Модальная логика. Лекция 7: Теорема Макинсона. Критерий Чагрова табличности логики. Конечная аксиоматизируемость логики всякой конечной шкалы

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

06 ноября 2020 года

Теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Их модальные логики:

$$\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$$
$$\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot.$$

Теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Их модальные логики:

$$\begin{array}{lllllll} \mathrm{Logic}(F_\circ) & = & \mathbf{Triv} & = & \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p) & & \\ \mathrm{Logic}(F_\bullet) & = & \mathbf{Ver} & = & \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) & = & \mathbf{K} \oplus \Box\bot. \end{array}$$

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

L — полная непр. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Их модальные логики:

$$\begin{array}{lllllll}
\mathrm{Logic}(F_\circ) & = & \mathbf{Triv} & = & \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p) & & \\
\mathrm{Logic}(F_\bullet) & = & \mathbf{Ver} & = & \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) & = & \mathbf{K} \oplus \Box\bot.
\end{array}$$

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

L — *полная непр. нормальная логика* $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Наша цель:

Теорема (Макинсон, 1971)

L — *непротив. нормальная логика* $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Подстановки (формул вместо переменных)

Подстановка — это всякая функция $\sigma \colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$.

Подстановки (формул вместо переменных)

Подстановка — это всякая функция $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$.

Пример: $\sigma(p) = p \wedge q$, $\sigma(q) = \neg(q \to \neg r \wedge p)$.
Обозначение: $\sigma = [p \mapsto p \wedge q, q \mapsto \neg(q \to \neg r \wedge p)]$.

Подстановки (формул вместо переменных)

Подстановка — это всякая функция $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$.

Пример: $\sigma(p) = p \wedge q$, $\sigma(q) = \neg(q \to \neg r \wedge p)$.
Обозначение: $\sigma = [p \mapsto p \wedge q, q \mapsto \neg(q \to \neg r \wedge p)]$.

Результат применения подстановки σ к формуле A: это $\sigma(A)$ или A^σ — определяется индукцией по построению формулы A:

$$\bot^\sigma \;:=\; \bot, \qquad (A \to B)^\sigma \;:=\; (A^\sigma \to B^\sigma), \qquad (\Box A)^\sigma \;:=\; \Box A^\sigma.$$

Подстановки (формул вместо переменных)

Подстановка — это всякая функция $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$.

Пример: $\sigma(p) = p \wedge q$, $\sigma(q) = \neg(q \to \neg r \wedge p)$.
Обозначение: $\sigma = [p \mapsto p \wedge q, q \mapsto \neg(q \to \neg r \wedge p)]$.

Результат применения подстановки σ к формуле A: это $\sigma(A)$ или A^σ — определяется индукцией по построению формулы A:

$$\bot^\sigma \ := \ \bot, \quad (A \to B)^\sigma \ := \ (A^\sigma \to B^\sigma), \quad (\Box A)^\sigma \ := \ \Box A^\sigma.$$

Другое название: $\sigma(A)$ или A^σ — подстановочный пример формулы A.

Подстановки (формул вместо переменных)

Подстановка — это всякая функция $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$.

Пример: $\sigma(p) = p \wedge q$, $\sigma(q) = \neg(q \to \neg r \wedge p)$.
Обозначение: $\sigma = [p \mapsto p \wedge q, q \mapsto \neg(q \to \neg r \wedge p)]$.

Результат применения подстановки σ к формуле A: это $\sigma(A)$ или A^σ — определяется индукцией по построению формулы A:

$$\bot^\sigma \ := \ \bot, \quad (A \to B)^\sigma \ := \ (A^\sigma \to B^\sigma), \quad (\Box A)^\sigma \ := \ \Box A^\sigma.$$

Другое название: $\sigma(A)$ или A^σ — подстановочный пример формулы A.

Если $\sigma(p_i) = B_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, а для остальных переменных $q \in \mathrm{Var}$ имеем $\sigma(q) = q$, то будем писать:

$$\sigma(A) = A^\sigma = A[p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n].$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления **K**,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*.*

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления **K**,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$.

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$.

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и
$\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$.

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$.

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \notin \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$.

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \notin \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Тогда:

$$A[p_1 \mapsto q_1]$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$.

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \notin \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Тогда:

$$A[p_1 \mapsto q_1] \ldots$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$.

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \;\notin\; \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Тогда:

$$A[p_1 \mapsto q_1] \ldots [p_n \mapsto q_n]$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления **K**,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$*.*

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \notin \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Тогда:

$$A[p_1 \mapsto q_1] \ldots [p_n \mapsto q_n][q_1 \mapsto B_1]$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления **K**,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$.

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \notin \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Тогда:

$$A[p_1 \mapsto q_1] \ldots [p_n \mapsto q_n][q_1 \mapsto B_1] \ldots$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$.

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \;\notin\; \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Тогда:

$$A[p_1 \mapsto q_1] \ldots [p_n \mapsto q_n][q_1 \mapsto B_1] \ldots [q_n \mapsto B_n]$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$*.*

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \notin \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Тогда:

$$A[p_1 \mapsto q_1] \ldots [p_n \mapsto q_n][q_1 \mapsto B_1] \ldots [q_n \mapsto B_n] = A^\sigma.$$

Логики и произвольные подстановки

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления **K**,
2. L замкнуто по (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Лемма. *Всякая логика замкнута по правилу* $\dfrac{A}{A^\sigma}$*: если* $L \vdash A$*, то* $L \vdash A^\sigma$*.*

Доказательство. Пусть $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ и $\sigma = [p_1 \mapsto B_1, \ldots, p_n \mapsto B_n]$. Возьмем «свежие» переменные:

$$q_1, \ldots, q_n \ \notin \ \{p_1, \ldots, p_n\} \cup \mathrm{Var}(B_1, \ldots, B_n).$$

Тогда:

$$A[p_1 \mapsto q_1] \ldots [p_n \mapsto q_n][q_1 \mapsto B_1] \ldots [q_n \mapsto B_n] \ = \ A^\sigma.$$

Док-во индукцией по построению формулы $A \in \mathrm{Fm}(p_1, \ldots, p_n)$. ◁

Подстановка и ее действие на модель

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$ — подстановка.

Подстановка и ее действие на модель

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$ — подстановка.

Определение

Подстановочный вариант модели M — модель $M^\sigma = (W, R, V^\sigma)$, где

$$M^\sigma, x \models p \quad \iff \quad M, x \models p^\sigma, \quad \text{для всякой переменной } p \in \mathrm{Var}.$$

Подстановка и ее действие на модель

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$ — подстановка.

Определение

Подстановочный вариант модели M — модель $M^\sigma = (W, R, V^\sigma)$, где

$$M^\sigma, x \models p \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models p^\sigma, \quad \text{для всякой переменной } p \in \mathrm{Var}.$$

Лемма

$M^\sigma, x \models A \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models A^\sigma,$ *для всякой формулы A.*

Подстановка и ее действие на модель

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$ — подстановка.

Определение

Подстановочный вариант модели M — модель $M^\sigma = (W, R, V^\sigma)$, где

$$M^\sigma, x \models p \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models p^\sigma, \quad \text{для всякой переменной } p \in \mathrm{Var}.$$

Лемма

$M^\sigma, x \models A \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models A^\sigma,$ *для всякой формулы A.*

Доказательство. Индукция по построению формулы A.
База $A = \bot$ и $A = p$ очевидна, шаги $\wedge, \vee, \to$ и $\Box$ тривиальны. $\triangleleft$

Подстановка и ее действие на модель

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, $\sigma\colon \mathrm{Var} \to \mathrm{Fm}$ — подстановка.

Определение

Подстановочный вариант модели M — модель $M^\sigma = (W, R, V^\sigma)$, где

$$M^\sigma, x \models p \iff M, x \models p^\sigma, \quad \text{для всякой переменной } p \in \mathrm{Var}.$$

Лемма

$M^\sigma, x \models A \iff M, x \models A^\sigma$, для всякой формулы A.

Доказательство. Индукция по построению формулы A.
База $A = \bot$ и $A = p$ очевидна, шаги $\wedge, \vee, \to$ и $\Box$ тривиальны. $\triangleleft$

Следствие

Не только $M_L \models L$, но и $(M_L)^\sigma \models L$ для любой подстановки σ.

Модально различимые модели

В модели $M = (W, R, V)$ точки x и y модально эквивалентны, если:

$$M, x \models A \quad \Longleftrightarrow \quad M, y \models A, \quad \text{для всех формул } A.$$

Модально различимые модели

В модели $M = (W, R, V)$ точки x и y модально эквивалентны, если:

$$M, x \models A \quad \Longleftrightarrow \quad M, y \models A, \quad \text{для всех формул } A. \quad \text{Обозн.: } x{\equiv}y.$$

Модально различимые модели

В модели $M = (W, R, V)$ точки x и y модально эквивалентны, если:

$M, x \models A \quad \Longleftrightarrow \quad M, y \models A,$ для всех формул A. Обозн.: $x {\equiv} y$.

Определение

Модель M — модально различимая, если в ней нет модально эквивалентных точек.

Иначе говоря: любые две точки $x \neq y$ различаются некоторой формулой A, то есть, например, $M, x \models A$ и $M, y \not\models A$.

Модально различимые модели

В модели $M = (W, R, V)$ точки x и y модально эквивалентны, если:

$$M, x \models A \quad \Longleftrightarrow \quad M, y \models A, \quad \text{для всех формул } A. \quad \text{Обозн.: } x \equiv y.$$

Определение

Модель M — модально различимая, если в ней нет модально эквивалентных точек.

Иначе говоря: любые две точки $x \neq y$ различаются некоторой формулой A, то есть, например, $M, x \models A$ и $M, y \not\models A$.

Пример

Каноническая модель M_L любой логики L — модально различимая.

Модально различимые модели

В модели $M = (W, R, V)$ точки x и y модально эквивалентны, если:

$$M, x \models A \quad \Longleftrightarrow \quad M, y \models A, \quad \text{для всех формул } A. \quad \text{Обозн.: } x \equiv y.$$

Определение

Модель M — модально различимая, если в ней нет модально эквивалентных точек.

Иначе говоря: любые две точки $x \neq y$ различаются некоторой формулой A, то есть, например, $M, x \models A$ и $M, y \not\models A$.

Пример

Каноническая модель M_L любой логики L — модально различимая.

Действительно,
если $x, y \in W_L$ и $x \neq y$, то $\exists A \in (x \setminus y)$.

Модально различимые модели

В модели $M = (W, R, V)$ точки x и y модально эквивалентны, если:

$$M, x \models A \quad \iff \quad M, y \models A,$$ для всех формул A. Обозн.: $x \equiv y$.

Определение

Модель M — модально различимая, если в ней нет модально эквивалентных точек.

Иначе говоря: любые две точки $x \neq y$ различаются некоторой формулой A, то есть, например, $M, x \models A$ и $M, y \not\models A$.

Пример

Каноническая модель M_L любой логики L — модально различимая.

Действительно,
если $x, y \in W_L$ и $x \neq y$, то $\exists A \in (x \setminus y)$.
Тогда $M_L, x \models A$ и $M_L, y \not\models A$.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$

Лемма

Пусть модель M *— модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек* $x_1, \ldots, x_n \in W$ *существуют модальные формулы* $A_1, \ldots, A_n$, *такие что* $\quad M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j.$

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $\quad M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j.$

Доказательство.

Для всяких $i \neq j \;\; \exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $\quad M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j.$

Доказательство.

Для всяких $i \neq j$ $\;\exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.

Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $\quad M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j$.

Доказательство.

Для всяких $i \neq j \;\; \exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.
Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\triangleleft$

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j$.

Доказательство.

Для всяких $i \neq j$ $\exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.
Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\triangleleft$

Обозначение: $M \models A^*$, если M^σ для всех подстановок σ.

Лемма

Пусть модель M *— модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек* $x_1, \ldots, x_n \in W$ *существуют модальные формулы* $A_1, \ldots, A_n$, *такие что* $\quad M, x_i \models A_j \ \Leftrightarrow \ i = j$.

Доказательство.

Для всяких $i \neq j$ $\ \exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.

Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\quad \triangleleft$

Обозначение: $M \models A^*$, если M^σ для всех подстановок σ.

Это «приближение» к общезначимости формулы A на шкале F.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $\quad M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j.$

Доказательство.
Для всяких $i \neq j \;\; \exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.
Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\triangleleft$

Обозначение: $M \models A^*$, если M^σ для всех подстановок σ.
Это «приближение» к общезначимости формулы A на шкале F.

Пример

Двухточечная модель: $M = (W, R, V)$, $W = \{x, y\}$, xRy, yRx.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $\quad M, x_i \models A_j \; \Leftrightarrow \; i = j$.

Доказательство.

Для всяких $i \neq j \;\; \exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.

Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\quad\triangleleft$

Обозначение: $M \models A^*$, если M^σ для всех подстановок σ.

Это «приближение» к общезначимости формулы A на шкале F.

Пример

Двухточечная модель: $M = (W, R, V)$, $W = \{x, y\}$, xRy, yRx.

(M, x) и (M, y) изоморфны.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $\quad M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j$.

Доказательство.

Для всяких $i \neq j$ $\;\exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.

Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\quad\triangleleft$

Обозначение: $M \models A^*$, если M^σ для всех подстановок σ.

Это «приближение» к общезначимости формулы A на шкале F.

Пример

Двухточечная модель: $M = (W, R, V)$, $W = \{x, y\}$, xRy, yRx.

(M, x) и (M, y) изоморфны. Поэтому $x \equiv y$.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j$.

Доказательство.
Для всяких $i \neq j$ $\exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.
Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\triangleleft$

Обозначение: $M \models A^*$, если M^σ для всех подстановок σ.
Это «приближение» к общезначимости формулы A на шкале F.

Пример

Двухточечная модель: $M = (W, R, V)$, $W = \{x, y\}$, xRy, yRx.
(M, x) и (M, y) изоморфны. Поэтому $x \equiv y$.
Значит, $M \models \Box A \to A$ для всех формул A.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j$.

Доказательство.
Для всяких $i \neq j$ $\exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.
Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\triangleleft$

Обозначение: $M \models A^*$, если M^σ для всех подстановок σ.
Это «приближение» к общезначимости формулы A на шкале F.

Пример

Двухточечная модель: $M = (W, R, V)$, $W = \{x, y\}$, xRy, yRx.
(M, x) и (M, y) изоморфны. Поэтому $x \equiv y$.
Значит, $M \models \Box A \to A$ для всех формул A. То есть $M \models (\Box p \to p)^*$.

Лемма

Пусть модель M — модально различимая. Тогда для всяких попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in W$ существуют модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $\quad M, x_i \models A_j \;\Leftrightarrow\; i = j.$

Доказательство.

Для всяких $i \neq j \;\; \exists$ формула $B_{i,j}$, такая что $x_i \models B_{i,j}$ и $x_j \models B_{i,j}$.

Обозначим $A_i := \bigwedge\limits_{j \neq i} B_{i,j}$. Очевидно $x_i \models A_i$, но $x_j \not\models A_i$ при $j \neq i$. $\triangleleft$

Обозначение: $M \models A^*$, если M^σ для всех подстановок σ.

Это «приближение» к общезначимости формулы A на шкале F.

Пример

Двухточечная модель: $M = (W, R, V)$, $W = \{x, y\}$, xRy, yRx.

(M, x) и (M, y) изоморфны. Поэтому $x \equiv y$.

Значит, $M \models \Box A \to A$ для всех формул A. То есть $M \models (\Box p \to p)^*$.

Однако $F \not\models \Box p \to p$, так как шкала не рефлексивна.

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — *конечная модально различимая модель,* $A \in \mathrm{Fm}$.

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — *конечная модально различимая модель,* $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — *конечная модально различимая модель,* $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\, x_i \in Y} B_i$.

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \quad \Longrightarrow \quad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\ x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \ \ (x \in Y \ \Leftrightarrow \ M, x \models C_Y).$$

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — *конечная модально различимая модель,* $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\ x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \ \ (x \in Y \ \Leftrightarrow \ M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\ x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \ \ (x \in Y \ \Leftrightarrow \ M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \quad \Longrightarrow \quad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\, x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \ \ (x \in Y \ \Leftrightarrow \ M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.
Рассмотрим подстановку $\sigma(p) = C_{U(p)}$ для всех переменных $p \in \mathrm{Var}$.

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \quad \Longrightarrow \quad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\, x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \ \ (x \in Y \ \Leftrightarrow \ M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.
Рассмотрим подстановку $\sigma(p) = C_{U(p)}$ для всех переменных $p \in \mathrm{Var}$.
Имеем: $N, x \models p$

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\, x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \ \ (x \in Y \ \Leftrightarrow \ M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.
Рассмотрим подстановку $\sigma(p) = C_{U(p)}$ для всех переменных $p \in \mathrm{Var}$.
Имеем: $N, x \models p \ \Leftrightarrow \ x \in U(p)$

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \quad \Longrightarrow \quad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i\colon x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \;\; (x \in Y \;\Leftrightarrow\; M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.
Рассмотрим подстановку $\sigma(p) = C_{U(p)}$ для всех переменных $p \in \mathrm{Var}$.
Имеем: $N, x \models p \;\Leftrightarrow\; x \in U(p) \;\Leftrightarrow\; M, x \models C_{U(p)}$

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \quad \Longrightarrow \quad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\, x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \;\; (x \in Y \;\Leftrightarrow\; M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.
Рассмотрим подстановку $\sigma(p) = C_{U(p)}$ для всех переменных $p \in \mathrm{Var}$.
Имеем: $N, x \models p \;\Leftrightarrow\; x \in U(p) \;\Leftrightarrow\; M, x \models C_{U(p)} \;\Leftrightarrow\; M, x \models p^\sigma$.

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\ x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \ \ (x \in Y \ \Leftrightarrow \ M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.
Рассмотрим подстановку $\sigma(p) = C_{U(p)}$ для всех переменных $p \in \mathrm{Var}$.
Имеем: $N, x \models p \ \Leftrightarrow \ x \in U(p) \ \Leftrightarrow \ M, x \models C_{U(p)} \ \Leftrightarrow \ M, x \models p^\sigma$.
Таким образом, $N = M^\sigma$.

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\, x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \;\; (x \in Y \;\Leftrightarrow\; M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.
Рассмотрим подстановку $\sigma(p) = C_{U(p)}$ для всех переменных $p \in \mathrm{Var}$.
Имеем: $N, x \models p \;\Leftrightarrow\; x \in U(p) \;\Leftrightarrow\; M, x \models C_{U(p)} \;\Leftrightarrow\; M, x \models p^\sigma$.
Таким образом, $N = M^\sigma$. Поскольку $M \models A^\sigma$, имеем $N \models A$. $\triangleleft$

Конечные модально различимые модели

Лемма

Пусть $M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, $A \in \mathrm{Fm}$.

$$M \models A^* \qquad \Longrightarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Каждая точка x_i задается формулой B_i, то есть: $x_i \models B_j \Leftrightarrow i = j$.
- Каждое $Y \subseteq W$ задается формулой $C_Y = \bigvee\limits_{i:\, x_i \in Y} B_i$. То есть:

$$\forall x \in W \;\; (x \in Y \;\Leftrightarrow\; M, x \models C_Y).$$

Докажем: $F \models A$. Возьмем любую модель $N := (F, U)$ со шкалой F.
Каждое множество $U(p) \subseteq W$ определимо — формулой $C_{U(p)}$.
Рассмотрим подстановку $\sigma(p) = C_{U(p)}$ для всех переменных $p \in \mathrm{Var}$.
Имеем: $N, x \models p \;\Leftrightarrow\; x \in U(p) \;\Leftrightarrow\; M, x \models C_{U(p)} \;\Leftrightarrow\; M, x \models p^\sigma$.
Таким образом, $N = M^\sigma$. Поскольку $M \models A^\sigma$, имеем $N \models A$. $\triangleleft$

Следствие. *Пусть M — конечная мод. разл. Если $M \models L$, то $F \models L$.*

Напоминание: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e \rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

L — *полная непр. нормальная логика* $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Напоминание: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

*L — полная непр. нормальная логика $\implies$ $L \subseteq$ **Triv** или $L \subseteq$ **Ver**.*

Доказательство (напоминание).

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Напоминание: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

*L — полная непр. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq$ **Triv** или $L \subseteq$ **Ver**.*

Доказательство (напоминание).

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.

Напоминание: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

L — полная непр. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство (напоминание).

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$

Напоминание: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

L — полная непр. нормальная логика $\implies$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство (напоминание).

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet \implies L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Напоминание: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

*L — полная непр. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq$ **Triv** или $L \subseteq$ **Ver**.*

Доказательство (напоминание).

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$ $\Longrightarrow$ $L \subseteq$ **Ver**.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\ \exists (y\ x R y)$.

Напоминание: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

*L — полная непр. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq$ **Triv** или $L \subseteq$ **Ver**.*

Доказательство (напоминание).

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet \quad \Longrightarrow \quad L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\ \exists(y\ x R y)$.
Тогда $F \twoheadrightarrow F_\circ$ (сюръективный p-морфизм)

Напоминание: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

L — полная непр. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство (напоминание).

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$ $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\ \exists (y\ x R y)$.
Тогда $F \twoheadrightarrow F_\circ$ (сюръективный p-морфизм) $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$. $\square$

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \textbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \textbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W \colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x)$

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\implies$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Случай 2. В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y)$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W \colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

<u>**Случай 2.**</u> В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\ \exists y\ (x\,R\,y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h \colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Случай 2. В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\;\, h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow$ $F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Случай 2. В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\ \exists y\ (x\,R\,y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W \colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

<u>**Случай 2.**</u> В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\ \exists y\ (x\, R\, y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h \colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma \ := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

<u>**Утв.**</u> $h \colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$

Теорема (Макинсон, 1971)

*L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq$ **Triv** или $L \subseteq$ **Ver**.*

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow$ $F_x \models L$, то есть $L \subseteq$ **Ver**.

<u>**Случай 2.**</u> В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\ \exists y\ (x\,R\,y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq$ **Triv**, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma \ := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

<u>**Утв.**</u> $h\colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$ (и тогда ввиду $M^\sigma \models L$ получим $M' \models L$, ч.т.д.)

Теорема (Макинсон, 1971)

*L — непротив. нормальная логика $\implies$ $L \subseteq$ **Triv** или $L \subseteq$ **Ver**.*

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq$ **Ver**.

<u>**Случай 2.**</u> В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\, \exists y\ (x\, R\, y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq$ **Triv**, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

<u>**Утв.**</u> $h\colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$ (и тогда ввиду $M^\sigma \models L$ получим $M' \models L$, ч.т.д.)

$M^\sigma, x \models p$

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Случай 2. В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\ \exists y\ (x\,R\,y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma \ := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

Утв. $h\colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$ (и тогда ввиду $M^\sigma \models L$ получим $M' \models L$, ч.т.д.)

$M^\sigma, x \models p \ \Leftrightarrow\ M, x \models p^\sigma$

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Случай 2. В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

Утв. $h\colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$ (и тогда ввиду $M^\sigma \models L$ получим $M' \models L$, ч.т.д.)

$M^\sigma, x \models p \ \Leftrightarrow\ M, x \models p^\sigma \ \Leftrightarrow\ p^\sigma = \top$

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow$ $F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

<u>**Случай 2.**</u> В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\ \exists y\ (x\,R\,y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma \ := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

<u>**Утв.**</u> $h\colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$ (и тогда ввиду $M^\sigma \models L$ получим $M' \models L$, ч.т.д.)

$M^\sigma, x \models p \ \Leftrightarrow\ M, x \models p^\sigma \ \Leftrightarrow\ p^\sigma = \top \ \Leftrightarrow\ M', e \models p.$ ч.т.д. $\triangleleft$

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

<u>**Случай 2.**</u> В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\ \exists y\ (x\,R\,y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

<u>**Утв.**</u> $h\colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$ (и тогда ввиду $M^\sigma \models L$ получим $M' \models L$, ч.т.д.)

$M^\sigma, x \models p \ \Leftrightarrow\ M, x \models p^\sigma \ \Leftrightarrow\ p^\sigma = \top \ \Leftrightarrow\ M', e \models p.$ ч.т.д. $\triangleleft$

В **Случае 2**: $M_L \models \Diamond\top$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

<u>**Случай 2.**</u> В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\ \exists y\ (x\,R\,y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\ \ h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

<u>**Утв.**</u> $h\colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$ (и тогда ввиду $M^\sigma \models L$ получим $M' \models L$, ч.т.д.)

$M^\sigma, x \models p \;\Leftrightarrow\; M, x \models p^\sigma \;\Leftrightarrow\; p^\sigma = \top \;\Leftrightarrow\; M', e \models p.$ ч.т.д. $\lhd$

В **Случае 2**: $M_L \models \Diamond\top$. Значит, $L \vdash \Diamond\top$, то есть $L \supseteq \mathbf{KD}$.

Теорема (Макинсон, 1971)

L — непротив. нормальная логика $\Longrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, V) \models L$.

<u>**Случай 1.**</u> В шкале F_L есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Подмодель, порожденная этой точкой: $M_x = (\{x\}, \varnothing, V_x) \models L$.
M_x — конечная модально различимая. $\Rightarrow F_x \models L$, то есть $L \subseteq \mathbf{Ver}$.

<u>**Случай 2.**</u> В шкале F_L нет тупиков: $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y)$.
Сюръективный p-морфизм шкал: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$, где $\forall x \in W\;\; h(x) = e$.
Чтобы доказать $L \subseteq \mathbf{Triv}$, т.е. $F_\circ \models L$, возьмем $\forall$ модель $M' = (F_\circ, V')$.
Рассмотрим подстановку:

$$p^\sigma := \begin{cases} \top, & \text{если } M', e \models p, \\ \bot, & \text{если } M', e \not\models p. \end{cases} \qquad \text{для всех переменных } p \in \mathrm{Var}.$$

<u>**Утв.**</u> $h\colon M^\sigma \twoheadrightarrow M'$ (и тогда ввиду $M^\sigma \models L$ получим $M' \models L$, ч.т.д.)

$M^\sigma, x \models p \;\Leftrightarrow\; M, x \models p^\sigma \;\Leftrightarrow\; p^\sigma = \top \;\Leftrightarrow\; M', e \models p.$ ч.т.д. $\triangleleft$

В **Случае 2**: $M_L \models \Diamond\top$. Значит, $L \vdash \Diamond\top$, то есть $L \supseteq \mathbf{KD}$.

Где еще работает теорема Макинсона?

1. Бимодальные и полимодальные логики: нет.

Где еще работает теорема Макинсона?

1. Бимодальные и полимодальные логики: нет.
2. Их частный случай — временные логики ($\Box$ и $\boxminus$): нет.

Где еще работает теорема Макинсона?

1. Бимодальные и полимодальные логики: нет.
2. Их частный случай — временные логики ($\Box$ и $\boxminus$): нет.
3. Логика с универсальной модальностью $[\forall]$ — ?

Где еще работает теорема Макинсона?

1. Бимодальные и полимодальные логики: нет.
2. Их частный случай — временные логики ($\Box$ и $\boxminus$): нет.
3. Логика с универсальной модальностью $[\forall]$ — ?
4. Логика с модальностью транз. замыкания $\boxplus$ — да (Шкатов, 2004)

Где еще работает теорема Макинсона?

1. Бимодальные и полимодальные логики: нет.
2. Их частный случай — временные логики ($\Box$ и $\boxminus$): нет.
3. Логика с универсальной модальностью $[\forall]$ — ?
4. Логика с модальностью транз. замыкания $\boxplus$ — да (Шкатов, 2004)
5. Другие замыкания (симметр., евклидово, эквивалентность) — ?

Где еще работает теорема Макинсона?

1. Бимодальные и полимодальные логики: нет.
2. Их частный случай — временные логики ($\Box$ и $\boxminus$): нет.
3. Логика с универсальной модальностью $[\forall]$ — ?
4. Логика с модальностью транз. замыкания $\boxplus$ — да (Шкатов, 2004)
5. Другие замыкания (симметр., евклидово, эквивалентность) — ?

Подумать:

1. Что из доказательства не проходит для бимодальных логик?

Где еще работает теорема Макинсона?

1. Бимодальные и полимодальные логики: нет.
2. Их частный случай — временные логики ($\Box$ и $\boxminus$): нет.
3. Логика с универсальной модальностью $[\forall]$ — ?
4. Логика с модальностью транз. замыкания $\boxplus$ — да (Шкатов, 2004)
5. Другие замыкания (симметр., евклидово, эквивалентность) — ?

Подумать:

1. Что из доказательства не проходит для бимодальных логик?
2. Верна ли для бимодальных логик слабая теорема Макинсона?

Где еще работает теорема Макинсона?

1. Бимодальные и полимодальные логики: нет.
2. Их частный случай — временные логики ($\Box$ и $\boxminus$): нет.
3. Логика с универсальной модальностью $[\forall]$ — ?
4. Логика с модальностью транз. замыкания $\boxplus$ — да (Шкатов, 2004)
5. Другие замыкания (симметр., евклидово, эквивалентность) — ?

Подумать:

1. Что из доказательства не проходит для бимодальных логик?
2. Верна ли для бимодальных логик слабая теорема Макинсона?

   Логика всякой шкалы с двумя отношениями (W, R, S) *содержится в логике одной из четырех одноточечных шкал с двумя отношениями* $(\{e\}, r, s)$*?*

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, S, V) \models L$.

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.
Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, S, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W$: $R(x) = \varnothing$.

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.
Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, S, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Значит $x \not\models \Diamond\top$. Но тогда $x \not\models \Diamond'\top$.

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.

Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, S, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W$: $R(x) = \varnothing$.

Значит $x \not\models \Diamond\top$. Но тогда $x \not\models \Diamond'\top$. Значит, $S(x) = \varnothing$ и x-порожденная подмодель имеет вид: $M_x = (\{x\}, \varnothing, \varnothing, V_x)$. Далее как в теореме.

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ — непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. Тогда $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.
Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, S, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W$: $R(x) = \varnothing$.
Значит $x \not\models \Diamond\top$. Но тогда $x \not\models \Diamond'\top$. Значит, $S(x) = \varnothing$ и x-порожденная подмодель имеет вид: $M_x = (\{x\}, \varnothing, \varnothing, V_x)$. Далее как в теореме.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\ \exists (y\ x R y)$.

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.
Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, S, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W$: $R(x) = \varnothing$.
Значит $x \not\models \Diamond\top$. Но тогда $x \not\models \Diamond'\top$. Значит, $S(x) = \varnothing$ и x-порожденная подмодель имеет вид: $M_x = (\{x\}, \varnothing, \varnothing, V_x)$. Далее как в теореме.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\ \exists (y\ x R y)$.
Значит, $M_L \models \Diamond\top$. Но тогда $M_L \models \Diamond'\top$.

Теорема Макинсона для некот. бимодальных логик

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.
Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, S, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W$: $R(x) = \varnothing$.
Значит $x \not\models \Diamond\top$. Но тогда $x \not\models \Diamond'\top$. Значит, $S(x) = \varnothing$ и x-порожденная подмодель имеет вид: $M_x = (\{x\}, \varnothing, \varnothing, V_x)$. Далее как в теореме.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\ \exists (y\ x\,R\,y)$.
Значит, $M_L \models \Diamond\top$. Но тогда $M_L \models \Diamond'\top$. Значит, F_L — сериальна по обоим отношениям. Далее как в теореме. $\triangleleft$

Теорема (Е.З., 2020)

Пусть $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \Box')$ *— непротиворечивая нормальная бимодальная логика, причем* $L \vdash \Diamond\top \leftrightarrow \Diamond'\top$. *Тогда* $L \subseteq \mathbf{Triv}_2$ *или* $L \subseteq \mathbf{Ver}_2$.

Здесь $\mathbf{Triv}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box p \leftrightarrow p,\ \Box' p \leftrightarrow p\}$, $\mathbf{Ver}_2 = \mathbf{K}_2 \oplus \{\Box\bot,\ \Box'\bot\}$.
Доказательство. Каноническая модель $M_L = M = (W, R, S, V) \models L$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W$: $R(x) = \varnothing$.
Значит $x \not\models \Diamond\top$. Но тогда $x \not\models \Diamond'\top$. Значит, $S(x) = \varnothing$ и x-порожденная подмодель имеет вид: $M_x = (\{x\}, \varnothing, \varnothing, V_x)$. Далее как в теореме.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\ \exists (y\ x R y)$.
Значит, $M_L \models \Diamond\top$. Но тогда $M_L \models \Diamond'\top$. Значит, F_L — сериальна по обоим отношениям. Далее как в теореме. $\triangleleft$

Это покрывает логики с
– транзитивным замыканием: $\Box$ и $\boxplus$,
– симметричным замыканием: $\Box$ и $\boxdot$, и многие другие.

Конечная шкала и ее логика

Определение

Логика L — табличная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ некоторой конечной шкалы F.

Конечная шкала и ее логика

Определение

Логика L — табличная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ некоторой конечной шкалы F.

Каковы эти логики?

Конечная шкала и ее логика

Определение

Логика L — табличная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ некоторой конечной шкалы F.

Каковы эти логики?

Очевидно, они полны по Крипке.

Конечная шкала и ее логика

Определение

Логика L — *табличная*, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ некоторой конечной шкалы F.

Каковы эти логики?

Очевидно, они полны по Крипке.

Очевидно, они разрешимы. (А точнее, NP-полные.)

Конечная шкала и ее логика

Определение

Логика L — *табличная*, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ некоторой конечной шкалы F.

Каковы эти логики?

Очевидно, они полны по Крипке.

Очевидно, они разрешимы. (А точнее, NP-полные.)

Будут ли они конечно аксиоматизируемыми — вида $\mathbf{K} \oplus A$?

Конечная шкала и ее логика

Определение

Логика L — табличная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(F)$ некоторой конечной шкалы F.

Каковы эти логики?

Очевидно, они полны по Крипке.

Очевидно, они разрешимы. (А точнее, NP-полные.)

Будут ли они конечно аксиоматизируемыми — вида $\mathbf{K} \oplus A$?

Если да, можно ли построить аксиому A по конечной шкале F?

Две формулы

$$\mathrm{Height}^{\leqslant n}: \qquad \Box p \wedge \Box^2 p \wedge \ldots \wedge \Box^n p \to \Box^{n+1} p$$

Две формулы

$$\text{Height}^{\leqslant n}: \qquad \Box p \wedge \Box^2 p \wedge \ldots \wedge \Box^n p \to \Box^{n+1} p$$

$$\begin{aligned}\text{Width}^{\leqslant n}: \qquad \neg\big(\ & \Diamond p_1 \ \& \\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge p_2) \ \& \\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \ \& \ \ldots \\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge \ldots \wedge \neg p_n \wedge p_{n+1}) \ \big)\end{aligned}$$

Две формулы

$$\mathrm{Height}^{\leqslant n}: \qquad \Box p \wedge \Box^2 p \wedge \ldots \wedge \Box^n p \to \Box^{n+1} p$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Width}^{\leqslant n}: \qquad \neg(\ & \Diamond p_1\ \&\\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge p_2)\ \&\\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)\ \&\ \ldots\\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge \ldots \wedge \neg p_n \wedge p_{n+1})\ )\end{aligned}$$

Первую формулу часто обозначают Trans_n.

Две формулы

$$\mathrm{Height}^{\leqslant n}: \qquad \Box p \wedge \Box^2 p \wedge \ldots \wedge \Box^n p \to \Box^{n+1} p$$

$$\mathrm{Width}^{\leqslant n}: \qquad \neg\big(\ \Diamond p_1\ \&\ \Diamond(\neg p_1 \wedge p_2)\ \&\ \Diamond(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)\ \&\ \ldots\ \Diamond(\neg p_1 \wedge \ldots \wedge \neg p_n \wedge p_{n+1})\ \big)$$

Первую формулу часто обозначают Trans_n. Если обозначить $\Box^{\leqslant n} p = \Box p \wedge \Box^2 p \wedge \ldots \wedge \Box^n p$, то формула приобретет компактный вид:

$$\Box^{\leqslant n} p \ \to\ \Box^{n+1} p.$$

Две формулы

$$\text{Height}^{\leqslant n}: \qquad \Box p \wedge \Box^2 p \wedge \ldots \wedge \Box^n p \to \Box^{n+1} p$$

$$\begin{aligned}\text{Width}^{\leqslant n}: \qquad \neg\big(& \Diamond p_1 \ \& \\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge p_2) \ \& \\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \ \& \ \ldots \\ & \Diamond(\neg p_1 \wedge \ldots \wedge \neg p_n \wedge p_{n+1}) \ \big)\end{aligned}$$

Первую формулу часто обозначают Trans_n. Если обозначить $\Box^{\leqslant n} p = \Box p \wedge \Box^2 p \wedge \ldots \wedge \Box^n p$, то формула приобретет компактный вид:

$$\Box^{\leqslant n} p \ \to \ \Box^{n+1} p.$$

Вторую формулу обозначают Alt_n и пишут в эквивалентном виде:

$$\Box p_1 \vee \Box(p_1 \to p_2) \vee \Box(p_1 \wedge p_2 \to p_3) \vee \ldots \vee \Box(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to p_{n+1})$$

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы Height$^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$)

$$
\begin{aligned}
F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \quad &\Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \\
&\Longleftrightarrow \quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}
\end{aligned}
$$

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы Height$^{\leqslant n}$)

$$\begin{aligned} F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \quad &\Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \\ &\Longleftrightarrow \quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n} \end{aligned}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2)$

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \; = \; \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$
$$\Longleftrightarrow \quad R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы Height$^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \iff R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \iff R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы Height$^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \iff R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \iff R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$. Докажем основную эквивалентность:
$(\Longleftarrow)$

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы Height$^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \iff R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$
$$\iff R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$. Докажем основную эквивалентность:
$(\Longleftarrow)$ Пусть $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$ и $M, x \models \Box^{\leqslant n} p$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \iff R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$
$$\iff R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$. Докажем основную эквивалентность:
($\Longleftarrow$) Пусть $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$ и $M, x \models \Box^{\leqslant n} p$. Проверим $x \models \Box^{n+1} p$. Берем любой $y \in R^{n+1}(x)$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \;=\; \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы Height$^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \quad\Longleftrightarrow\quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$
$$\Longleftrightarrow\quad R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$. Докажем основную эквивалентность:
($\Longleftarrow$) Пусть $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$ и $M, x \models \Box^{\leqslant n} p$. Проверим $x \models \Box^{n+1} p$. Берем любой $y \in R^{n+1}(x)$. Тогда $y \in R^{\leqslant n}(x)$. А значит, $y \models p$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n\geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \iff R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$
$$\iff R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$. Докажем основную эквивалентность:
($\Longleftarrow$) Пусть $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$ и $M, x \models \Box^{\leqslant n} p$. Проверим $x \models \Box^{n+1} p$. Берем любой $y \in R^{n+1}(x)$. Тогда $y \in R^{\leqslant n}(x)$. А значит, $y \models p$.

($\Longrightarrow$) Допустим $R^{n+1} \not\subseteq R^{\leqslant n}$. Значит, $\exists x, y$: $x\, R^{n+1}\, y$, но $\neg(x\, R^{\leqslant n}\, y)$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы Height$^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \iff R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$
$$\iff R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$. Докажем основную эквивалентность:
($\Longleftarrow$) Пусть $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$ и $M, x \models \Box^{\leqslant n} p$. Проверим $x \models \Box^{n+1} p$. Берем любой $y \in R^{n+1}(x)$. Тогда $y \in R^{\leqslant n}(x)$. А значит, $y \models p$.

($\Longrightarrow$) Допустим $R^{n+1} \not\subseteq R^{\leqslant n}$. Значит, $\exists x, y$: $x\, R^{n+1}\, y$, но $\neg(x\, R^{\leqslant n}\, y)$.
Угадаем оценку переменной: $V(p) := R^{\leqslant n}(x)$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы Height$^{\leqslant n}$)

$$
\begin{aligned}
F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \quad &\iff \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \\
&\iff \quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}
\end{aligned}
$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$. Докажем основную эквивалентность:
($\Longleftarrow$) Пусть $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$ и $M, x \models \Box^{\leqslant n} p$. Проверим $x \models \Box^{n+1} p$. Берем любой $y \in R^{n+1}(x)$. Тогда $y \in R^{\leqslant n}(x)$. А значит, $y \models p$.

($\Longrightarrow$) Допустим $R^{n+1} \not\subseteq R^{\leqslant n}$. Значит, $\exists x, y$: $x\, R^{n+1}\, y$, но $\neg(x\, R^{\leqslant n}\, y)$.
Угадаем оценку переменной: $V(p) := R^{\leqslant n}(x)$. Очевидно: $y \not\models p$.

Формула ограничения глубины шкалы: семантика

В шкале $F = (W, R)$ обозначим: $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
Транзитивное замыкание: $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n \geqslant 1} R^n$.

Лемма (Семантика формулы $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$)

$$F \models \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p \quad \Longleftrightarrow \quad R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$$
$$\Longleftrightarrow \quad R^{+} \subseteq R^{\leqslant n}$$

Доказательство.

Если $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$, то $R^{n+2} \subseteq (R^{n+1} \cup \ldots \cup R^2) \subseteq R^{\leqslant n}$ и т.д.
Таким образом, $R^+ \subseteq R^{\leqslant n}$. Докажем основную эквивалентность:
($\Longleftarrow$) Пусть $R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n}$ и $M, x \models \Box^{\leqslant n} p$. Проверим $x \models \Box^{n+1} p$. Берем любой $y \in R^{n+1}(x)$. Тогда $y \in R^{\leqslant n}(x)$. А значит, $y \models p$.

($\Longrightarrow$) Допустим $R^{n+1} \not\subseteq R^{\leqslant n}$. Значит, $\exists x, y$: $x R^{n+1} y$, но $\neg(x R^{\leqslant n} y)$.
Угадаем оценку переменной: $V(p) := R^{\leqslant n}(x)$. Очевидно: $y \not\models p$.
Тогда $x \models \Box^{\leqslant n} p$, но $x \not\models \Box^{n+1} p$. Мы опровергли формулу. $\Box$

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\quad \Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\,(R_L)^k\,y$ для $\forall k \leqslant n$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\,(R_L)^k\, y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула Height$^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\,(R_L)^k\,y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.
Поскольку $A_1, \ldots, A_n \notin y$, то дизъюнкция $A := (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \notin y$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\,(R_L)^k\,y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.
Поскольку $A_1, \ldots, A_n \notin y$, то дизъюнкция $A := (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \notin y$.
Так как $\Box^k A_k \in x$ и $\mathbf{K} \vdash \Box^k A_k \to \Box^k A$, то $\Box^k A \in x$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\,(R_L)^k\,y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.
Поскольку $A_1, \ldots, A_n \notin y$, то дизъюнкция $A := (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \notin y$.
Так как $\Box^k A_k \in x$ и $\mathbf{K} \vdash \Box^k A_k \to \Box^k A$, то $\Box^k A \in x$.
Тогда $(\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A) \in x$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x \, (R_L)^k \, y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.
Поскольку $A_1, \dots, A_n \notin y$, то дизъюнкция $A := (A_1 \vee \dots \vee A_n) \notin y$.
Так как $\Box^k A_k \in x$ и $\mathbf{K} \vdash \Box^k A_k \to \Box^k A$, то $\Box^k A \in x$.
Тогда $(\Box A \wedge \dots \wedge \Box^n A) \in x$.
Но $L \vdash \Box A \wedge \dots \wedge \Box^n A \to \Box^{n+1} A$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\,(R_L)^k\,y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.
Поскольку $A_1, \ldots, A_n \notin y$, то дизъюнкция $A := (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \notin y$.
Так как $\Box^k A_k \in x$ и $\mathbf{K} \vdash \Box^k A_k \to \Box^k A$, то $\Box^k A \in x$.
Тогда $(\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A) \in x$.
Но $L \vdash \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A \to \Box^{n+1} A$.
Значит, $\Box^{n+1} A \in x$. Но $A \notin y$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\,(R_L)^k\,y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.
Поскольку $A_1, \ldots, A_n \notin y$, то дизъюнкция $A := (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \notin y$.
Так как $\Box^k A_k \in x$ и $\mathbf{K} \vdash \Box^k A_k \to \Box^k A$, то $\Box^k A \in x$.
Тогда $(\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A) \in x$.
Но $L \vdash \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A \to \Box^{n+1} A$.
Значит, $\Box^{n+1} A \in x$. Но $A \notin y$. Получилось $\neg x\,(R_L)^{n+1}\,y$.

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\,(R_L)^k\,y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.
Поскольку $A_1, \ldots, A_n \notin y$, то дизъюнкция $A := (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \notin y$.
Так как $\Box^k A_k \in x$ и $\mathbf{K} \vdash \Box^k A_k \to \Box^k A$, то $\Box^k A \in x$.
Тогда $(\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A) \in x$.
Но $L \vdash \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A \to \Box^{n+1} A$.
Значит, $\Box^{n+1} A \in x$. Но $A \notin y$. Получилось $\neg x\,(R_L)^{n+1}\,y$.
Таким образом, пара (x, y) не лежит в левой части. ◁

Формула ограничения глубины: каноничность

Лемма

Формула $\mathsf{Height}^{\leqslant n}$: $\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{n+1} p$ — *каноническая.*

Доказательство. Для $L := \mathbf{K} \oplus \mathsf{Height}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathsf{Height}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме это значит, что надо проверить включение:

$$(R_L)^{n+1} \subseteq (R_L)^{\leqslant n}.$$

Пусть (x, y) не лежит в правой части. Тогда $\neg x\, (R_L)^k\, y$ для $\forall k \leqslant n$.
По свойству $(R_L)^k$ это значит:
найдется формула A_k, такая что $\Box^k A_k \in x$, но $A_k \notin y$.
Поскольку $A_1, \ldots, A_n \notin y$, то дизъюнкция $A := (A_1 \vee \ldots \vee A_n) \notin y$.
Так как $\Box^k A_k \in x$ и $\mathbf{K} \vdash \Box^k A_k \to \Box^k A$, то $\Box^k A \in x$.
Тогда $(\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A) \in x$.
Но $L \vdash \Box A \wedge \ldots \wedge \Box^n A \to \Box^{n+1} A$.
Значит, $\Box^{n+1} A \in x$. Но $A \notin y$. Получилось $\neg x\, (R_L)^{n+1}\, y$.
Таким образом, пара (x, y) не лежит в левой части. $\triangleleft$

Формула ограничения ширины шкалы: семантика

Лемма

$F \models \mathrm{Width}^{\leqslant n} \iff$ *каждый* $x \in W$ *имеет* $|R(x)| \leqslant n$ *последователей.*

Формула ограничения ширины шкалы: семантика

Лемма

$F \models \mathrm{Width}^{\leqslant n} \iff$ *каждый* $x \in W$ *имеет* $|R(x)| \leqslant n$ *последователей.*

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Если $M, x \not\models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$, то есть $\Diamond C_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond C_{n+1}$, где C_i попарно несовместимые элементарные конъюнкции, то $|R(x)| > n$.

Формула ограничения ширины шкалы: семантика

Лемма

$F \models \mathrm{Width}^{\leqslant n} \iff$ *каждый* $x \in W$ *имеет* $|R(x)| \leqslant n$ *последователей.*

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Если $M, x \not\models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$, то есть $\Diamond C_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond C_{n+1}$, где C_i попарно несовместимые элементарные конъюнкции, то $|R(x)| > n$.

($\Longrightarrow$) Допустим $|R(x)| > n$; то есть $\exists^{\neq} y_1, \ldots, y_{n+1} \in R(x)$.

Формула ограничения ширины шкалы: семантика

Лемма

$F \models \mathrm{Width}^{\leqslant n} \iff$ *каждый* $x \in W$ *имеет* $|R(x)| \leqslant n$ *последователей.*

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Если $M, x \not\models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$, то есть $\Diamond C_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond C_{n+1}$, где C_i попарно несовместимые элементарные конъюнкции, то $|R(x)| > n$.

($\Longrightarrow$) Допустим $|R(x)| > n$; то есть $\exists^{\neq} y_1, \ldots, y_{n+1} \in R(x)$.
Угадаем оценку: $y_1 \models p_1$, ..., $y_{n+1} \models p_{n+1}$ (и только в них).

Формула ограничения ширины шкалы: семантика

Лемма

$F \models \mathrm{Width}^{\leqslant n} \iff$ *каждый* $x \in W$ *имеет* $|R(x)| \leqslant n$ *последователей.*

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Если $M, x \not\models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$, то есть $\Diamond C_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond C_{n+1}$, где C_i попарно несовместимые элементарные конъюнкции, то $|R(x)| > n$.

($\Longrightarrow$) Допустим $|R(x)| > n$; то есть $\exists^{\neq} y_1, \ldots, y_{n+1} \in R(x)$.
Угадаем оценку: $y_1 \models p_1$, ..., $y_{n+1} \models p_{n+1}$ (и только в них).
Тогда очевидно, что $x \not\models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$. $\square$

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ — *каноническая.*

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме, надо проверить: $|R_L(x)| \leqslant n$ для всех $x \in W_L$.

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме, надо проверить: $|R_L(x)| \leqslant n$ для всех $x \in W_L$.

Допустим противное: $x \, R_L \, y_i$ для попарно разных $y_1, \ldots, y_{n+1} \in W_L$.

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме, надо проверить: $|R_L(x)| \leqslant n$ для всех $x \in W_L$.

Допустим противное: $x\,R_L\,y_i$ для попарно разных $y_1, \dots, y_{n+1} \in W_L$.
Так как каноническая модель M_L — модально различимая, то найдутся формулы $A_1, \dots, A_{n+1}$, такие что $y_i \models A_j \Leftrightarrow i = j$.

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме, надо проверить: $|R_L(x)| \leqslant n$ для всех $x \in W_L$.

Допустим противное: $x \, R_L \, y_i$ для попарно разных $y_1, \ldots, y_{n+1} \in W_L$.
Так как каноническая модель M_L — модально различимая, то найдутся формулы $A_1, \ldots, A_{n+1}$, такие что $y_i \models A_j \Leftrightarrow i = j$. Тогда:

$$x \models \Diamond A_1,$$

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме, надо проверить: $|R_L(x)| \leqslant n$ для всех $x \in W_L$.

Допустим противное: $x \, R_L \, y_i$ для попарно разных $y_1, \ldots, y_{n+1} \in W_L$.
Так как каноническая модель M_L — модально различимая, то найдутся формулы $A_1, \ldots, A_{n+1}$, такие что $y_i \models A_j \Leftrightarrow i = j$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
&x \models \Diamond A_1,\\
&x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge A_2),
\end{aligned}
$$

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме, надо проверить: $|R_L(x)| \leqslant n$ для всех $x \in W_L$.

Допустим противное: $x\, R_L\, y_i$ для попарно разных $y_1, \ldots, y_{n+1} \in W_L$.
Так как каноническая модель M_L — модально различимая, то найдутся формулы $A_1, \ldots, A_{n+1}$, такие что $y_i \models A_j \Leftrightarrow i = j$. Тогда:

$$x \models \Diamond A_1,$$
$$x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge A_2),$$
$$x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3), \ \ldots$$

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме, надо проверить: $|R_L(x)| \leqslant n$ для всех $x \in W_L$.

Допустим противное: $x\, R_L\, y_i$ для попарно разных $y_1, \ldots, y_{n+1} \in W_L$.
Так как каноническая модель M_L — модально различимая, то найдутся формулы $A_1, \ldots, A_{n+1}$, такие что $y_i \models A_j \Leftrightarrow i = j$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
&x \models \Diamond A_1, \\
&x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge A_2), \\
&x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3), \ \ldots \\
&x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n \wedge A_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Формула ограничения ширины шкалы: каноничность

Лемма

Формула $\mathrm{Width}^{\leqslant n}$ *— каноническая.*

Доказательство. Для $L = \mathbf{K} \oplus \mathrm{Width}^{\leqslant n}$ проверим: $F_L \models \mathrm{Width}^{\leqslant n}$.
По предыдущей лемме, надо проверить: $|R_L(x)| \leqslant n$ для всех $x \in W_L$.

Допустим противное: $x\, R_L\, y_i$ для попарно разных $y_1, \ldots, y_{n+1} \in W_L$.
Так как каноническая модель M_L — модально различимая, то найдутся формулы $A_1, \ldots, A_{n+1}$, такие что $y_i \models A_j \Leftrightarrow i = j$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
&x \models \Diamond A_1,\\
&x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge A_2),\\
&x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3), \ \ldots\\
&x \models \Diamond(\neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n \wedge A_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Получили $x \not\models \mathrm{Width}^{\leqslant n}[p_i \mapsto A_i]$. Однако эта формула в L. $\triangleleft$

Соединяем две формулы

$$\mathsf{Finite}_n \; := \; \mathsf{Height}^{\leqslant n} \,\&\, \mathsf{Width}^{\leqslant n}.$$

Соединяем две формулы

$$\mathrm{Finite}_n \;:=\; \mathrm{Height}^{\leqslant n} \;\&\; \mathrm{Width}^{\leqslant n}.$$

Следствие

$F \models \mathrm{Finite}_n \quad \Longrightarrow \quad$ *каждая подшкала F_x, порожденная одной точкой, конечна. Более точно, она имеет размер $|W_x| \leqslant Z_n$, где*

$$Z_n \;=\; 1 + n + n^2 + \ldots + n^n.$$

Соединяем две формулы

$$\mathsf{Finite}_n \ := \ \mathsf{Height}^{\leqslant n} \ \& \ \mathsf{Width}^{\leqslant n}.$$

Следствие

$F \models \mathsf{Finite}_n \quad \Longrightarrow \quad$ *каждая подшкала F_x, порожденная одной точкой, конечна. Более точно, она имеет размер $|W_x| \leqslant Z_n$,* где

$$Z_n \ = \ 1 + n + n^2 + \ldots + n^n.$$

Доказательство.

Конус F_x состоит из точек:

$$W_x = R^*(x) = \{x\} \cup R(x) \cup \ldots \cup R^n(x).$$

Соединяем две формулы

$$\mathrm{Finite}_n \;:=\; \mathrm{Height}^{\leqslant n} \,\&\, \mathrm{Width}^{\leqslant n}.$$

Следствие

$F \models \mathrm{Finite}_n \quad\Longrightarrow\quad$ *каждая подшкала F_x, порожденная одной точкой, конечна. Более точно, она имеет размер $|W_x| \leqslant Z_n$, где*

$$Z_n \;=\; 1 + n + n^2 + \ldots + n^n.$$

Доказательство.

Конус F_x состоит из точек:

$$W_x = R^*(x) = \{x\} \cup R(x) \cup \ldots \cup R^n(x).$$

У каждой точки $\leqslant n$ последователей. Получаем требуемое. □

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1$: $L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1$: $L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1$: $L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1$: $L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — *таблична* $\iff$ $\exists n \geqslant 1$: $L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L *— таблична* $\iff$ $\exists n \geqslant 1$*:* $L \vdash \mathrm{Finite}_n$*.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1\colon\ L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.
Таких попарно неизоморфных шкал — лишь конечное число; соберем по одному представителю — получим конечное множество шкал $\mathbb{F}$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1$: $L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.
Таких попарно неизоморфных шкал — лишь конечное число; соберем по одному представителю — получим конечное множество шкал $\mathbb{F}$.

Утверждение. $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1$: $L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.
Таких попарно неизоморфных шкал — лишь конечное число; соберем по одному представителю — получим конечное множество шкал $\mathbb{F}$.

Утверждение. $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$. То есть $L \vdash A \Leftrightarrow \mathbb{F} \models A$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1\colon\ L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.
Таких попарно неизоморфных шкал — лишь конечное число; соберем по одному представителю — получим конечное множество шкал $\mathbb{F}$.

Утверждение. $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$. То есть $L \vdash A \Leftrightarrow \mathbb{F} \models A$.

$(\Rightarrow)$ $M_L \models L$. Поэтому $M_x \models L$ для $\forall x \in W_L$. Но M_x — конечная и модально различимая. Значит, $F_x \models L$ — это для каждой $F_x \in \mathbb{F}$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1\colon\ L \vdash \mathrm{Finite}_n.$

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.
Таких попарно неизоморфных шкал — лишь конечное число; соберем по одному представителю — получим конечное множество шкал $\mathbb{F}$.

Утверждение. $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$. То есть $L \vdash A \Leftrightarrow \mathbb{F} \models A$.

$(\Rightarrow)$ $M_L \models L$. Поэтому $M_x \models L$ для $\forall x \in W_L$. Но M_x — конечная и модально различимая. Значит, $F_x \models L$ — это для каждой $F_x \in \mathbb{F}$.
$(\Leftarrow)$ Если $L \nvdash A$, то A опровергается в некоторой точке x канонической модели M_L.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1\colon\ L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.
Таких попарно неизоморфных шкал — лишь конечное число; соберем по одному представителю — получим конечное множество шкал $\mathbb{F}$.

Утверждение. $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$. То есть $L \vdash A \Leftrightarrow \mathbb{F} \models A$.

($\Rightarrow$) $M_L \models L$. Поэтому $M_x \models L$ для $\forall x \in W_L$. Но M_x — конечная и модально различимая. Значит, $F_x \models L$ — это для каждой $F_x \in \mathbb{F}$.
($\Leftarrow$) Если $L \nvdash A$, то A опровергается в некоторой точке x канонической модели M_L. Тогда $F_x \not\models A$ для некоторой шкалы $F_x \in \mathbb{F}$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1\colon\ L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.
Таких попарно неизоморфных шкал — лишь конечное число; соберем по одному представителю — получим конечное множество шкал $\mathbb{F}$.

Утверждение. $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$. То есть $L \vdash A \Leftrightarrow \mathbb{F} \models A$.

($\Rightarrow$) $M_L \models L$. Поэтому $M_x \models L$ для $\forall x \in W_L$. Но M_x — конечная и модально различимая. Значит, $F_x \models L$ — это для каждой $F_x \in \mathbb{F}$.
($\Leftarrow$) Если $L \nvdash A$, то A опровергается в некоторой точке x канонической модели M_L. Тогда $F_x \not\models A$ для некоторой шкалы $F_x \in \mathbb{F}$.

Теперь $F := \biguplus\{F_x \mid F_x \in \mathbb{F}\}$.

Критерий табличности

Теорема (Чагров (1980-е), McKay (1960-е для Int))

Непротиворечивая логика L — таблична $\iff$ $\exists n \geqslant 1\colon\ L \vdash \mathrm{Finite}_n$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $L = \mathrm{Logic}(F)$, где $|F| = n$, то $F \models \mathrm{Finite}_n$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, для некоторого $n \geqslant 1$.
Формула Finite_n — каноническая. Поэтому $F_L \models \mathrm{Finite}_n$.
Значит, каждая порожденная точкой подшкала F_x имеет размер $\leqslant Z_n$.
Таких попарно неизоморфных шкал — лишь конечное число; соберем по одному представителю — получим конечное множество шкал $\mathbb{F}$.

Утверждение. $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$. То есть $L \vdash A \Leftrightarrow \mathbb{F} \models A$.

($\Rightarrow$) $M_L \models L$. Поэтому $M_x \models L$ для $\forall x \in W_L$. Но M_x — конечная и модально различимая. Значит, $F_x \models L$ — это для каждой $F_x \in \mathbb{F}$.
($\Leftarrow$) Если $L \nvdash A$, то A опровергается в некоторой точке x канонической модели M_L. Тогда $F_x \not\models A$ для некоторой шкалы $F_x \in \mathbb{F}$.

Теперь $F := \biguplus\{F_x \mid F_x \in \mathbb{F}\}$. $L = \mathrm{Logic}(F)$ логика конечной шкалы. $\triangleleft$

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Доказательство.

L таблична $\implies$ $L \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ $L' \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ L' таблична.

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Доказательство.

L таблична $\implies$ $L \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ $L' \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ L' таблична.
В **док-ве** Критерия мы доказали: если $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, то L — логика некоторого конечного семейства шкал размера $\leqslant Z_n$.

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Доказательство.

L таблична $\implies$ $L \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ $L' \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ L' таблична.
В **док-ве** Критерия мы доказали: если $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, то L — логика некоторого конечного семейства шкал размера $\leqslant Z_n$. Таких шкал (а значит, и семейств), имеющих разные логики, — конечное число. $\square$

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Доказательство.

L таблична $\implies$ $L \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ $L' \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ L' таблична.
В **док-ве** Критерия мы доказали: если $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, то L — логика некоторого конечного семейства шкал размера $\leqslant Z_n$. Таких шкал (а значит, и семейств), имеющих разные логики, — конечное число. $\square$

Лемма

$L \subsetneq L'$ *и между ними нет логик* $\implies$ L' *кон. акс. над* L.

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Доказательство.

L таблична $\Longrightarrow$ $L \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\Longrightarrow$ $L' \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\Longrightarrow$ L' таблична.
В **док-ве** Критерия мы доказали: если $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, то L — логика некоторого конечного семейства шкал размера $\leqslant Z_n$. Таких шкал (а значит, и семейств), имеющих разные логики, — конечное число. □

Лемма

$L \subsetneq L'$ и между ними нет логик $\Longrightarrow$ L' кон. акс. над L.

Доказательство.

Возьмем любую формулу $A \in L' \setminus L$.

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Доказательство.

L таблична $\implies$ $L \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ $L' \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ L' таблична.
В **док-ве** Критерия мы доказали: если $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, то L — логика некоторого конечного семейства шкал размера $\leqslant Z_n$. Таких шкал (а значит, и семейств), имеющих разные логики, — конечное число. □

Лемма

$L \subsetneq L'$ *и между ними нет логик* $\implies$ L' *кон. акс. над* L.

Доказательство.

Возьмем любую формулу $A \in L' \setminus L$. **Утв.** $L \oplus A = L'$.

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Доказательство.

L таблична $\implies$ $L \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ $L' \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ L' таблична.
В **док-ве** Критерия мы доказали: если $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, то L — логика некоторого конечного семейства шкал размера $\leqslant Z_n$. Таких шкал (а значит, и семейств), имеющих разные логики, — конечное число. □

Лемма

$L \subsetneq L'$ *и между ними нет логик* $\implies$ L' *кон. акс. над* L.

Доказательство.

Возьмем любую формулу $A \in L' \setminus L$. **Утв.** $L \oplus A = L'$.
$(\subseteq)$ очевидно.

Расширения табличной логики

Опр. L' — расширение L, если $L \subseteq L'$ и L' — непротиворечива.

Лемма

Табличная логика L имеет конечное число расширений, они табличны.

Доказательство.

L таблична $\implies$ $L \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ $L' \vdash \mathrm{Finite}_n$ $\implies$ L' таблична.
В **док-ве** Критерия мы доказали: если $L \vdash \mathrm{Finite}_n$, то L — логика некоторого конечного семейства шкал размера $\leqslant Z_n$. Таких шкал (а значит, и семейств), имеющих разные логики, — конечное число. □

Лемма

$L \subsetneq L'$ *и между ними нет логик* $\implies$ L' *кон. акс. над* L.

Доказательство.

Возьмем любую формулу $A \in L' \setminus L$. **Утв.** $L \oplus A = L'$.
($\subseteq$) очевидно. Если бы было $\subsetneq$, то $L \subsetneq L \oplus A \subsetneq L'$, противоречие. □

Конечная аксиоматизируемость табличных логик

Theorem (Чагров (1980-е); McKay, de Jongh (1960-е для Int))

Всякая табличная логика — конечно аксиоматизируема.

Доказательство.

Пусть L — табличная.

Конечная аксиоматизируемость табличных логик

Theorem (Чагров (1980-е); McKay, de Jongh (1960-е для Int))

Всякая табличная логика — конечно аксиоматизируема.

Доказательство.

Пусть L — табличная. Тогда $L \supseteq L_0 := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n$, для некоторого n.

Конечная аксиоматизируемость табличных логик

Theorem (Чагров (1980-е); McKay, de Jongh (1960-е для Int))

Всякая табличная логика — конечно аксиоматизируема.

Доказательство.

Пусть L — табличная. Тогда $L \supseteq L_0 := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n$, для некоторого n.
Логика L_0 — табличная, значит, имеет конечное число расширений.

Конечная аксиоматизируемость табличных логик

Theorem (Чагров (1980-е); McKay, de Jongh (1960-е для Int))

Всякая табличная логика — конечно аксиоматизируема.

Доказательство.

Пусть L — табличная. Тогда $L \supseteq L_0 := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n$, для некоторого n.
Логика L_0 — табличная, значит, имеет конечное число расширений.
Значит, существует конечная цепь логик (между соседними нет логик):

$$\mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n \ = \ L_0 \ \subsetneq L_1 \ \subsetneq \ \ldots \ \subsetneq \ L_s \ = \ L.$$

Конечная аксиоматизируемость табличных логик

Theorem (Чагров (1980-е); McKay, de Jongh (1960-е для Int))

Всякая табличная логика — конечно аксиоматизируема.

Доказательство.

Пусть L — табличная. Тогда $L \supseteq L_0 := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n$, для некоторого n.
Логика L_0 — табличная, значит, имеет конечное число расширений.
Значит, существует конечная цепь логик (между соседними нет логик):

$$\mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n \;=\; L_0 \;\subsetneq L_1 \;\subsetneq\; \ldots \;\subsetneq\; L_s \;=\; L.$$

Каждая следующая — конечно аксиоматизируема над предыдущей.

Конечная аксиоматизируемость табличных логик

Theorem (Чагров (1980-е); McKay, de Jongh (1960-е для Int))

Всякая табличная логика — конечно аксиоматизируема.

Доказательство.

Пусть L — табличная. Тогда $L \supseteq L_0 := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n$, для некоторого n. Логика L_0 — табличная, значит, имеет конечное число расширений. Значит, существует конечная цепь логик (между соседними нет логик):

$$\mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n \;=\; L_0 \;\subsetneq L_1 \;\subsetneq\; \ldots \;\subsetneq\; L_s \;=\; L.$$

Каждая следующая — конечно аксиоматизируема над предыдущей. Значит, L — конечно аксиоматизируема (над $\mathbf{K}$). □

Конечная аксиоматизируемость табличных логик

Theorem (Чагров (1980-е); McKay, de Jongh (1960-е для Int))

Всякая табличная логика — конечно аксиоматизируема.

Доказательство.

Пусть L — табличная. Тогда $L \supseteq L_0 := \mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n$, для некоторого n.
Логика L_0 — табличная, значит, имеет конечное число расширений.
Значит, существует конечная цепь логик (между соседними нет логик):

$$\mathbf{K} \oplus \mathrm{Finite}_n \;=\; L_0 \;\subsetneq L_1 \;\subsetneq\; \ldots \;\subsetneq\; L_s \;=\; L.$$

Каждая следующая — конечно аксиоматизируема над предыдущей.
Значит, L — конечно аксиоматизируема (над $\mathbf{K}$). □

Как строить по конечной шкале F формулу A: $\mathrm{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$???

Обобщения теоремы о конечн. акс. табличных логик

1. Для полимодальных логик — да!

Обобщения теоремы о конечн. акс. табличных логик

1. Для полимодальных логик — да!
2. В том числе полимодальных временных логиу ($\Box_i$ и $\boxminus_i$)

Обобщения теоремы о конечн. акс. табличных логик

1. Для полимодальных логик — да!
2. В том числе полимодальных временных логиу ($\Box_i$ и $\boxminus_i$)
3. И даже логик с модальностью какой-нибудь «операции» (обратное отношение, универсальная модальность, транзитивное замыкание, симметричное замыкание, прочие замыкания).

Обобщения теоремы о конечн. акс. табличных логик

1. Для полимодальных логик — да!
2. В том числе полимодальных временных логиу ($\Box_i$ и $\boxminus_i$)
3. И даже логик с модальностью какой-нибудь «операции» (обратное отношение, универсальная модальность, транзитивное замыкание, симметричное замыкание, прочие замыкания).

Конец лекции 7. Спасибо за внимание!