрытии)

Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы всех своих подшкал, порожденных одной точкой (конусов):

$$\left(\biguplus_{a \in W} F_a\right) \twoheadrightarrow F.$$

Доказательство.

Шкала $\biguplus\limits_{a \in W} F_a = (W', R')$ состоит из точек:

$$W' = \bigcup_{a \in I} (\{a\} \times W_a) = \{\langle a, x\rangle \mid a \in I,\ x \in W_a\}.$$

В нашем случае $I = W$.

Лемма о накрытии

Лемма (о накрытии)

Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы всех своих подшкал, порожденных одной точкой (конусов):

$$\left(\biguplus_{a\in W} F_a\right) \twoheadrightarrow F.$$

Доказательство.

Шкала $\biguplus\limits_{a\in W} F_a = (W', R')$ состоит из точек:

$$W' = \bigcup_{a\in I}(\{a\}\times W_a) = \{\langle a,x\rangle \mid a\in I,\ x\in W_a\}.$$

В нашем случае $I = W$. Искомый p-морфизм: $h\colon W' \to W$ есть:

$$h(\langle i,x\rangle) = x.$$

Лемма о накрытии

Лемма (о накрытии)

Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы всех своих подшкал, порожденных одной точкой (конусов):

$$\Big(\biguplus_{a\in W} F_a\Big) \twoheadrightarrow F.$$

Доказательство.

Шкала $\biguplus\limits_{a\in W} F_a = (W', R')$ состоит из точек:

$$W' = \bigcup_{a\in I}(\{a\}\times W_a) = \{\langle a,x\rangle \mid a\in I,\ x\in W_a\}.$$

В нашем случае $I = W$. Искомый p-морфизм: $h\colon W' \to W$ есть:

$$h(\langle i,x\rangle) = x.$$

Проверить, что h — сюръективный p-морфизм (упражнение). □

Модально определимые классы шкал

Определение (Относительная модальная определимость)

Пусть $\mathbb{K}_0$ — некоторый класс шкал. Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$ модально определим в $\mathbb{K}_0$, если $\exists$ множество модальных формул Γ, такое что

$$\text{для всякой шкалы } F \in \mathbb{K}_0 \quad (F \in \mathbb{K} \ \Leftrightarrow\ F \models \Gamma).$$

Класс конечно определим, если Γ можно выбрать конечным.

Модально определимые классы шкал

Определение (Относительная модальная определимость)

Пусть $\mathbb{K}_0$ — некоторый класс шкал. Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$ модально определим в $\mathbb{K}_0$, если $\exists$ множество модальных формул Γ, такое что

$$\text{для всякой шкалы } F \in \mathbb{K}_0 \quad (F \in \mathbb{K} \ \Leftrightarrow \ F \models \Gamma).$$

Класс конечно определим, если Γ можно выбрать конечным.

Лемма (Необходимые условия модальной определимости)

Если класс шкал $\mathbb{K}$ модально определим, то $\mathbb{K}$ замкнут отн. взятия:
– несвязных сумм шкал ($\biguplus$),
– порожденных подшкал ($\hookrightarrow$),
– p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$).

Модально определимые классы шкал

Определение (Относительная модальная определимость)

Пусть $\mathbb{K}_0$ — некоторый класс шкал. Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$ **модально определим в** $\mathbb{K}_0$, если $\exists$ множество модальных формул Γ, такое что

$$\text{для всякой шкалы } F \in \mathbb{K}_0 \quad (F \in \mathbb{K} \;\Leftrightarrow\; F \models \Gamma).$$

Класс **конечно определим**, если Γ можно выбрать конечным.

Лемма (Необходимые условия модальной определимости)

Если класс шкал $\mathbb{K}$ модально определим, то $\mathbb{K}$ замкнут отн. взятия:
– несвязных сумм шкал ($\biguplus$),
– порожденных подшкал ($\hookrightarrow$),
– p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$).

Аналогично — для определимости в $\mathbb{K}_0$ (если сам $\mathbb{K}_0$ замкнут).

Модально определимые классы шкал

Определение (Относительная модальная определимость)

Пусть $\mathbb{K}_0$ — некоторый класс шкал. Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$ модально определим в $\mathbb{K}_0$, если $\exists$ множество модальных формул Γ, такое что

$$\text{для всякой шкалы } F \in \mathbb{K}_0 \quad (F \in \mathbb{K} \;\Leftrightarrow\; F \models \Gamma).$$

Класс конечно определим, если Γ можно выбрать конечным.

Лемма (Необходимые условия модальной определимости)

Если класс шкал $\mathbb{K}$ модально определим, то $\mathbb{K}$ замкнут отн. взятия:
– несвязных сумм шкал ($\biguplus$),
– порожденных подшкал ($\hookrightarrow$),
– p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$).

Аналогично — для определимости в $\mathbb{K}_0$ (если сам $\mathbb{K}_0$ замкнут).

Для каких $\mathbb{K}_0$ эти условия будут достаточными?

Критерий модальной определимости (кон. транз. шкалы)

Обозначим $\textsc{FinTrans}$ — класс всех конечных транзитивных шкал.

Критерий модальной определимости (кон. транз. шкалы)

Обозначим $\textsc{FinTrans}$ — класс всех конечных транзитивных шкал.

Теорема (van Benthem, $\leqslant$ 1988)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия*
– *конечных несвязных сумм шкал* ($\biguplus$),
– *порожденных подшкал* ($\hookrightarrow$),
– *p-морфных образов шкал* ($\twoheadrightarrow$).

Критерий модальной определимости (кон. транз. шкалы)

Обозначим $\textsc{FinTrans}$ — класс всех конечных транзитивных шкал.

Теорема (van Benthem, $\leqslant$ 1988)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия*
– конечных несвязных сумм шкал ($\biguplus$),
– порожденных подшкал ($\hookrightarrow$),
– p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$).

Следствие

Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)$ *замкнут относительно* $\biguplus, \hookrightarrow, \twoheadrightarrow$, *а потому модально определим!*

Критерий модальной определимости (кон. транз. шкалы)

Обозначим $\textsc{FinTrans}$ — класс всех конечных транзитивных шкал.

Теорема (van Benthem, $\leqslant$ 1988)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия*
– конечных несвязных сумм шкал ($\uplus$),
– порожденных подшкал ($\hookrightarrow$),
– p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$).

Следствие

Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x \, \exists y \, (x \, R \, y \; \& \; y \, R \, y)$ *замкнут относительно* $\uplus, \hookrightarrow, \twoheadrightarrow$*, а потому модально определим!*

Одной формулой или множеством формул? Найти.

Критерий модальной определимости (кон. транз. шкалы)

Обозначим $\textsc{FinTrans}$ — класс всех конечных транзитивных шкал.

Теорема (van Benthem, $\leqslant$ 1988)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия*
– *конечных несвязных сумм шкал* ($\uplus$),
– *порожденных подшкал* ($\hookrightarrow$),
– *p-морфных образов шкал* ($\twoheadrightarrow$).

Следствие

Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$ *замкнут относительно* $\uplus, \hookrightarrow, \twoheadrightarrow$, *а потому модально определим!*

Одной формулой или множеством формул? Найти.
Выяснить этот же вопрос для не обязательно транзитивных шкал.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$ $\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$ $\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\uplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \uplus$.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$ $\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\uplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \uplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).
Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).
Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.
Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).
Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.
Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.
Значит, $\exists$ шкала $G \in \mathbb{K}$, такая что $G \not\models \chi(F)$.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$ $\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\uplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \uplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).
Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.
Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.
Значит, $\exists$ шкала $G \in \mathbb{K}$, такая что $G \not\models \chi(F)$.
Тогда $G \rightarrowtail F$. Но $\mathbb{K}$ замкнут по $\rightarrowtail$. Значит, $F \in \mathbb{K}$.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$ $\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\uplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \uplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.

Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.

Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).

Случай 1. F — конус.

Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.

Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.

Значит, $\exists$ шкала $G \in \mathbb{K}$, такая что $G \not\models \chi(F)$.

Тогда $G \rightarrowtail F$. Но $\mathbb{K}$ замкнут по $\rightarrowtail$. Значит, $F \in \mathbb{K}$.

Случай 2. F — произвольная. По **Лемме о накрытии** $\biguplus\limits_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F$.

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).

Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.
Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.
Значит, $\exists$ шкала $G \in \mathbb{K}$, такая что $G \not\models \chi(F)$.
Тогда $G \rightarrowtail F$. Но $\mathbb{K}$ замкнут по $\rightarrowtail$. Значит, $F \in \mathbb{K}$.

Случай 2. F — произвольная. По **Лемме о накрытии** $\biguplus\limits_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F$.

$F \models L$

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\uplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \uplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).

Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.
Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.
Значит, $\exists$ шкала $G \in \mathbb{K}$, такая что $G \not\models \chi(F)$.
Тогда $G \rightarrowtail F$. Но $\mathbb{K}$ замкнут по $\rightarrowtail$. Значит, $F \in \mathbb{K}$.

Случай 2. F — произвольная. По **Лемме о накрытии** $\biguplus\limits_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F$.

$$F \models L \implies F_a \models L$$

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$ $\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).

Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.
Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.
Значит, $\exists$ шкала $G \in \mathbb{K}$, такая что $G \not\models \chi(F)$.
Тогда $G \rightarrowtail F$. Но $\mathbb{K}$ замкнут по $\rightarrowtail$. Значит, $F \in \mathbb{K}$.

Случай 2. F — произвольная. По **Лемме о накрытии** $\biguplus_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F$.

$$F \models L \implies F_a \models L \implies F_a \in \mathbb{K}$$

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).

Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.
Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.
Значит, $\exists$ шкала $G \in \mathbb{K}$, такая что $G \not\models \chi(F)$.
Тогда $G \rightarrowtail F$. Но $\mathbb{K}$ замкнут по $\rightarrowtail$. Значит, $F \in \mathbb{K}$.

Случай 2. F — произвольная. По **Лемме о накрытии** $\biguplus_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F$.

$$F \models L \implies F_a \models L \implies F_a \in \mathbb{K} \implies \Big(\biguplus_{a \in W} F_a\Big) \in \mathbb{K}$$

Теорема (Критерий ван Бентема для кон. транз. шкал)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ *модально определим в* $\textsc{FinTrans}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия* $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ *и конечных* $\biguplus$.

Доказательство импликации ($\Longleftarrow$).

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \textsc{FinTrans}$ замкнут отн. $\hookrightarrow, \twoheadrightarrow, \biguplus$. Положим $L := \mathrm{Logic}(\mathbb{K})$.
Покажем: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$, для всякой конечной транз. шкалы.
Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Доказываем импликацию ($\Leftarrow$).
Случай 1. F — конус.
Дано: $F \models L$. То есть $\mathbb{K} \models A \Rightarrow F \models A$, для всякой формул A.
Тогда $\mathbb{K} \not\models \chi(F)$, поскольку иначе бы $F \models \chi(F)$, что не так.
Значит, $\exists$ шкала $G \in \mathbb{K}$, такая что $G \not\models \chi(F)$.
Тогда $G \rightarrowtail F$. Но $\mathbb{K}$ замкнут по $\rightarrowtail$. Значит, $F \in \mathbb{K}$.

Случай 2. F — произвольная. По **Лемме о накрытии** $\biguplus\limits_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F$.

$$F \models L \implies F_a \models L \implies F_a \in \mathbb{K} \implies \Big(\biguplus_{a \in W} F_a\Big) \in \mathbb{K} \implies F \in \mathbb{K}.$$

Теорема доказана. □

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n} A \; := \; \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$.

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n} A \ := \ \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n} A \ := \ A \wedge \Box^{\leqslant n} A$.

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n}A \ := \ \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n}A \ := \ A \wedge \Box^{\leqslant n}A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n} A \ := \ \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n} A \ := \ A \wedge \Box^{\leqslant n} A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$$

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n}A \;:=\; \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n}A \;:=\; A \wedge \Box^{\leqslant n}A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n}p \to \Box^{n+1}p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n}A \;:=\; \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n}A \;:=\; A \wedge \Box^{\leqslant n}A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n}p \to \Box^{n+1}p \quad\Longleftrightarrow\quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \quad\Longleftrightarrow\quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}.$$

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n}A \;:=\; \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n}A \;:=\; A \wedge \Box^{\leqslant n}A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n}p \to \Box^{n+1}p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \quad \Longleftrightarrow \quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}.$$

Факт. Если модель M n-транзитивна и порождена точкой x, то для всякой формулы A: $M, x \models \boxdot^{\leqslant n}A \Leftrightarrow M \models A$. (Kracht: master modality)

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n}A \ := \ \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n}A \ := \ A \wedge \Box^{\leqslant n}A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n}p \to \Box^{n+1}p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \quad \Longleftrightarrow \quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}.$$

Факт. Если модель M n-транзитивна и порождена точкой x, то для всякой формулы A: $M, x \models \boxdot^{\leqslant n}A \Leftrightarrow M \models A$. (Kracht: master modality)

Формула Файна описания конечного n-транз. конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}^n(F, a_0) \ = \ p_0 \ \wedge \ \boxdot^{\leqslant n}\Big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\Big)$$

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n} A \ := \ \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n} A \ := \ A \wedge \Box^{\leqslant n} A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \quad \Longleftrightarrow \quad R^+ \subseteq R^{\leqslant n}.$$

Факт. Если модель M n-транзитивна и порождена точкой x, то для всякой формулы A: $M, x \models \boxdot^{\leqslant n} A \Leftrightarrow M \models A$. (Kracht: master modality)

Формула Файна описания конечного n-транз. конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}^n(F, a_0) \ = \ p_0 \ \wedge \ \boxdot^{\leqslant n}\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right)$$

$\mathrm{Descr}^n(F, a_0)$ выполнима в шкале F (в точке a_0) — при $V(p_i) = \{a_i\}$.

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n}A \;:=\; \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n}A \;:=\; A \wedge \Box^{\leqslant n}A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n}p \to \Box^{n+1}p \quad\Longleftrightarrow\quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \quad\Longleftrightarrow\quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}.$$

Факт. Если модель M n-транзитивна и порождена точкой x, то для всякой формулы A: $M, x \models \boxdot^{\leqslant n}A \Leftrightarrow M \models A$. (Kracht: master modality)

Формула Файна описания конечного n-транз. конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}^n(F, a_0) \;=\; p_0 \;\wedge\; \boxdot^{\leqslant n}\big(\textstyle\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big)$$

$\mathrm{Descr}^n(F, a_0)$ выполнима в шкале F (в точке a_0) — при $V(p_i) = \{a_i\}$.

Хар. формула Янкова – Файна конечного n-транз. конуса (F, a_0):

$$\chi^n(F, a_0) \;=\; \neg\mathrm{Descr}^n(F, a_0)$$

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n}A \ := \ \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n}A \ := \ A \wedge \Box^{\leqslant n}A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n}p \to \Box^{n+1}p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \quad \Longleftrightarrow \quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}.$$

Факт. Если модель M n-транзитивна и порождена точкой x, то для всякой формулы A: $M, x \models \boxdot^{\leqslant n}A \Leftrightarrow M \models A$. (Kracht: master modality)

Формула Файна описания конечного n-транз. конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}^n(F, a_0) \ = \ p_0 \ \wedge \ \boxdot^{\leqslant n}\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big)$$

$\mathrm{Descr}^n(F, a_0)$ выполнима в шкале F (в точке a_0) — при $V(p_i) = \{a_i\}$.

Хар. формула Янкова – Файна конечного n-транз. конуса (F, a_0):

$$\chi^n(F, a_0) \ = \ \neg\mathrm{Descr}^n(F, a_0) \ = \ \boxdot^{\leqslant n}\big(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\big) \ \to \neg p_0$$

n-транзитивные шкалы

Обозначаем: $\Box^{\leqslant n}A \ := \ \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A$. А также $\boxdot^{\leqslant n}A \ := \ A \wedge \Box^{\leqslant n}A$.
В шкале $F = (W, R)$ обозначаем $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$, где $n \geqslant 1$.

Определение. n-транзитивная шкала — эквивалентные условия:

$$F \models \Box^{\leqslant n}p \to \Box^{n+1}p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \quad \Longleftrightarrow \quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}.$$

Факт. Если модель M n-транзитивна и порождена точкой x, то для всякой формулы A: $M, x \models \boxdot^{\leqslant n}A \Leftrightarrow M \models A$. (Kracht: master modality)

Формула Файна описания конечного n-транз. конуса (F, a_0):

$$\mathrm{Descr}^n(F, a_0) \ = \ p_0 \ \wedge \ \boxdot^{\leqslant n}\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right)$$

$\mathrm{Descr}^n(F, a_0)$ выполнима в шкале F (в точке a_0) — при $V(p_i) = \{a_i\}$.

Хар. формула Янкова – Файна конечного n-транз. конуса (F, a_0):

$$\chi^n(F, a_0) \ = \ \neg\mathrm{Descr}^n(F, a_0) \ = \ \boxdot^{\leqslant n}\left(\bigwedge \mathrm{Diagram}_F\right) \ \to \neg p_0$$

Таким образом, $F \not\models \chi^n(F, a_0)$.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала.

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Док-во (3) $\Rightarrow$ (1) то же, лишь надо доказать сюръективность h.

Модель N порождена точкой b и имеем: $N, b \models p_0$ и $N \models \mathrm{Diagram}_F$.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Док-во (3) $\Rightarrow$ (1) то же, лишь надо доказать сюръективность h.

Модель N порождена точкой b и имеем: $N, b \models p_0$ и $N \models \mathrm{Diagram}_F$.
Уже построен p-морфизм $h\colon G' \to F$ так: $\quad h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$.

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

(1) $G \rightarrowtail F$, **(2)** $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, **(3)** $G \not\models \chi^n(F)$.

Док-во (3) $\Rightarrow$ (1) то же, лишь надо доказать сюръективность h.

Модель N порождена точкой b и имеем: $N, b \models p_0$ и $N \models \mathrm{Diagram}_F$.
Уже построен р-морфизм $h\colon G' \to F$ так: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$.

- Ищем прообраз для корня a_0 — это снова b, ибо $N, b \models p_0$.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

(1) $G \rightarrowtail F$, **(2)** $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, **(3)** $G \not\models \chi^n(F)$.

Док-во (3) $\Rightarrow$ (1) то же, лишь надо доказать сюръективность h.

Модель N порождена точкой b и имеем: $N, b \models p_0$ и $N \models \mathrm{Diagram}_F$.
Уже построен р-морфизм $h\colon G' \to F$ так: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$.

- Ищем прообраз для корня a_0 — это снова b, ибо $N, b \models p_0$.
- Ищем прообраз для $c \in F$, $c \neq a_0$.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Док-во (3) $\Rightarrow$ (1) то же, лишь надо доказать сюръективность h.

Модель N порождена точкой b и имеем: $N, b \models p_0$ и $N \models \mathrm{Diagram}_F$.
Уже построен p-морфизм $h\colon G' \to F$ так: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$.

- Ищем прообраз для корня a_0 — это снова b, ибо $N, b \models p_0$.
- Ищем прообраз для $c \in F$, $c \neq a_0$. Существует цепь из a_0 в c:

$$a_0 = a_{i_0}\ R\ a_{i_1}\ R\ \dots\ R\ a_{i_s} = c.$$

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Док-во (3) $\Rightarrow$ (1) то же, лишь надо доказать сюръективность h.

Модель N порождена точкой b и имеем: $N, b \models p_0$ и $N \models \mathrm{Diagram}_F$.
Уже построен p-морфизм $h\colon G' \to F$ так: $\quad h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$.

- Ищем прообраз для корня a_0 — это снова b, ибо $N, b \models p_0$.
- Ищем прообраз для $c \in F$, $c \neq a_0$. Существует цепь из a_0 в c:

$$a_0 = a_{i_0}\ R\ a_{i_1}\ R\ \ldots\ R\ a_{i_s} = c.$$

Значит, в $\mathrm{Diagram}_F$ имеются формулы $p_{i_k} \to \Diamond p_{i_{k+1}}$ для $0 \leqslant k < s$.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Док-во (3) $\Rightarrow$ (1) то же, лишь надо доказать сюръективность h.

Модель N порождена точкой b и имеем: $N, b \models p_0$ и $N \models \mathrm{Diagram}_F$.
Уже построен p-морфизм $h\colon G' \to F$ так: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$.

- Ищем прообраз для корня a_0 — это снова b, ибо $N, b \models p_0$.
- Ищем прообраз для $c \in F$, $c \neq a_0$. Существует цепь из a_0 в c:

$$a_0 = a_{i_0}\ R\ a_{i_1}\ R\ \ldots\ R\ a_{i_s} = c.$$

Значит, в $\mathrm{Diagram}_F$ имеются формулы $p_{i_k} \to \Diamond p_{i_{k+1}}$ для $0 \leqslant k < s$.
Тогда и в N есть цепь $b = x_0\, R'\, x_1\, R'\ \ldots\ R'\, x_s$, в которой $N, x_k \models p_{i_k}$.

Теорема о характеристической формуле

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Док-во (3) ⇒ (1) то же, лишь надо доказать сюръективность h.

Модель N порождена точкой b и имеем: $N, b \models p_0$ и $N \models \mathrm{Diagram}_F$.
Уже построен р-морфизм $h\colon G' \to F$ так: $h(x) = a_i \Leftrightarrow N, x \models p_i$.

- Ищем прообраз для корня a_0 — это снова b, ибо $N, b \models p_0$.
- Ищем прообраз для $c \in F$, $c \neq a_0$. Существует цепь из a_0 в c:

$$a_0 = a_{i_0}\ R\ a_{i_1}\ R\ \ldots\ R\ a_{i_s} = c.$$

Значит, в $\mathrm{Diagram}_F$ имеются формулы $p_{i_k} \to \Diamond p_{i_{k+1}}$ для $0 \leqslant k < s$.
Тогда и в N есть цепь $b = x_0\, R'\, x_1\, R'\ \ldots\ R'\, x_s$, в которой $N, x_k \models p_{i_k}$.
В частности, $h(x_s) = a_{i_s} = c$ — нашли прообраз точки $c \in F$. □

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Критерий мод. определимости (кон. n-транз. шкалы)

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Обозначим $\mathrm{F{\scriptsize IN}T{\scriptsize RANS}}_n$ — класс всех конечных n-транзитивных шкал.

Критерий мод. определимости (кон. n-транз. шкалы)

Теорема 2 (для n-транзитивных шкал)

Пусть F — конечный n-транзитивный конус;
и G — n-транзитивная шкала. Тогда следующие условия равносильны:

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^n(F).$$

Обозначим $\mathrm{FinTrans}_n$ — класс всех конечных n-транзитивных шкал.

Теорема (van Benthem, $\leqslant$ 1988)

Класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathrm{FinTrans}_n$ *модально определим в* $\mathrm{FinTrans}_n$
$\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно взятия*
– *конечных несвязных сумм шкал* ($\biguplus$),
– *порожденных подшкал* ($\hookrightarrow$),
– *p-морфных образов шкал* ($\twoheadrightarrow$).

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы.

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$.

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$.
Пусть $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$.

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$.
Пусть $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$.
Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$.

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$.
Пусть $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$.
Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$. Тем самым $|F| = |G|$.

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$.
Пусть $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$.
Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$. Тем самым $|F| = |G|$. Значит, р-морфизм $h\colon G \twoheadrightarrow F$ биективен.

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$. Пусть $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$. Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$. Тем самым $|F| = |G|$. Значит, p-морфизм $h\colon G \twoheadrightarrow F$ биективен. По Лемме (ниже) он — изоморфизм: $F \cong G$. □

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$. Пусть $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$. Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$. Тем самым $|F| = |G|$. Значит, p-морфизм $h \colon G \twoheadrightarrow F$ биективен. По Лемме (ниже) он — изоморфизм: $F \cong G$. $\square$

Лемма. *Биективный p-морфизм шкал является изоморфизмом.*

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$. Пусть $F \equiv_{\mathrm{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$. Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$. Тем самым $|F| = |G|$. Значит, p-морфизм $h\colon G \twoheadrightarrow F$ биективен. По Лемме (ниже) он — изоморфизм: $F \cong G$. □

Лемма. *Биективный p-морфизм шкал является изоморфизмом.*

Док-во. Пусть $h\colon F \twoheadrightarrow F'$ — биекция. Почему $x\,R\,y \Leftrightarrow h(x)\,R'\,h(y)$?

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$.
Пусть $F \equiv_{\mathrm{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$.
Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$. Тем самым $|F| = |G|$. Значит, p-морфизм
$h\colon G \twoheadrightarrow F$ биективен. По Лемме (ниже) он — изоморфизм: $F \cong G$. □

Лемма. *Биективный p-морфизм шкал является изоморфизмом.*

Док-во. Пусть $h\colon F \twoheadrightarrow F'$ — биекция. Почему $x\,R\,y \Leftrightarrow h(x)\,R'\,h(y)$?
($\Rightarrow$) По условию (forth).

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$. Пусть $F \equiv_{\mathrm{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$. Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$. Тем самым $|F| = |G|$. Значит, p-морфизм $h\colon G \twoheadrightarrow F$ биективен. По Лемме (ниже) он — изоморфизм: $F \cong G$. □

Лемма. *Биективный p-морфизм шкал является изоморфизмом.*

Док-во. Пусть $h\colon F \twoheadrightarrow F'$ — биекция. Почему $x\,R\,y \Leftrightarrow h(x)\,R'\,h(y)$?
($\Rightarrow$) По условию (forth).
($\Leftarrow$) Пусть $h(x)\,R'\,h(y)$. По (back) $\exists z \in F\colon x\,R\,z$ и $h(z) = h(y)$.

Теорема об изоморфизме конечных конусов

Теорема (Об изоморфизме)

Модально эквивалентные конечные шкалы-конусы изоморфны.

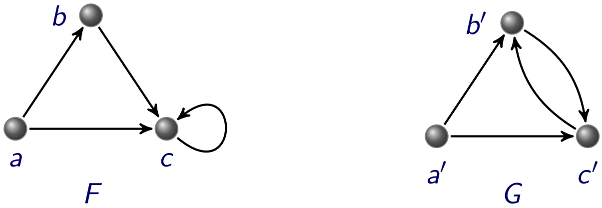
Доказательство.

Пусть F и G — конечные конусы. Они n-транзитивны для некот. $n \geqslant 1$. Пусть $F \equiv_{\mathrm{ML}} G$. По Теореме 2, имеем субредукции $F \rightarrowtail G$ и $G \rightarrowtail F$. Тогда $|F| \geqslant |G| \geqslant |F|$. Тем самым $|F| = |G|$. Значит, p-морфизм $h\colon G \twoheadrightarrow F$ биективен. По Лемме (ниже) он — изоморфизм: $F \cong G$. □

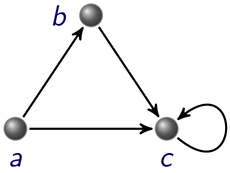
Лемма. *Биективный p-морфизм шкал является изоморфизмом.*

Док-во. Пусть $h\colon F \twoheadrightarrow F'$ — биекция. Почему $x\,R\,y \Leftrightarrow h(x)\,R'\,h(y)$?
($\Rightarrow$) По условию (forth).
($\Leftarrow$) Пусть $h(x)\,R'\,h(y)$. По (back) $\exists z \in F\colon x\,R\,z$ и $h(z) = h(y)$. Тогда $y = z$ по инъективности h. Тем самым $x\,R\,y$. □

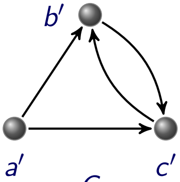
Пример: две 3-точечные шкалы



Пример: две 3-точечные шкалы



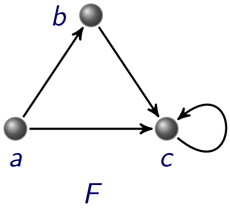
F

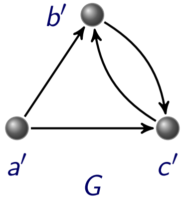


G

1. F и G — конечные (даже транзитивные) конусы.

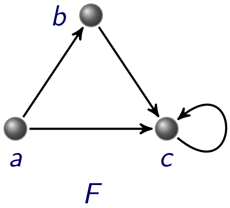
Пример: две 3-точечные шкалы

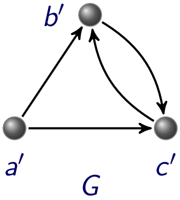




1. F и G — конечные (даже транзитивные) конусы.
2. Они не изоморфны: $F \ncong G$.

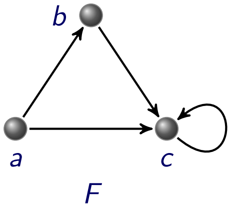
Пример: две 3-точечные шкалы

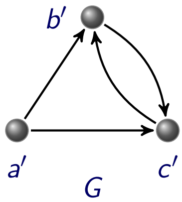




1. F и G — конечные (даже транзитивные) конусы.
2. Они не изоморфны: $F \ncong G$.
3. По Теореме — они модально не эквиваленты: $F \not\equiv_{\mathrm{ML}} G$.

Пример: две 3-точечные шкалы



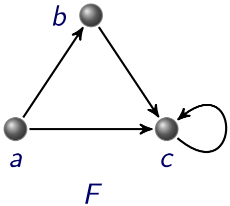


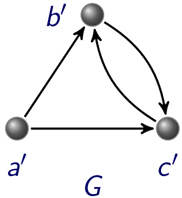
1. F и G — конечные (даже транзитивные) конусы.
2. Они не изоморфны: $F \ncong G$.
3. По Теореме — они модально не эквиваленты: $F \not\equiv_{\mathrm{ML}} G$.
4. Верно ли включение $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$? Нет!

Пример: две 3-точечные шкалы

1. F и G — конечные (даже транзитивные) конусы.
2. Они не изоморфны: $F \ncong G$.
3. По Теореме — они модально не эквиваленты: $F \not\equiv_{\mathrm{ML}} G$.
4. Верно ли включение $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$? Нет!
   Если бы оно было, то $G \rightarrowtail F$, Но $|G| = |F|$. Значит, это был бы биективный р-морфизм. А значит, изоморфизм: $F \cong G$, что не так.

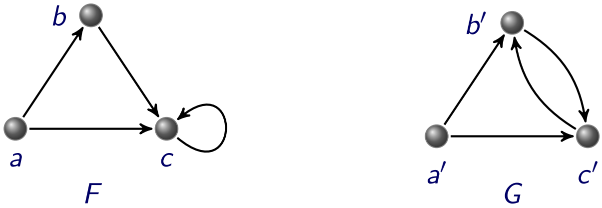
Пример: две 3-точечные шкалы





1. F и G — конечные (даже транзитивные) конусы.
2. Они не изоморфны: $F \ncong G$.
3. По Теореме — они модально не эквиваленты: $F \not\equiv_{\mathsf{ML}} G$.
4. Верно ли включение $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$? Нет!
   Если бы оно было, то $G \rightarrowtail F$, Но $|G| = |F|$. Значит, это был бы биетивный р-морфизм. А значит, изоморфизм: $F \cong G$, что не так.
5. Аналогично $F \not\sqsubseteq_{\mathsf{ML}} G$.

Пример: две 3-точечные шкалы



1. F и G — конечные (даже транзитивные) конусы.
2. Они не изоморфны: $F \ncong G$.
3. По Теореме — они модально не эквиваленты: $F \not\equiv_{\mathsf{ML}} G$.
4. Верно ли включение $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$? Нет!
   Если бы оно было, то $G \rightarrowtail F$, Но $|G| = |F|$. Значит, это был бы биетивный p-морфизм. А значит, изоморфизм: $F \cong G$, что не так.
5. Аналогично $F \not\sqsubseteq_{\mathsf{ML}} G$.

Наблюдение (для конечных конусов).

Если $|F| = |G|$, но $F \ncong G$, то $\mathrm{Logic}(F) \not\supseteq\ \not\subseteq \mathrm{Logic}(G)$ (не сравнимы).

Разрешимость отношения $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$ на конечных шкалах

Лемма

Пусть шкала G и конус F — конечны. Тогда: $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F \;\Leftrightarrow\; G \rightarrowtail F$.

Разрешимость отношения $\sqsubseteq_{\mathrm{ML}}$ на конечных шкалах

Лемма

Пусть шкала G и конус F — конечны. Тогда: $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \iff G \rightarrowtail F$.

Доказательство.

Шкалы F и G — n-транзитивны для некоторого $n \geqslant 1$.

Разрешимость отношения $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$ на конечных шкалах

Лемма

Пусть шкала G и конус F — конечны. Тогда: $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F \iff G \rightarrowtail F$.

Доказательство.

Шкалы F и G — n-транзитивны для некоторого $n \geqslant 1$.
Тогда применяем Теорему 2, отбросив утверждение (3). $\square$

Разрешимость отношения $\sqsubseteq_{\mathrm{ML}}$ на конечных шкалах

Лемма

Пусть шкала G и конус F — конечны. Тогда: $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \;\Leftrightarrow\; G \rightarrowtail F$.

Доказательство.

Шкалы F и G — n-транзитивны для некоторого $n \geqslant 1$.
Тогда применяем Теорему 2, отбросив утверждение (3). $\square$

Следствие

Отношение $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, где F, G — конечные шкалы, F — конус, разрешимо.

Разрешимость отношения $\sqsubseteq_{\mathrm{ML}}$ на конечных шкалах

Лемма

Пусть шкала G и конус F — конечны. Тогда: $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \;\Leftrightarrow\; G \rightarrowtail F$.

Доказательство.

Шкалы F и G — n-транзитивны для некоторого $n \geqslant 1$.
Тогда применяем Теорему 2, отбросив утверждение (3). □

Следствие

Отношение $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, где F, G — конечные шкалы, F — конус, разрешимо.

А если F — произвольная конечная шкала?

Лемма

Логика всякой шкалы равна логике всех ее конусов:

$$\mathrm{Logic}(F) \ = \ \mathrm{Logic}(\{\, F_x \ \mid \ x \in F \,\}) = \bigcap_{x \in F} \mathrm{Logic}(F_x).$$

Лемма

Логика всякой шкалы равна логике всех ее конусов:

$$\mathrm{Logic}(F) \; = \; \mathrm{Logic}(\{\, F_x \;\mid\; x \in F \,\}) = \bigcap_{x \in F} \mathrm{Logic}(F_x).$$

Доказательство.

($\subseteq$) Поскольку $F_x \hookrightarrow F$, то $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x)$, для каждой $x \in F$.

Лемма

Логика всякой шкалы равна логике всех ее конусов:

$$\mathrm{Logic}(F) \ = \ \mathrm{Logic}(\{\, F_x \ \mid \ x \in F \,\}) = \bigcap_{x \in F} \mathrm{Logic}(F_x).$$

Доказательство.

($\subseteq$) Поскольку $F_x \hookrightarrow F$, то $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x)$, для каждой $x \in F$.
($\supseteq$) Если $F \not\models A$, то $\exists x$: $F, x \not\models A$. Тогда $F_x, x \not\models A$, то есть $F_x \not\models A$. $\square$

Лемма

Логика всякой шкалы равна логике всех ее конусов:

$$\mathrm{Logic}(F) \;=\; \mathrm{Logic}(\{\, F_x \;\mid\; x \in F \,\}) = \bigcap_{x \in F} \mathrm{Logic}(F_x).$$

Доказательство.

($\subseteq$) Поскольку $F_x \hookrightarrow F$, то $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x)$, для каждой $x \in F$.
($\supseteq$) Если $F \not\models A$, то $\exists x$: $F, x \not\models A$. Тогда $F_x, x \not\models A$, то есть $F_x \not\models A$. $\square$

Теорема

Отношение $\sqsubseteq_{\mathrm{ML}}$ (а значит, и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) для конечных шкал разрешимо:

если F, G — конечные шкалы, то: $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \iff \forall x \in F \;\; G \rightarrowtail F_x$.

Лемма

Логика всякой шкалы равна логике всех ее конусов:

$$\mathrm{Logic}(F) \;=\; \mathrm{Logic}(\{\, F_x \;\mid\; x \in F \,\}) = \bigcap_{x \in F} \mathrm{Logic}(F_x).$$

Доказательство.

($\subseteq$) Поскольку $F_x \hookrightarrow F$, то $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x)$, для каждой $x \in F$.
($\supseteq$) Если $F \not\models A$, то $\exists x$: $F, x \not\models A$. Тогда $F_x, x \not\models A$, то есть $F_x \not\models A$. $\square$

Теорема

Отношение $\sqsubseteq_{\mathrm{ML}}$ (а значит, и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) для конечных шкал *разрешимо*:

если F, G — конечные шкалы, то: $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \iff \forall x \in F \;\; G \rightarrowtail F_x.$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Если $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, то $\forall x \in F$ имеем $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} Fx$, тогда $G \rightarrowtail F_x$.

Лемма

Логика всякой шкалы равна логике всех ее конусов:

$$\mathrm{Logic}(F) \;=\; \mathrm{Logic}(\{\, F_x \;\mid\; x \in F \,\}) = \bigcap_{x \in F} \mathrm{Logic}(F_x).$$

Доказательство.

($\subseteq$) Поскольку $F_x \hookrightarrow F$, то $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x)$, для каждой $x \in F$.
($\supseteq$) Если $F \not\models A$, то $\exists x$: $F, x \not\models A$. Тогда $F_x, x \not\models A$, то есть $F_x \not\models A$. $\square$

Теорема

Отношение $\sqsubseteq_{\mathrm{ML}}$ (а значит, и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) для конечных шкал разрешимо:

если F, G — конечные шкалы, то: $\quad G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \iff \forall x \in F \;\; G \rightarrowtail F_x.$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Если $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, то $\forall x \in F$ имеем $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} Fx$, тогда $G \rightarrowtail F_x$.
($\Leftarrow$) Пусть $G \rightarrowtail F_x$, а значит и $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F_x$, для всех $x \in F$.

Лемма

Логика всякой шкалы равна логике всех ее конусов:

$$\mathrm{Logic}(F) \;=\; \mathrm{Logic}(\{\, F_x \;\mid\; x \in F \,\}) = \bigcap_{x \in F} \mathrm{Logic}(F_x).$$

Доказательство.

($\subseteq$) Поскольку $F_x \hookrightarrow F$, то $\mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x)$, для каждой $x \in F$.
($\supseteq$) Если $F \not\models A$, то $\exists x$: $F, x \not\models A$. Тогда $F_x, x \not\models A$, то есть $F_x \not\models A$. $\square$

Теорема

Отношение $\sqsubseteq_{\mathrm{ML}}$ (а значит, и $\equiv_{\mathrm{ML}}$) для конечных шкал разрешимо:

если F, G — конечные шкалы, то: $\quad G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \iff \forall x \in F \;\; G \rightarrowtail F_x.$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Если $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F$, то $\forall x \in F$ имеем $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} Fx$, тогда $G \rightarrowtail F_x$.
($\Leftarrow$) Пусть $G \rightarrowtail F_x$, а значит и $G \sqsubseteq_{\mathrm{ML}} F_x$, для всех $x \in F$. Тогда
$\mathrm{Logic}(G) \subseteq \mathrm{Logic}(\{F_x \mid x \in F\}) = \mathrm{Logic}(F)$. $\square$

Вопросы для размышления

1. Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$ модально определим. Найти модальные формулы.

Вопросы для размышления

1. Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$ модально определим. Найти модальные формулы.
   Формула $\Diamond(\Box p \to p)$ задает шкалы $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ x\, R^2\, y)$.

Вопросы для размышления

1. Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x \, \exists y \, (x \, R \, y \; \& \; y \, R \, y)$ модально определим. Найти модальные формулы.
   Формула $\Diamond(\Box p \to p)$ задает шкалы $\forall x \, \exists y \, (x \, R \, y \; \& \; x \, R^2 \, y)$.
   Формула $\Box(p \to \Diamond p)$ задает шкалы $\forall x \, \forall y \, (x \, R \, y \;\; \Rightarrow \;\; y \, R \, y)$.

Вопросы для размышления

1. Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$ модально определим. Найти модальные формулы.
   Формула $\Diamond(\Box p \to p)$ задает шкалы $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ x\, R^2\, y)$.
   Формула $\Box(p \to \Diamond p)$ задает шкалы $\forall x\, \forall y\, (x\, R\, y \;\Rightarrow\; y\, R\, y)$.
2. Работает ли тот же критерий для произвольных конечных шкал?

Вопросы для размышления

1. Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$ модально определим. Найти модальные формулы.
   Формула $\Diamond(\Box p \to p)$ задает шкалы $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ x\, R^2\, y)$.
   Формула $\Box(p \to \Diamond p)$ задает шкалы $\forall x\, \forall y\, (x\, R\, y\ \Rightarrow\ y\, R\, y)$.
2. Работает ли тот же критерий для произвольных конечных шкал? В частности, определим ли класс конечных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$?
3. Критерий ван Бентема для конечных транзитивных шкал — для определимости множеством модальных формул.

Вопросы для размышления

1. Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$ модально определим. Найти модальные формулы.
   Формула $\Diamond(\Box p \to p)$ задает шкалы $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ x\, R^2\, y)$.
   Формула $\Box(p \to \Diamond p)$ задает шкалы $\forall x\, \forall y\, (x\, R\, y \ \Rightarrow\ y\, R\, y)$.
2. Работает ли тот же критерий для произвольных конечных шкал? В частности, определим ли класс конечных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$?
3. Критерий ван Бентема для конечных транзитивных шкал — для определимости множеством модальных формул.
   Каков критерий определимости одной модальной формулой?

Вопросы для размышления

1. Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$ модально определим. Найти модальные формулы.
   Формула $\Diamond(\Box p \to p)$ задает шкалы $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ x\, R^2\, y)$.
   Формула $\Box(p \to \Diamond p)$ задает шкалы $\forall x\, \forall y\, (x\, R\, y \ \Rightarrow\ y\, R\, y)$.
2. Работает ли тот же критерий для произвольных конечных шкал? В частности, определим ли класс конечных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)$?
3. Критерий ван Бентема для конечных транзитивных шкал — для определимости множеством модальных формул.
   Каков критерий определимости одной модальной формулой?
4. Для 3-элементных шкал из начала лекции найти различающие (в обе стороны) модальные формулы.

Вопросы для размышления

1. Класс конечных транзитивных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)$ модально определим. Найти модальные формулы.
   Формула $\Diamond(\Box p \to p)$ задает шкалы $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; x\, R^2\, y)$.
   Формула $\Box(p \to \Diamond p)$ задает шкалы $\forall x\, \forall y\, (x\, R\, y \;\Rightarrow\; y\, R\, y)$.
2. Работает ли тот же критерий для произвольных конечных шкал? В частности, определим ли класс конечных шкал с условием $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)$?
3. Критерий ван Бентема для конечных транзитивных шкал — для определимости множеством модальных формул.
   Каков критерий определимости одной модальной формулой?
4. Для 3-элементных шкал из начала лекции найти различающие (в обе стороны) модальные формулы.

Конец лекции 8. Спасибо за внимание!