Модальная логика. Лекция 6: Модальные морфизмы, порожденные подмодели, их применения: модальные логики кластеров, канонические порожденные подмодели, модальные логики Triv и Ver, слабая и сильная теоремы Макинсона.

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

30 октября 2020 года

2. Модальный морфизм (или р-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

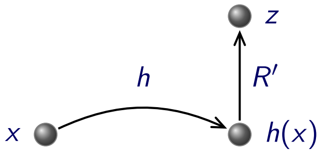
Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.



2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

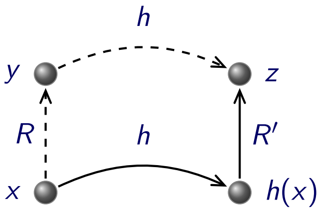
Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.



2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

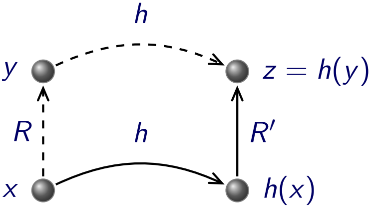
Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.



2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если h — сюръекция, то пишем $h\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $h\colon F \twoheadrightarrow F'$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если h — сюръекция, то пишем $h\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $h\colon F \twoheadrightarrow F'$.
- Пишут $M \twoheadrightarrow M'$, если $\exists$ сюръективный p-морфизм $h\colon M \twoheadrightarrow M'$;

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если h — сюръекция, то пишем $h\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $h\colon F \twoheadrightarrow F'$.
- Пишут $M \twoheadrightarrow M'$, если $\exists$ сюръективный p-морфизм $h\colon M \twoheadrightarrow M'$; при этом говорят, что M' — p-морфный образ модели M.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если h — сюръекция, то пишем $h\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $h\colon F \twoheadrightarrow F'$.
- Пишут $M \twoheadrightarrow M'$, если $\exists$ сюръективный p-морфизм $h\colon M \to M'$; при этом говорят, что M' — p-морфный образ модели M.
- Аналогично $F \twoheadrightarrow F'$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $h\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', h(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$;

(back) если $h(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $h(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если h — сюръекция, то пишем $h\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $h\colon F \twoheadrightarrow F'$.
- Пишут $M \twoheadrightarrow M'$, если $\exists$ сюръективный p-морфизм $h\colon M \twoheadrightarrow M'$; при этом говорят, что M' — p-морфный образ модели M.
- Аналогично $F \twoheadrightarrow F'$.

Интуитивно — это «склеивание» некоторых точек шкалы (модели).

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$*. Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A.$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A:

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$*. Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$*. Тогда для любой формулы* A*:*

3. $F, x \models A \implies F', h(x) \models A.$

2. Модальный морфизм (или р-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', h(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

3. $F, x \models A \implies F', h(x) \models A$.
4. $F \models A \implies F' \models A$.

Доказательство. (1) Доказано. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A:

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A:

3. $F, x \models A \implies F', h(x) \models A$.
4. $F \models A \implies F' \models A$.

Доказательство. (1) Доказано. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A*:*
3. $F, x \models A \implies F', h(x) \models A$.
4. $F \models A \implies F' \models A$.

Доказательство. (1) Доказано. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка. Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', h(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

Доказательство. (1) Доказано. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$.
Какую оценку взять на F?

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A:

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A:

3. $F, x \models A \implies F', h(x) \models A.$
4. $F \models A \implies F' \models A.$

Доказательство. (1) Доказано. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$.
Какую оценку взять на F? Такую: $x \models p \ \leftrightharpoons\ h(x) \models p$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

3. $F, x \models A \implies F', h(x) \models A.$
4. $F \models A \implies F' \models A.$

Доказательство. (1) Доказано. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$.
Какую оценку взять на F? Такую: $x \models p \leftrightharpoons h(x) \models p$.
Получили модель $M = (W, R, V)$. Тогда $h\colon M \twoheadrightarrow M'$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. Тогда для любой формулы A:

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. Тогда для любой формулы A:

3. $F, x \models A \implies F', h(x) \models A$.
4. $F \models A \implies F' \models A$.

Доказательство. (1) Доказано. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$.
Какую оценку взять на F? Такую: $x \models p \ \leftrightharpoons\ h(x) \models p$.
Получили модель $M = (W, R, V)$. Тогда $h\colon M \twoheadrightarrow M'$.
Кроме того $\exists x \in W\colon h(x) = x'$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $h\colon M \twoheadrightarrow M'$. Тогда для любой формулы A:

1. $M, x \models A \iff M', h(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. Тогда для любой формулы A:

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', h(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

Доказательство. (1) Доказано. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$.
Какую оценку взять на F? Такую: $x \models p \ \leftrightharpoons\ h(x) \models p$.
Получили модель $M = (W, R, V)$. Тогда $h\colon M \twoheadrightarrow M'$.
Кроме того $\exists x \in W\colon h(x) = x'$. Поэтому $M, x \not\models A$. ◁

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$).

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F \twoheadrightarrow F', \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F \twoheadrightarrow F', \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ **Сл. 1.** Класс иррефлексивных шкал — модально не определим:

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если } F \in \mathbb{F} \text{ и } F \twoheadrightarrow F', \text{ то } F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ **Сл. 1.** Класс иррефлексивных шкал — модально не определим: так как имеем сюръективный p-морфизм $h\colon (\mathbb{Z}, <) \twoheadrightarrow (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$.

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ *замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал* ($\twoheadrightarrow$). *То есть:*

$$\text{если}\quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F \twoheadrightarrow F', \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ **Сл. 1.** Класс иррефлексивных шкал — модально не определим: так как имеем сюръективный p-морфизм $h\colon (\mathbb{Z}, <) \twoheadrightarrow (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$.

По доказанной теореме, для всякой модальной формулы A:

$$(\mathbb{Z}, <) \models A \quad \Longrightarrow \quad (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\}) \models A.$$

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F \twoheadrightarrow F', \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ **Сл. 1.** Класс иррефлексивных шкал — модально не определим: так как имеем сюръективный p-морфизм $h\colon (\mathbb{Z}, <) \twoheadrightarrow (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$.

По доказанной теореме, для всякой модальной формулы A:

$$(\mathbb{Z}, <) \models A \quad \Longrightarrow \quad (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\}) \models A.$$

Эти шкалы — контрпример к импликации $\Longleftarrow$:

$$(\mathbb{Z}, <) \not\models \Box p \to p, \quad \text{но} \quad (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\}) \models \Box p \to p.$$

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F \twoheadrightarrow F', \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ **Сл. 1.** Класс иррефлексивных шкал — модально не определим: так как имеем сюръективный p-морфизм $h\colon (\mathbb{Z}, <) \twoheadrightarrow (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$.

По доказанной теореме, для всякой модальной формулы A:

$$(\mathbb{Z}, <) \models A \quad \Longrightarrow \quad (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\}) \models A.$$

Эти шкалы — контрпример к импликации $\Longleftarrow$:

$$(\mathbb{Z}, <) \not\models \Box p \to p, \quad \text{но} \quad (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\}) \models \Box p \to p.$$

$\Rightarrow$ **Сл. 2.** Класс всех бесконечных шкал — модально не определим.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель. Для $X \subseteq W$ обозначаем:
$R|_X = R \cap (X \times X)$ — ограничение отношения R на множество X.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель. Для $X \subseteq W$ обозначаем:
$R|_X = R \cap (X \times X)$ — ограничение отношения R на множество X.

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

(1) $\varnothing \neq W' \subseteq W$, (2) $R' = R|_{W'}$, (3) $V'(p) = V(p) \cap W'$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель. Для $X \subseteq W$ обозначаем:
$R|_X = R \cap (X \times X)$ — ограничение отношения R на множество X.

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

(1) $\varnothing \neq W' \subseteq W$, (2) $R' = R|_{W'}$, (3) $V'(p) = V(p) \cap W'$.

(3) можно переписать так: $\forall x \in W' \;\; (M', x \models p \Leftrightarrow M, x \models p)$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель. Для $X \subseteq W$ обозначаем:
$R|_X = R \cap (X \times X)$ — ограничение отношения R на множество X.

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

(1) $\varnothing \neq W' \subseteq W$, (2) $R' = R|_{W'}$, (3) $V'(p) = V(p) \cap W'$.

(3) можно переписать так: $\forall x \in W' \ \ (M', x \models p \Leftrightarrow M, x \models p)$.

Подмодели — для модальной логики не дают желаемого эффекта:
Пусть $W = \{x, y\}$, пусть $R = \{\langle x, y\rangle\}$. Тогда $M, x \models \Diamond\top$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель. Для $X \subseteq W$ обозначаем:
$R|_X = R \cap (X \times X)$ — ограничение отношения R на множество X.

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

(1) $\varnothing \neq W' \subseteq W$, (2) $R' = R|_{W'}$, (3) $V'(p) = V(p) \cap W'$.

(3) можно переписать так: $\forall x \in W' \ \ (M', x \models p \Leftrightarrow M, x \models p)$.

Подмодели — для модальной логики не дают желаемого эффекта:
Пусть $W = \{x, y\}$, пусть $R = \{\langle x, y \rangle\}$. Тогда $M, x \models \Diamond\top$.
Но если взять подмодель на подмножестве $W' = \{x\}$, то $M', x \not\models \Diamond\top$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

(1) $\varnothing \neq W' \subseteq W$, (2) $R' = R|_{W'}$, (3) $V'(p) = V(p) \cap W'$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

$$(1)\ \ \varnothing \neq W' \subseteq W, \qquad (2)\ \ R' = R|_{W'}, \qquad (3)\ \ V'(p) = V(p) \cap W'.$$

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \ \forall x, y \in W\colon \quad x \in W' \ \ \&\ \ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y \in W'.$$

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

(1) $\varnothing \neq W' \subseteq W$, (2) $R' = R|_{W'}$, (3) $V'(p) = V(p) \cap W'$.

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \forall x, y \in W\colon \quad x \in W' \ \ \& \ \ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y \in W'.$$

Выкинув условие (3), получим опр. порожденной подшкалы $F' \hookrightarrow F$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

$$(1)\ \ \varnothing \neq W' \subseteq W, \qquad (2)\ \ R' = R|_{W'}, \qquad (3)\ \ V'(p) = V(p) \cap W'.$$

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \ \forall x, y \in W\colon\quad x \in W' \ \ \&\ \ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y \in W'.$$

Выкинув условие (3), получим опр. порожденной подшкалы $F' \hookrightarrow F$.

Интуиция: Из «маленького» множества W' по «большим» стрелкам R невозможно выйти за пределы «маленького» множества W'.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

$$(1)\ \ \varnothing \neq W' \subseteq W, \qquad (2)\ \ R' = R|_{W'}, \qquad (3)\ \ V'(p) = V(p) \cap W'.$$

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \ \forall x, y \in W\colon \ \ x \in W' \ \& \ x\,R\,y \ \ \Rightarrow \ \ y \in W'.$$

Выкинув условие (3), получим опр. порожденной подшкалы $F' \hookrightarrow F$.

Интуиция: Из «маленького» множества W' по «большим» стрелкам R невозможно выйти за пределы «маленького» множества W'.

Образ $X \subseteq W$ относительно R обозначим $R(X) = \{y \mid \exists x \in X : x\,R\,y\}$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

(1) $\varnothing \neq W' \subseteq W$, (2) $R' = R|_{W'}$, (3) $V'(p) = V(p) \cap W'$.

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \forall x, y \in W\colon \quad x \in W' \ \&\ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y \in W'.$$

Выкинув условие (3), получим опр. порожденной подшкалы $F' \hookrightarrow F$.

Интуиция: Из «маленького» множества W' по «большим» стрелкам R невозможно выйти за пределы «маленького» множества W'.

Образ $X \subseteq W$ относительно R обозначим $R(X) = \{y \mid \exists x \in X : x\,R\,y\}$.

Теперь условие (4) можно переписать так: (4) $R(W') \subseteq W'$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пример

а) В шкале $(\mathbb{Z}, <)$ каждая порожденная подшкала имеет вид:

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пример

а) В шкале $(\mathbb{Z}, <)$ каждая порожденная подшкала имеет вид:

$$(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}, <) \quad \text{для каждого фиксированного } n_0 \in \mathbb{Z}.$$

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Пример

a) В шкале $(\mathbb{Z}, <)$ каждая порожденная подшкала имеет вид:

$$(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}, <) \quad \text{для каждого фиксированного } n_0 \in \mathbb{Z}.$$

b) В шкале $(\mathbb{Q}, <)$ каждая порожденная подшкала имеет вид: ...?

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

$$(1)\ \ \varnothing \neq W' \subseteq W, \qquad (2)\ \ R' = R|_{W'}, \qquad (3)\ \ V'(p) = V(p) \cap W'.$$

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \ \forall x, y \in W\colon \quad x \in W' \ \ \&\ \ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y \in W'.$$

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

(1) $\varnothing \neq W' \subseteq W$, (2) $R' = R|_{W'}$, (3) $V'(p) = V(p) \cap W'$.

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \forall x, y \in W\colon \quad x \in W' \ \ \& \ \ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y \in W'.$$

Ключевой факт: *Для всякой точки $x \in W'$ имеем: $R(x) = R'(x)$.*

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

$$(1)\ \ \varnothing \neq W' \subseteq W, \qquad (2)\ \ R' = R|_{W'}, \qquad (3)\ \ V'(p) = V(p) \cap W'.$$

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \ \forall x, y \in W\colon\quad x \in W' \ \ \&\ \ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y \in W'.$$

Ключевой факт: *Для всякой точки $x \in W'$ имеем: $R(x) = R'(x)$.*

Но семантика модальности $\Box$ зависит лишь от $R(x)$!

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Определение

Подмодель модели M — это любая модель $M' = (W', R', V')$, где

$$(1)\ \ \varnothing \neq W' \subseteq W, \qquad (2)\ \ R' = R|_{W'}, \qquad (3)\ \ V'(p) = V(p) \cap W'.$$

M' — порожденная подмодель M (пишем: $M' \hookrightarrow M$), если кроме того:

$$(4)\ \ \forall x, y \in W\colon \quad x \in W' \ \ \&\ \ x\,R\,y \quad \Rightarrow \quad y \in W'.$$

Ключевой факт: *Для всякой точки $x \in W'$ имеем: $R(x) = R'(x)$.*

Но семантика модальности $\Box$ зависит лишь от $R(x)$!
Поэтому индукцией по построению формулы A легко доказывается:

Лемма

$M, x \models A \iff M', x \models A,$ *для всякой $x \in W'$ и формулы A.*

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$.
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$*.*
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$*.*
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

   Пусть $F' \hookrightarrow F$ *— порожденная подшкала,* $x \in W'$*. Тогда:*

3. $F, x \models A \iff F', x \models A$

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$*.*
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

   Пусть $F' \hookrightarrow F$ *— порожденная подшкала,* $x \in W'$*. Тогда:*

3. $F, x \models A \iff F', x \models A$
4. $F \models A \implies F' \models A$

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$*.*
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

   Пусть $F' \hookrightarrow F$ *— порожденная подшкала,* $x \in W'$*. Тогда:*

3. $F, x \models A \iff F', x \models A$
4. $F \models A \implies F' \models A$

Доказательство.

$(3 \Rightarrow)$ Если бы $M', x \not\models A$ для некоторой V',

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ — порожденная подмодель, $x \in W'$.
Тогда для любой модальной формулы A имеем:

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

   Пусть $F' \hookrightarrow F$ — порожденная подшкала, $x \in W'$. Тогда:

3. $F, x \models A \iff F', x \models A$
4. $F \models A \implies F' \models A$

Доказательство.
$(3 \Rightarrow)$ Если бы $M', x \not\models A$ для некоторой V', то положив $V(p) := V'(p)$ и $M = (F, V)$,

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$*.*
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

   Пусть $F' \hookrightarrow F$ *— порожденная подшкала,* $x \in W'$*. Тогда:*

3. $F, x \models A \iff F', x \models A$
4. $F \models A \implies F' \models A$

Доказательство.
$(3 \Rightarrow)$ Если бы $M', x \not\models A$ для некоторой V', то положив $V(p) := V'(p)$ и $M = (F, V)$, мы получили бы $M' \hookrightarrow M$, и потому $M, x \not\models A$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$*.*
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

Пусть $F' \hookrightarrow F$ *— порожденная подшкала,* $x \in W'$*. Тогда:*

3. $F, x \models A \iff F', x \models A$
4. $F \models A \implies F' \models A$

Доказательство.
$(3 \Rightarrow)$ Если бы $M', x \not\models A$ для некоторой V', то положив $V(p) := V'(p)$ и $M = (F, V)$, мы получили бы $M' \hookrightarrow M$, и потому $M, x \not\models A$.

$(3 \Leftarrow)$ Если бы $M, x \not\models A$ для некот. V,

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$*.*
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

   Пусть $F' \hookrightarrow F$ *— порожденная подшкала,* $x \in W'$*. Тогда:*
3. $F, x \models A \iff F', x \models A$
4. $F \models A \implies F' \models A$

Доказательство.
$(3 \Rightarrow)$ Если бы $M', x \not\models A$ для некоторой V', то положив $V(p) := V'(p)$ и $M = (F, V)$, мы получили бы $M' \hookrightarrow M$, и потому $M, x \not\models A$.

$(3 \Leftarrow)$ Если бы $M, x \not\models A$ для некот. V, то положив $V'(p) = V(p) \cap W'$ и $M' = (F', V')$,

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$*.*
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

   Пусть $F' \hookrightarrow F$ *— порожденная подшкала,* $x \in W'$*. Тогда:*

3. $F, x \models A \iff F', x \models A$
4. $F \models A \implies F' \models A$

Доказательство.
$(3 \Rightarrow)$ Если бы $M', x \not\models A$ для некоторой V', то положив $V(p) := V'(p)$ и $M = (F, V)$, мы получили бы $M' \hookrightarrow M$, и потому $M, x \not\models A$.

$(3 \Leftarrow)$ Если бы $M, x \not\models A$ для некот. V, то положив $V'(p) = V(p) \cap W'$ и $M' = (F', V')$, мы получили бы $M' \hookrightarrow M$, и потому $M', x \not\models A$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Теорема

Пусть $M' \hookrightarrow M$ *— порожденная подмодель,* $x \in W'$.
Тогда для любой модальной формулы A *имеем:*

1. $M, x \models A \iff M', x \models A$
2. $M \models A \implies M' \models A$

   Пусть $F' \hookrightarrow F$ *— порожденная подшкала,* $x \in W'$. *Тогда:*
3. $F, x \models A \iff F', x \models A$
4. $F \models A \implies F' \models A$

Доказательство.
(3 $\Rightarrow$) Если бы $M', x \not\models A$ для некоторой V', то положив $V(p) := V'(p)$ и $M = (F, V)$, мы получили бы $M' \hookrightarrow M$, и потому $M, x \not\models A$.

(3 $\Leftarrow$) Если бы $M, x \not\models A$ для некот. V, то положив $V'(p) = V(p) \cap W'$ и $M' = (F', V')$, мы получили бы $M' \hookrightarrow M$, и потому $M', x \not\models A$.

(4) Если $F', x \not\models A$ для некоторой точки $x \in W'$, то и $F, x \not\models A$. $\triangleleft$

3. Порожденная множеством подмодель (и подшкала)

Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R:

$$R^* = \bigcup_{n \geqslant 0} R^n = R^0 \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

где $R^0 = Id(W) = \{(x, x) \mid x \in W\}$ — диагональ (или равенство на W).

3. Порожденная множеством подмодель (и подшкала)

Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R:

$$R^* = \bigcup_{n \geqslant 0} R^n = R^0 \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

где $R^0 = Id(W) = \{(x, x) \mid x \in W\}$ — диагональ (или равенство на W).

Таким образом, для $X \subseteq W$ имеем: $R^*(X) = X \cup R(X) \cup R(R(X)) \cup \ldots$

3. Порожденная множеством подмодель (и подшкала)

Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R:

$$R^* \;=\; \bigcup_{n \geqslant 0} R^n \;=\; R^0 \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

где $R^0 = Id(W) = \{(x,x) \mid x \in W\}$ — диагональ (или равенство на W).

Таким образом, для $X \subseteq W$ имеем: $R^*(X) = X \cup R(X) \cup R(R(X)) \cup \ldots$

Определение

Подмодель в $M = (W, R, V)$, порожденная множеством $X \subseteq W$ — это $M_X = (W', R', V')$ (аналогично определяется подшкала F_X), где

$$W' = R^*(X),$$

3. Порожденная множеством подмодель (и подшкала)

Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R:

$$R^* = \bigcup_{n \geqslant 0} R^n = R^0 \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

где $R^0 = Id(W) = \{(x, x) \mid x \in W\}$ — диагональ (или равенство на W).

Таким образом, для $X \subseteq W$ имеем: $R^*(X) = X \cup R(X) \cup R(R(X)) \cup \ldots$

Определение

Подмодель в $M = (W, R, V)$, порожденная множеством $X \subseteq W$ — это $M_X = (W', R', V')$ (аналогично определяется подшкала F_X), где

$$W' = R^*(X), \qquad R' = R|_{W'}, \qquad V'(p) = V(p) \cap W'.$$

3. Порожденная множеством подмодель (и подшкала)

Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R:

$$R^* \;=\; \bigcup_{n\geqslant 0} R^n \;=\; R^0 \cup R \cup (R\circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

где $R^0 = Id(W) = \{(x,x) \mid x \in W\}$ — диагональ (или равенство на W).

Таким образом, для $X \subseteq W$ имеем: $R^*(X) = X \cup R(X) \cup R(R(X)) \cup \ldots$

Определение

Подмодель в $M = (W, R, V)$, порожденная множеством $X \subseteq W$ — это $M_X = (W', R', V')$ (аналогично определяется подшкала F_X), где

$$W' = R^*(X), \qquad R' = R|_{W'}, \qquad V'(p) = V(p) \cap W'.$$

Упражнение. M_X — действительно порожденная подмодель M.

3. Порожденная множеством подмодель (и подшкала)

Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R:

$$R^* \ = \ \bigcup_{n \geqslant 0} R^n \ = \ R^0 \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

где $R^0 = Id(W) = \{(x, x) \mid x \in W\}$ — диагональ (или равенство на W).

Таким образом, для $X \subseteq W$ имеем: $R^*(X) = X \cup R(X) \cup R(R(X)) \cup \ldots$

Определение

Подмодель в $M = (W, R, V)$, порожденная множеством $X \subseteq W$ — это $M_X = (W', R', V')$ (аналогично определяется подшкала F_X), где

$$W' = R^*(X), \qquad R' = R|_{W'}, \qquad V'(p) = V(p) \cap W'.$$

Упражнение. M_X — действительно порожденная подмодель M.

Если $X = \{a\}$, то обозначаем M_a и F_a — подмодель (подшкалу), порожденную точкой a. Другое название: конус с вершиной $a \in W$.

3. Порожденная множеством подмодель (и подшкала)

Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения R:

$$R^* = \bigcup_{n \geqslant 0} R^n = R^0 \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

где $R^0 = Id(W) = \{(x, x) \mid x \in W\}$ — диагональ (или равенство на W).

Таким образом, для $X \subseteq W$ имеем: $R^*(X) = X \cup R(X) \cup R(R(X)) \cup \ldots$

Определение

Подмодель в $M = (W, R, V)$, порожденная множеством $X \subseteq W$ — это $M_X = (W', R', V')$ (аналогично определяется подшкала F_X), где

$$W' = R^*(X), \qquad R' = R|_{W'}, \qquad V'(p) = V(p) \cap W'.$$

Упражнение. M_X — действительно порожденная подмодель M.
Если $X = \{a\}$, то обозначаем M_a и F_a — подмодель (подшкалу), порожденную точкой a. Другое название: конус с вершиной $a \in W$.

(!) Всякая порожденная подмодель $M' \hookrightarrow M$ порождена мн. $W' \subseteq W$.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия порожденных подшкал ($\hookrightarrow$).

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ *замкнут относительно взятия порожденных подшкал* ($\hookrightarrow$). *То есть*

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F' \hookrightarrow F, \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия порожденных подшкал ($\hookrightarrow$). То есть

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F' \hookrightarrow F, \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ Класс шкал (W, R) с условием $R \neq \varnothing$ модальное не определим.

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия порожденных подшкал ($\hookrightarrow$). То есть

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F' \hookrightarrow F, \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ Класс шкал (W, R) с условием $R \neq \varnothing$ модальное не определим.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «каждая точка y видна из некоторого x»

$$\forall y \ \ \exists x \ \ (x \, R \, y)$$

модальное не определим:

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия порожденных подшкал ($\hookrightarrow$). То есть

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F' \hookrightarrow F, \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ Класс шкал (W, R) с условием $R \neq \varnothing$ модальное не определим.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «каждая точка y видна из некоторого x»

$$\forall y \;\; \exists x \;\; (x \, R \, y)$$

модальное не определим: $(\mathbb{N}, <) \hookrightarrow (\mathbb{Z}, <)$.

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия порожденных подшкал ($\hookrightarrow$). То есть

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F' \hookrightarrow F, \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ Класс шкал (W, R) с условием $R \neq \varnothing$ модальное не определим.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «каждая точка y видна из некоторого x»

$$\forall y \ \ \exists x \ \ (x\,R\,y)$$

модальное не определим: $(\mathbb{N}, <) \hookrightarrow (\mathbb{Z}, <)$.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «у каждой точки $\geqslant$2 последователя»

$$\forall x \ \ \exists y \neq z \ \ (x\,R\,y \;\&\; x\,R\,z)$$

модальное не определим:

3. Порожденная подмодель (и подшкала)

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия порожденных подшкал ($\hookrightarrow$). То есть

$$\text{если}\quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F' \hookrightarrow F, \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ Класс шкал (W, R) с условием $R \neq \varnothing$ модальное не определим.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «каждая точка y видна из некоторого x»

$$\forall y \;\; \exists x \;\; (x\,R\,y)$$

модальное не определим: $(\mathbb{N}, <) \hookrightarrow (\mathbb{Z}, <)$.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «у каждой точки $\geqslant$2 последователя»

$$\forall x \;\; \exists y \neq z \;\; (x\,R\,y \;\&\; x\,R\,z)$$

модальное не определим: p-морфизм из «вилки» (xRy, xRz) на цепь $(x'\,R'\,y')$ — не сохраняет это свойство.

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия порожденных подшкал ($\hookrightarrow$). То есть

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F' \hookrightarrow F, \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ Класс шкал (W, R) с условием $R \neq \varnothing$ модальное не определим.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «каждая точка y видна из некоторого x»

$$\forall y \;\; \exists x \;\; (x\, R\, y)$$

модальное не определим: $(\mathbb{N}, <) \hookrightarrow (\mathbb{Z}, <)$.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «у каждой точки $\geqslant$2 последователя»

$$\forall x \;\; \exists y \neq z \;\; (x\, R\, y \;\&\; x\, R\, z)$$

модальное не определим: p-морфизм из «вилки» (xRy, xRz) на цепь $(x'\, R'\, y')$ — не сохраняет это свойство. Аналогично для $\geqslant n$, где $n \geqslant 2$.

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия порожденных подшкал ($\hookrightarrow$). То есть

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F' \hookrightarrow F, \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

$\Rightarrow$ Класс шкал (W, R) с условием $R \neq \varnothing$ модальное не определим.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «каждая точка y видна из некоторого x»

$$\forall y \;\; \exists x \;\; (x\, R\, y)$$

модальное не определим: $(\mathbb{N}, <) \hookrightarrow (\mathbb{Z}, <)$.

$\Rightarrow$ Класс шкал с условием «у каждой точки $\geqslant$2 последователя»

$$\forall x \;\; \exists y \neq z \;\; (x\, R\, y \;\&\; x\, R\, z)$$

модальное не определим: р-морфизм из «вилки» (xRy, xRz) на цепь $(x'\, R'\, y')$ — не сохраняет это свойство. Аналогично для $\geqslant n$, где $n \geqslant 2$.

Напротив, для $\leqslant n$ — модально определим. Напишите мод. формулу!

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i \in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i \in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)\}$ — модально определим?

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i\in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)\}$ — модально определим?
  Он замкнут относительно $\biguplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$?

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i \in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y \, (x \, R \, y \;\&\; y \, R \, y)\}$ — модально определим? Он замкнут относительно $\biguplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$? Да, да, да!

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i\in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)\}$ — модально определим? Он замкнут относительно $\biguplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$? Да, да, да!
- Будет ли мод. определим класс таких конечных шкал?

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i \in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)\}$ — модально определим? Он замкнут относительно $\biguplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$? Да, да, да!
- Будет ли мод. определим класс таких конечных шкал?
- Будет ли мод. определим класс таких конечных транз. шкал?

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i\in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)\}$ — модально определим? Он замкнут относительно $\biguplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$? Да, да, да!
- Будет ли мод. определим класс таких конечных шкал?
- Будет ли мод. определим класс таких конечных транз. шкал?
- Дают ли три условия из теоремы — критерий мод. определимости
  - для всех классов шкал?

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i \in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)\}$ — модально определим?
  Он замкнут относительно $\biguplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$? Да, да, да!
- Будет ли мод. определим класс таких конечных шкал?
- Будет ли мод. определим класс таких конечных транз. шкал?
- Дают ли три условия из теоремы — критерий мод. определимости
  - для всех классов шкал?
  - для элементарных классов шкал? (задаваемые FO-формулой)

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i\in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)\}$ — модально определим? Он замкнут относительно $\biguplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$? Да, да, да!
- Будет ли мод. определим класс таких конечных шкал?
- Будет ли мод. определим класс таких конечных транз. шкал?
- Дают ли три условия из теоремы — критерий мод. определимости
  - для всех классов шкал?
  - для элементарных классов шкал? (задаваемые FO-формулой)
  - для конечных шкал?

Модальная (не)определимость классов шкал

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i \in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)\}$ — модально определим? Он замкнут относительно $\biguplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$? Да, да, да!
- Будет ли мод. определим класс таких конечных шкал?
- Будет ли мод. определим класс таких конечных транз. шкал?
- Дают ли три условия из теоремы — критерий мод. определимости
  - для всех классов шкал?
  - для элементарных классов шкал? (задаваемые FO-формулой)
  - для конечных шкал?
  - для элементарных классов конечных шкал?

Теорема

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия

- *несвязной суммы шкал* $\biguplus_{i \in I} F_i$
- *p-морфного образа шкалы* $F \twoheadrightarrow F'$
- *порожденной подшкалы* $F' \hookrightarrow F$

- $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y \, (x \, R \, y \ \& \ y \, R \, y)\}$ — модально определим? Он замкнут относительно $\uplus$? $\twoheadrightarrow$? $\hookrightarrow$? Да, да, да!
- Будет ли мод. определим класс таких конечных шкал?
- Будет ли мод. определим класс таких конечных транз. шкал?
- Дают ли три условия из теоремы — критерий мод. определимости
  - для всех классов шкал?
  - для элементарных классов шкал? (задаваемые FO-формулой)
  - для конечных шкал?
  - для элементарных классов конечных шкал?
  - для конечных транзитивных шкал?

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$,
  где $W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,
- континуальный кластер $F_\mathfrak{c}$, где $W_\mathfrak{c} = \{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,
- континуальный кластер $F_\mathfrak{c}$, где $W_\mathfrak{c} = \{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Обозначим $L_n := \mathrm{Logic}(F_n)$ — логику шкалы F_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,
- континуальный кластер $F_\mathfrak{c}$, где $W_\mathfrak{c} = \{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Обозначим $L_n := \mathrm{Logic}(F_n)$ — логику шкалы F_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$. Требуется доказать следующие строгие включения и равенство:

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots \supset L_\omega = L_\mathfrak{c}.$$

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,
- континуальный кластер $F_\mathfrak{c}$, где $W_\mathfrak{c} = \{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Обозначим $L_n := \mathrm{Logic}(F_n)$ — логику шкалы F_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.
Требуется доказать следующие строгие включения и равенство:

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots \supset L_\omega = L_\mathfrak{c}.$$

- $L_n \supseteq L_{n+1}$, ибо $F_{n+1} \twoheadrightarrow F_n$

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,
- континуальный кластер $F_\mathfrak{c}$, где $W_\mathfrak{c} = \{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Обозначим $L_n := \mathrm{Logic}(F_n)$ — логику шкалы F_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.
Требуется доказать следующие строгие включения и равенство:

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots \supset L_\omega = L_\mathfrak{c}.$$

- $L_n \supseteq L_{n+1}$, ибо $F_{n+1} \twoheadrightarrow F_n$ (склеить две точки).

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,
- континуальный кластер $F_\mathfrak{c}$, где $W_\mathfrak{c} = \{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Обозначим $L_n := \mathrm{Logic}(F_n)$ — логику шкалы F_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.
Требуется доказать следующие строгие включения и равенство:

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots \supset L_\omega = L_\mathfrak{c}.$$

- $L_n \supseteq L_{n+1}$, ибо $F_{n+1} \twoheadrightarrow F_n$ (склеить две точки).
- И вообще, если $n < n'$, то $L_n \supseteq L_{n'}$ для любых $n, n' \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$,
  где $W_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,
- континуальный кластер $F_\mathfrak{c}$, где $W_\mathfrak{c} = \{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Обозначим $L_n := \mathrm{Logic}(F_n)$ — логику шкалы F_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.
Требуется доказать следующие строгие включения и равенство:

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots \supset L_\omega = L_\mathfrak{c}.$$

- $L_n \supseteq L_{n+1}$, ибо $F_{n+1} \twoheadrightarrow F_n$ (склеить две точки).
- И вообще, если $n < n'$, то $L_n \supseteq L_{n'}$ для любых $n, n' \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.
- Строгость включения $L_n \supsetneq L_{n+1}$: на F_n общезначима формула, выражающая «у каждой точки $\leqslant n$ последователей».
  $\Diamond p_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond p_{n+1} \ \to \ldots?$

Применение 1: Модальные логики кластеров

- n-элементный кластер — шкала $F_n = (W_n, R_n)$,
  где $W_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, $R_n = W_n \times W_n$
- счетный кластер — шкала F_ω, где $W_\omega = \{a_i \mid i < \omega\}$,
- континуальный кластер $F_\mathfrak{c}$, где $W_\mathfrak{c} = \{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Обозначим $L_n := \mathrm{Logic}(F_n)$ — логику шкалы F_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.
Требуется доказать следующие строгие включения и равенство:

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots \supset L_\omega = L_\mathfrak{c}.$$

- $L_n \supseteq L_{n+1}$, ибо $F_{n+1} \twoheadrightarrow F_n$ (склеить две точки).
- И вообще, если $n < n'$, то $L_n \supseteq L_{n'}$ для любых $n, n' \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.
- Строгость включения $L_n \supsetneq L_{n+1}$: на F_n общезначима формула, выражающая «у каждой точки $\leqslant n$ последователей».
  $\Diamond p_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond p_{n+1} \;\; \to \ldots ?$
- $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$ (откуда и будет следовать равенство).

Применение 1: Модальные логики кластеров

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$?

Применение 1: Модальные логики кластеров

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?

Применение 1: Модальные логики кластеров

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$.

Применение 1: Модальные логики кластеров

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)

Применение 1: Модальные логики кластеров

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.

Применение 1: Модальные логики кластеров

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.
Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \ldots, p_k$.

Применение 1: Модальные логики кластеров

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.
Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \ldots, p_k$.
Тогда точки $\{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$ разбиваются на $n = \leqslant 2^k$ класса экв-ти отн. «цветов» — истинности в них данных n переменных.

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.
Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \dots, p_k$.
Тогда точки $\{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$ разбиваются на $n = \leqslant 2^k$ класса экв-ти отн. «цветов» — истинности в них данных n переменных.
Строим модель $M' = (F_n, V)$ из n точек таких же «цветов».

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.
Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \ldots, p_k$.
Тогда точки $\{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$ разбиваются на $n = \leqslant 2^k$ класса экв-ти отн. «цветов» — истинности в них данных n переменных.
Строим модель $M' = (F_n, V)$ из n точек таких же «цветов».

Утв. $M_\mathfrak{c} \twoheadrightarrow M'$.

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.
Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \ldots, p_k$.
Тогда точки $\{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$ разбиваются на $n = \leqslant 2^k$ класса экв-ти отн.
«цветов» — истинности в них данных n переменных.
Строим модель $M' = (F_n, V)$ из n точек таких же «цветов».

Утв. $M_\mathfrak{c} \twoheadrightarrow M'$.

Значит, A опровергается и в модели M'.
То есть $A \notin L_n$ и уж тем более $A \notin L_\omega$.

Применение 1: Модальные логики кластеров

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.
Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \ldots, p_k$.
Тогда точки $\{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$ разбиваются на $n = \leqslant 2^k$ класса экв-ти отн. «цветов» — истинности в них данных n переменных.
Строим модель $M' = (F_n, V)$ из n точек таких же «цветов».

Утв. $M_\mathfrak{c} \twoheadrightarrow M'$.

Значит, A опровергается и в модели M'.
То есть $A \notin L_n$ и уж тем более $A \notin L_\omega$.

Подумать:
– $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n = L_\omega$ или $\supsetneq$?

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.
Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \dots, p_k$.
Тогда точки $\{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$ разбиваются на $n = \leqslant 2^k$ класса экв-ти отн. «цветов» — истинности в них данных n переменных.
Строим модель $M' = (F_n, V)$ из n точек таких же «цветов».

Утв. $M_\mathfrak{c} \twoheadrightarrow M'$.

Значит, A опровергается и в модели M'.
То есть $A \notin L_n$ и уж тем более $A \notin L_\omega$.

Подумать:
– $\cap_{n\in\mathbb{N}} L_n = L_\omega$ или $\supsetneq$?
Чему именно равна L_ω? L_n?

Почему $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$? То есть: $F_\omega \models A \;\Rightarrow\; F_\mathfrak{c} \models A$?
Допустим $F_\mathfrak{c} \not\models A$. Мы даже докажем: $\exists n \in \mathbb{N}$: $F_n \not\models A$. (тогда $F_\omega \not\models A$)
Берем опровергающую модель $M_\mathfrak{c}, x \not\models A$, где $M_\mathfrak{c} = (F_\mathfrak{c}, V)$.
Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \ldots, p_k$.
Тогда точки $\{a_i \mid i < \mathfrak{c}\}$ разбиваются на $n = \leqslant 2^k$ класса экв-ти отн. «цветов» — истинности в них данных n переменных.
Строим модель $M' = (F_n, V)$ из n точек таких же «цветов».

Утв. $M_\mathfrak{c} \twoheadrightarrow M'$.

Значит, A опровергается и в модели M'.
То есть $A \notin L_n$ и уж тем более $A \notin L_\omega$.

Подумать:
– $\cap_{n \in \mathbb{N}} L_n = L_\omega$ или $\supsetneq$?
Чему именно равна L_ω? L_n?
Задача*. Сделать «аналогичное» для иррефлексивных кластеров $(W, \neq)$.

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \ \leftrightharpoons \$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,
- $x \models p \ \leftrightharpoons \ p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \; := \; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \;\; \leftrightharpoons \;\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\; \Rightarrow \;\; A \in y)$,
- $x \models p \;\; \leftrightharpoons \;\; p \in x, \quad$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$.

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \ \leftrightharpoons$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,
- $x \models p \ \leftrightharpoons \ p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. *Тогда* $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ *и* $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\;\leftrightharpoons\;\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\;\Rightarrow\;\; A \in y)$,
- $x \models p \;\;\leftrightharpoons\;\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. Тогда $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ и $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно.

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. Тогда $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ и $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\;\leftrightharpoons\;\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\;\Rightarrow\;\; A \in y)$,
- $x \models p \;\;\leftrightharpoons\;\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. Тогда $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ и $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.
$M_{L'}, x \models p \Leftrightarrow M_L, x \models p$, поскольку $\Leftrightarrow p \in x$.

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x,\quad$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. Тогда $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ и $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.
$M_{L'}, x \models p \Leftrightarrow M_L, x \models p,\quad$ поскольку $\Leftrightarrow p \in x$.

Осталось доказать, что множество $W_{L'}$ замкнуто по отношению R_L?

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \ \leftrightharpoons$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,
- $x \models p \ \leftrightharpoons \ p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. Тогда $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ и $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.
$M_{L'}, x \models p \Leftrightarrow M_L, x \models p$, поскольку $\Leftrightarrow p \in x$.

Осталось доказать, что множество $W_{L'}$ замкнуто по отношению R_L?
Пусть $x \in W_{L'}$, $x\, R_L\, y$, $y \in W_L$. Почему $y \in W_{L'}$?

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \; := \; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\; \leftrightharpoons \;\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\; \Rightarrow \;\; A \in y)$,
- $x \models p \;\; \leftrightharpoons \;\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. Тогда $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ и $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.
$M_{L'}, x \models p \Leftrightarrow M_L, x \models p$, поскольку $\Leftrightarrow p \in x$.

Осталось доказать, что множество $W_{L'}$ замкнуто по отношению R_L?
Пусть $x \in W_{L'}$, $x\, R_L\, y$, $y \in W_L$. Почему $y \in W_{L'}$?
Ясно, что y — ПНТ.

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. Тогда $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ и $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.
$M_{L'}, x \models p \Leftrightarrow M_L, x \models p$, поскольку $\Leftrightarrow p \in x$.

Осталось доказать, что множество $W_{L'}$ замкнуто по отношению R_L?
Пусть $x \in W_{L'}$, $x\, R_L\, y$, $y \in W_L$. Почему $y \in W_{L'}$?
Ясно, что y — ПНТ. Почему $L' \subseteq y$? Имеем:

$A \in L'$

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. *Тогда* $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ *и* $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.
$M_{L'}, x \models p \Leftrightarrow M_L, x \models p$, поскольку $\Leftrightarrow p \in x$.

Осталось доказать, что множество $W_{L'}$ замкнуто по отношению R_L?
Пусть $x \in W_{L'}$, $x\,R_L\,y$, $y \in W_L$. Почему $y \in W_{L'}$?
Ясно, что y — ПНТ. Почему $L' \subseteq y$? Имеем:

$$A \in L' \quad\Longrightarrow\quad \Box A \in L'$$

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель нормальной логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. *Тогда* $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ *и* $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.
$M_{L'}, x \models p \Leftrightarrow M_L, x \models p$, поскольку $\Leftrightarrow p \in x$.

Осталось доказать, что множество $W_{L'}$ замкнуто по отношению R_L?
Пусть $x \in W_{L'}$, $x\, R_L\, y$, $y \in W_L$. Почему $y \in W_{L'}$?
Ясно, что y — ПНТ. Почему $L' \subseteq y$? Имеем:

$$A \in L' \implies \Box A \in L' \implies \Box A \in x$$

Применение 2: Каноническая порожденная подмодель

Определение

Канон. модель **нормальной** логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — полная непр. теория и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$.

Lemma (О порожденной канонической подмодели)

Пусть $L \subseteq L'$. Тогда $F_{L'} \hookrightarrow F_L$ и $M_{L'} \hookrightarrow M_L$.

Доказательство. $W_{L'} \subseteq W_L$ — очевидно. $R_{L'} = R_L|_{W_{L'}}$ — очевидно.
$M_{L'}, x \models p \Leftrightarrow M_L, x \models p$, поскольку $\Leftrightarrow p \in x$.

Осталось доказать, что множество $W_{L'}$ замкнуто по отношению R_L?
Пусть $x \in W_{L'}$, $x\, R_L\, y$, $y \in W_L$. Почему $y \in W_{L'}$?
Ясно, что y — ПНТ. Почему $L' \subseteq y$? Имеем:

$$A \in L' \implies \Box A \in L' \implies \Box A \in x \implies A \in y, \text{ ч.т.д.} \qquad \triangleleft$$

Упрощаем определение канонической формулы

Определение (1)

Модальная формула A — **каноническая**, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Упрощаем определение канонической формулы

Определение (1)

Модальная формула A — **каноническая**, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Можно ли уменьшить «перебор» логик L?

Упрощаем определение канонической формулы

Определение (1)

Модальная формула A — **каноническая**, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Можно ли уменьшить «перебор» логик L?

Определение (2)

Модальная формула A — **каноническая**, если для логики $L = \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Упрощаем определение канонической формулы

Определение (1)

Модальная формула A — **каноническая**, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Можно ли уменьшить «перебор» логик L?

Определение (2)

Модальная формула A — **каноническая**, если для логики $L = \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Доказательство эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2).

($\Rightarrow$) Очевидно.

($\Leftarrow$) Пусть для $L := \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Упрощаем определение канонической формулы

Определение (1)

Модальная формула A — **каноническая**, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Можно ли уменьшить «перебор» логик L?

Определение (2)

Модальная формула A — **каноническая**, если для логики $L = \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Доказательство эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2).

($\Rightarrow$) Очевидно.
($\Leftarrow$) Пусть для $L := \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.
Берем любую нормальную логику L', такую что $A \in L'$.

Упрощаем определение канонической формулы

Определение (1)

Модальная формула A — каноническая, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Можно ли уменьшить «перебор» логик L?

Определение (2)

Модальная формула A — каноническая, если для логики $L = \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Доказательство эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2).

($\Rightarrow$) Очевидно.
($\Leftarrow$) Пусть для $L := \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.
Берем любую нормальную логику L', такую что $A \in L'$. Тогда:

$$L \subseteq L'$$

Упрощаем определение канонической формулы

Определение (1)

Модальная формула A — каноническая, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Можно ли уменьшить «перебор» логик L?

Определение (2)

Модальная формула A — каноническая, если для логики $L = \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Доказательство эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2).

$(\Rightarrow)$ Очевидно.

$(\Leftarrow)$ Пусть для $L := \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Берем любую нормальную логику L', такую что $A \in L'$. Тогда:

$$L \subseteq L' \quad \Longrightarrow \quad F_{L'} \hookrightarrow F_L$$

Упрощаем определение канонической формулы

Определение (1)

Модальная формула A — каноническая, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Можно ли уменьшить «перебор» логик L?

Определение (2)

Модальная формула A — каноническая, если для логики $L = \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Доказательство эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2).

($\Rightarrow$) Очевидно.

($\Leftarrow$) Пусть для $L := \mathbf{K} \oplus A$ имеем $F_L \models A$.

Берем любую нормальную логику L', такую что $A \in L'$. Тогда:

$$L \subseteq L' \quad \Longrightarrow \quad F_{L'} \hookrightarrow F_L \quad \Longrightarrow \quad F_{L'} \models A, \text{ ч.т.д.} \qquad \square$$

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.
L — полна $\;\Rightarrow\;$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.
L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W \colon R(x) = \varnothing$.
Тогда порожденная этой точкой подшкала $F_x = (\{x\}, \varnothing)$

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e \rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W \colon R(x) = \varnothing$.
Тогда порожденная этой точкой подшкала $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$.

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ *или в* $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.

L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда порожденная этой точкой подшкала $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$.
Следовательно, $L = \mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x) = \mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.
L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда порожденная этой точкой подшкала $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$.
Следовательно, $L = \mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x) = \mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\, \exists y\; x\, R\, y$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.
L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда порожденная этой точкой подшкала $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$.
Следовательно, $L = \mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x) = \mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\, \exists y\; x\, R\, y$.
Тогда единственное отображение $h\colon W \to \{e\}$ является сюръективным p-морфизмом: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.
L — полна $\Rightarrow$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда порожденная этой точкой подшкала $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$.
Следовательно, $L = \mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x) = \mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\, \exists y\; x\, R\, y$.
Тогда единственное отображение $h\colon W \to \{e\}$ является сюръективным р-морфизмом: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$.
Следовательно, $L = \mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_\circ)$. $\triangleleft$

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в $\mathrm{Logic}(F_\circ)$ или в $\mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Доказательство.
L — полна $\;\Rightarrow\;$ $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой шкалы $F = (W, R)$.

Случай 1. В шкале F есть тупик: $\exists x \in W\colon R(x) = \varnothing$.
Тогда порожденная этой точкой подшкала $F_x = (\{x\}, \varnothing) \cong F_\bullet$.
Следовательно, $L = \mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_x) = \mathrm{Logic}(F_\bullet)$.

Случай 2. В шкале F нет тупиков: $\forall x\, \exists y\; x\, R\, y$.
Тогда единственное отображение $h\colon W \to \{e\}$ является сюръективным р-морфизмом: $h\colon F \twoheadrightarrow F_\circ$.
Следовательно, $L = \mathrm{Logic}(F) \subseteq \mathrm{Logic}(F_\circ)$. $\triangleleft$

Когда бывает оба включения?

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) \;=\; \mathbf{Triv} \;=\; \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) \;=\; \mathbf{Ver} \;=\; \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) \;=\; \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. **(a)** Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) \;=\; \mathbf{Triv} \;=\; \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p);$
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) \;=\; \mathbf{Ver} \;=\; \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) \;=\; \mathbf{K} \oplus \Box\bot.$

Доказательство. **(a)** Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. **(a)** Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. **(a)** Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

$(1) \Rightarrow (2)$ Для $C \in \mathrm{Fm}(\Box)$ обозн. C' — рез-т стирания всех $\Box$ в C.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. (a) Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Для $C \in \mathrm{Fm}(\Box)$ обозн. C' — рез-т стирания всех $\Box$ в C.
$\mathbf{Triv} \vdash \Box B \leftrightarrow B$ для всех B.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. **(a)** Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Для $C \in \mathrm{Fm}(\Box)$ обозн. C' — рез-т стирания всех $\Box$ в C.
$\mathbf{Triv} \vdash \Box B \leftrightarrow B$ для всех B. Поэтому $\mathbf{Triv} \vdash C' \leftrightarrow C$ (индукция по C).

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. (a) Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Для $C \in \mathrm{Fm}(\Box)$ обозн. C' — рез-т стирания всех $\Box$ в C.
$\mathbf{Triv} \vdash \Box B \leftrightarrow B$ для всех B. Поэтому $\mathbf{Triv} \vdash C' \leftrightarrow C$ (индукция по C).
Итак, $\mathbf{Triv} \vdash A' \leftrightarrow A$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. **(a)** Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Для $C \in \mathrm{Fm}(\Box)$ обозн. C' — рез-т стирания всех $\Box$ в C.
$\mathbf{Triv} \vdash \Box B \leftrightarrow B$ для всех B. Поэтому $\mathbf{Triv} \vdash C' \leftrightarrow C$ (индукция по C).
Итак, $\mathbf{Triv} \vdash A' \leftrightarrow A$. Но A' — тавтология.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. **(a)** Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Для $C \in \mathrm{Fm}(\Box)$ обозн. C' — рез-т стирания всех $\Box$ в C. $\mathbf{Triv} \vdash \Box B \leftrightarrow B$ для всех B. Поэтому $\mathbf{Triv} \vdash C' \leftrightarrow C$ (индукция по C). Итак, $\mathbf{Triv} \vdash A' \leftrightarrow A$. Но A' — тавтология. Значит, $\mathbf{Triv} \vdash A'$ и $\mathbf{Triv} \vdash A$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство. **(a)** Докажем эквивалентность трех утверждений:

(1) при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Для $C \in \mathrm{Fm}(\Box)$ обозн. C' — рез-т стирания всех $\Box$ в C. $\mathbf{Triv} \vdash \Box B \leftrightarrow B$ для всех B. Поэтому $\mathbf{Triv} \vdash C' \leftrightarrow C$ (индукция по C). Итак, $\mathbf{Triv} \vdash A' \leftrightarrow A$. Но A' — тавтология. Значит, $\mathbf{Triv} \vdash A'$ и $\mathbf{Triv} \vdash A$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Следует из того, что $F_\circ \models \Box p \leftrightarrow p$. ◁

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) \;=\; \mathbf{Triv} \;=\; \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) \;=\; \mathbf{Ver} \;=\; \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) \;=\; \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство.
$(3) \Rightarrow (1)$ Допустим A' — не тавтология, то есть существует означивание переменных $i\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$, такое что $i(A') = 0$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство.
(3) $\Rightarrow$ (1) Допустим A' — не тавтология, то есть существует означивание переменных $i\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$, такое что $i(A') = 0$.
Построим оценку V на $F_\circ$ так: $e \models p \Leftrightarrow i(p) = 1$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство.
(3) $\Rightarrow$ (1) Допустим A' — не тавтология, то есть существует означивание переменных $i\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$, такое что $i(A') = 0$.
Построим оценку V на $F_\circ$ так: $e \models p \Leftrightarrow i(p) = 1$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.
Полученную модель обозначим $M = (F_\circ, V)$.

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство.
(3) $\Rightarrow$ (1) Допустим A' — не тавтология, то есть существует означивание переменных $i\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$, такое что $i(A') = 0$.
Построим оценку V на $F_\circ$ так: $e \models p \Leftrightarrow i(p) = 1$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.
Полученную модель обозначим $M = (F_\circ, V)$.

Утв. *$M, e \models B \Leftrightarrow i(B') = 1$, для любой модальной формулы B.*

В итоге: $\quad i(A') = 0$

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство.
(3) $\Rightarrow$ (1) Допустим A' — не тавтология, то есть существует означивание переменных $i\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$, такое что $i(A') = 0$.
Построим оценку V на $F_\circ$ так: $e \models p \Leftrightarrow i(p) = 1$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.
Полученную модель обозначим $M = (F_\circ, V)$.

Утв. $M, e \models B \Leftrightarrow i(B') = 1$, *для любой модальной формулы* B.

В итоге: $\quad i(A') = 0 \quad \Longrightarrow \quad M, e \not\models A$

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство.
$(3) \Rightarrow (1)$ Допустим A' — не тавтология, то есть существует означивание переменных $i\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$, такое что $i(A') = 0$.
Построим оценку V на $F_\circ$ так: $e \models p \Leftrightarrow i(p) = 1$, для всех $p \in \mathrm{Var}$.
Полученную модель обозначим $M = (F_\circ, V)$.

Утв. *$M, e \models B \Leftrightarrow i(B') = 1$, для любой модальной формулы B.*

В итоге: $\quad i(A') = 0 \quad\Longrightarrow\quad M, e \not\models A \quad\Longrightarrow\quad F_\circ \not\models A.$

Применение 3: слабая теорема Макинсона

$F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ — одноточечная рефлексивная шкала.
$F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ — одноточечная иррефлексивная шкала.

Лемма

(a) $\mathrm{Logic}(F_\circ) = \mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$;
(b) $\mathrm{Logic}(F_\bullet) = \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top) = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Доказательство.
(3) $\Rightarrow$ (1) Допустим A' — не тавтология, то есть существует означивание переменных $i\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$, такое что $i(A') = 0$. Построим оценку V на $F_\circ$ так: $e \models p \Leftrightarrow i(p) = 1$, для всех $p \in \mathrm{Var}$. Полученную модель обозначим $M = (F_\circ, V)$.

Утв. *$M, e \models B \Leftrightarrow i(B') = 1$, для любой модальной формулы B.*

В итоге: $i(A') = 0 \implies M, e \not\models A \implies F_\circ \not\models A$.

(б) C' — замена в формуле C всех подформул вида $\Box B$ на $\top$. $\triangleleft$

Теорема Макинсона (пока без доказательства)

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Теорема Макинсона (пока без доказательства)

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Наша цель:

Теорема (Макинсон, 1971)

Всякая непр. нормальная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Теорема Макинсона (пока без доказательства)

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Наша цель:

Теорема (Макинсон, 1971)

Всякая непр. нормальная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная логика L общезначима на некоторой шкале F

Теорема Макинсона (пока без доказательства)

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Наша цель:

Теорема (Макинсон, 1971)

Всякая непр. нормальная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной,

Теорема Макинсона (пока без доказательства)

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Наша цель:

Теорема (Макинсон, 1971)

Всякая непр. нормальная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, даже одноточечной).

Теорема Макинсона (пока без доказательства)

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver***.*

Наша цель:

Теорема (Макинсон, 1971)

Всякая непр. нормальная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver***.*

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, даже одноточечной).

Следствие 2

Всякая непр. нормальная логика L содержится в некоторой непр. полной логике L'.

Теорема Макинсона (пока без доказательства)

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Наша цель:

Теорема (Макинсон, 1971)

Всякая непр. нормальная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, даже одноточечной).

Следствие 2

Всякая непр. нормальная логика L содержится в некоторой непр. полной логике L'. А именно $L' = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.

Теорема Макинсона (пока без доказательства)

Теорема (Слабая теорема Макинсона)

Всякая полная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Наша цель:

Теорема (Макинсон, 1971)

Всякая непр. нормальная логика L содержится в **Triv** *или* **Ver**.

Следствие 1

Всякая непротиворечивая нормальная логика L общезначима на некоторой шкале F (даже конечной, даже одноточечной).

Следствие 2

Всякая непр. нормальная логика L содержится в некоторой непр. полной логике L'. А именно $L' = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.

Примечание. Для полимодальных логик это всё неверно!

Следствия из теоремы Макинсона

Следствие 3

Проблема

> *по модальной формуле A выяснить, является ли логика $\mathbf{K} \oplus A$ непротиворечивой*

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Следствия из теоремы Макинсона

Следствие 3

Проблема

> *по модальной формуле A выяснить, является ли логика $\mathbf{K} \oplus A$ непротиворечивой*

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Доказательство.

Обозначим $L = \mathbf{K} \oplus A$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. L непротиворечива,

Следствия из теоремы Макинсона

Следствие 3

Проблема

по модальной формуле A выяснить, является ли логика $\mathbf{K} \oplus A$ непротиворечивой

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Доказательство.

Обозначим $L = \mathbf{K} \oplus A$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. L непротиворечива,
2. $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$,

Следствие 3

Проблема

> *по модальной формуле A выяснить, является ли логика $\mathbf{K} \oplus A$ непротиворечивой*

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Доказательство.
Обозначим $L = \mathbf{K} \oplus A$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. L непротиворечива,
2. $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$,
3. $A \in \mathbf{Triv}$ или $A \in \mathbf{Ver}$,

Следствия из теоремы Макинсона

Следствие 3

Проблема

> *по модальной формуле A выяснить, является ли логика $\mathbf{K} \oplus A$ непротиворечивой*

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Доказательство.
Обозначим $L = \mathbf{K} \oplus A$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. L непротиворечива,
2. $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$,
3. $A \in \mathbf{Triv}$ или $A \in \mathbf{Ver}$,
4. (при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию) или (при замене всех подформул вида $\Box B$ на $\top$ формула A превращается в тавтологию).

Следствие 3

Проблема

> *по модальной формуле A выяснить, является ли логика $\mathbf{K} \oplus A$ непротиворечивой*

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Доказательство.
Обозначим $L = \mathbf{K} \oplus A$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. L непротиворечива,
2. $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$,
3. $A \in \mathbf{Triv}$ или $A \in \mathbf{Ver}$,
4. (при стирании всех $\Box$ формула A превращается в тавтологию) или (при замене всех подформул вида $\Box B$ на $\top$ формула A превращается в тавтологию).

Последнее условие алгоритмически разрешимо (и coNP-полно). $\triangleleft$

Следствия из теоремы Макинсона

Следствие 4

Проблема

> *по модальной формуле A выяснить, общезначима ли она хотя бы на одной шкале*

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Следствие 4

Проблема

> *по модальной формуле A выяснить, общезначима ли она хотя бы на одной шкале*

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Доказательство.

$$A \text{ общезначима хотя бы на одной шкале}$$

$$\Longleftrightarrow$$

Следствие 4

Проблема

> *по модальной формуле A выяснить, общезначима ли она хотя бы на одной шкале*

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Доказательство.

$$A \text{ общезначима хотя бы на одной шкале}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$A \text{ общезначима на } F_\bullet \text{ или на } F_\circ$$
$$\Longleftrightarrow$$

Следствия из теоремы Макинсона

Следствие 4

Проблема

по модальной формуле A выяснить, общезначима ли она хотя бы на одной шкале

разрешима. (Более того, она coNP-полна.)

Доказательство.

$$A \text{ общезначима хотя бы на одной шкале}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$A \text{ общезначима на } F_{\bullet} \text{ или на } F_{\circ}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$A \in \mathbf{Triv} \text{ или } A \in \mathbf{Ver}.$$

Последняя проблема разрешима. $\triangleleft$

Задачи на размышление

Мы знаем: для всякой непр. нормальной логики L

$$L \subseteq \mathbf{Triv} \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$

Мы знаем: для всякой непр. нормальной логики L

$$L \subseteq \mathbf{Triv} \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$

1. Обозначим $\mathrm{KD} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$.

Задачи на размышление

Мы знаем: для всякой непр. нормальной логики L

$$L \subseteq \mathbf{Triv} \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$

1. Обозначим $\mathrm{KD} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$.
   Докажите: для всякой непр. нормальной логики L

$$\mathrm{KD} \subseteq L \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$

Задачи на размышление

Мы знаем: для всякой непр. нормальной логики L

$$L \subseteq \mathbf{Triv} \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$

1. Обозначим $\mathrm{KD} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$.
   Докажите: для всякой непр. нормальной логики L
   $$\mathrm{KD} \subseteq L \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$
2. Попробуйте придумать аналог этого утв. для $\mathbf{Triv}$.

Задачи на размышление

Мы знаем: для всякой непр. нормальной логики L

$$L \subseteq \mathbf{Triv} \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$

1. Обозначим $\mathrm{KD} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$.
   Докажите: для всякой непр. нормальной логики L
   $$\mathrm{KD} \subseteq L \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$
2. Попробуйте придумать аналог этого утв. для $\mathbf{Triv}$.
3. Попробуйте придумать аналог этого утв. для $\mathbf{Triv}$ и логик $L \supseteq \mathrm{K4}$.

Задачи на размышление

Мы знаем: для всякой непр. нормальной логики L

$$L \subseteq \mathbf{Triv} \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$

1. Обозначим $\mathrm{KD} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$.
   Докажите: для всякой непр. нормальной логики L
   $$\mathrm{KD} \subseteq L \quad \text{или} \quad L \subseteq \mathbf{Ver}.$$
2. Попробуйте придумать аналог этого утв. для **Triv**.
3. Попробуйте придумать аналог этого утв. для **Triv** и логик $L \supseteq \mathrm{K4}$.

Конец лекции 6. Спасибо за внимание!