Модальная логика. Лекция 5: Модальные логики, полные по Крипке. Операции над шкалами и моделями Крипке и их применения.

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

23 октября 2020 года

Модальные логики, полные по Крипке

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$, то есть
   - все тавтологии (достаточно 11 аксиом ИВ),
   - $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$;
2. L замкнуто по трем правилам вывода исчисления $\mathbf{K}$:

$$(\mathrm{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathrm{Nec})\ \frac{A}{\Box A} \qquad (\mathrm{Sub})\ \frac{A}{A[p := B]}$$

Модальные логики, полные по Крипке

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления $\mathbf{K}$, то есть
   - все тавтологии (достаточно 11 аксиом ИВ),
   - $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$;
2. L замкнуто по трем правилам вывода исчисления $\mathbf{K}$:

$$\text{(MP)}\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad \text{(Nec)}\ \frac{A}{\Box A} \qquad \text{(Sub)}\ \frac{A}{A[p := B]}$$

Вместо $A \in L$ мы часто пишем $L \vdash A$; это синонимы.

Модальные логики, полные по Крипке

Определение

Нормальная (модальная) логика — это $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, такое что

1. L содержит все аксиомы исчисления **K**, то есть
   - все тавтологии (достаточно 11 аксиом ИВ),
   - $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$;
2. L замкнуто по трем правилам вывода исчисления **K**:

$$(\mathrm{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathrm{Nec})\ \frac{A}{\Box A} \qquad (\mathrm{Sub})\ \frac{A}{A[p := B]}$$

Вместо $A \in L$ мы часто пишем $L \vdash A$; это синонимы.

Определение

Логика L — **полная** (по Крипке, или в семантике Крипке, или относительно **шкал** Крипке), если для всякой модальной формулы A

$$L \vdash A \iff \text{на всех шкалах } F, \text{ таких что } F \models L, \text{ общезначима } A.$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \big(\, F \models L \implies F \models A \,\big).$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Замечание: $\implies$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \big(\, F \models L \implies F \models A \,\big).$$

Замечание: $\Longrightarrow$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Определение

Из множества формул Γ следует на шкалах формула A:

$$\Gamma \models_{\mathrm{Fr}} A, \text{ если } \ \text{для всякой шкалы } F \ \big(\, F \models \Gamma \implies F \models A \,\big).$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Замечание: $\implies$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Определение

Из множества формул Γ следует на шкалах формула A:

$$\Gamma \models_{\mathrm{Fr}} A, \text{ если для всякой шкалы } F \ \left(F \models \Gamma \implies F \models A \right).$$

Определение 2. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff L \models_{\mathrm{Fr}} A.$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \big(\, F \models L \implies F \models A \,\big).$$

Замечание: $\Longrightarrow$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Определение

Из множества формул Γ следует на шкалах формула A:

$$\Gamma \models_{\mathrm{Fr}} A, \text{ если } \ \text{для всякой шкалы } F \ \big(\, F \models \Gamma \implies F \models A \,\big).$$

Определение 2. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff L \models_{\mathrm{Fr}} A.$$

Очевидно: **Определение 1** $\iff$ **Определение 2**.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \big(\, F \models L \implies F \models A \,\big).$$

Замечание: $\Longrightarrow$ верно всегда (для любой логики L и формулы A).

Определение

Из множества формул Γ следует на шкалах формула A:

$$\Gamma \models_{\mathrm{Fr}} A, \text{ если } \ \text{для всякой шкалы } F \ \big(\, F \models \Gamma \implies F \models A \,\big).$$

Определение 2. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff L \models_{\mathrm{Fr}} A.$$

Очевидно: **Определение 1** $\iff$ **Определение 2**.

В Опр. 2 тоже $\Longrightarrow$ верно для всех L (это **Теорема о корректности**).

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение

Формула A опровержима на шкале $F = (W, R)$, если $F \not\models A$.

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение

Формула A опровержима на шкале $F = (W, R)$, если $F \not\models A$.
То есть если существует оценка переменных V и точка $x \in W$, такие что, обозначив модель $M = (F, V)$, будем иметь $M, x \not\models A$.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение

Формула A опровержима на шкале $F = (W, R)$, если $F \not\models A$.
То есть если существует оценка переменных V и точка $x \in W$, такие что, обозначив модель $M = (F, V)$, будем иметь $M, x \not\models A$.

Шкалу F будем называть L-шкалой, если $F \models L$.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение

Формула A опровержима на шкале $F = (W, R)$, если $F \not\models A$.
То есть если существует оценка переменных V и точка $x \in W$, такие что, обозначив модель $M = (F, V)$, будем иметь $M, x \not\models A$.

Шкалу F будем называть L-шкалой, если $F \models L$.

Определение 3. Логика L — полная, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой L-шкале.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Определение 3. Логика L — полная, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой L-шкале.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 3. Логика L — полная, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой L-шкале.

Доказательство эквивалентности **Опр. 1** $\iff$ **Опр. 3.**

Так как в Опр. 1 импликация $\Rightarrow$ верна всегда, оставим лишь $\Leftarrow$:

$$A \in L \impliedby \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 3. Логика L — полная, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой L-шкале.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 3.

Так как в Опр. 1 импликация $\Rightarrow$ верна всегда, оставим лишь $\Leftarrow$:

$$A \in L \impliedby \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Перепишем эквивалентно по контрапозиции:

$$A \notin L \implies \text{существует шкала } F \ \left(F \models L \ \text{ и } \ F \not\models A \right).$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 3. Логика L — полная, всякая формула $A \notin L$ опровержима на некоторой L-шкале.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 3.

Так как в Опр. 1 импликация $\Rightarrow$ верна всегда, оставим лишь $\Leftarrow$:

$$A \in L \impliedby \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Перепишем эквивалентно по контрапозиции:

$$A \notin L \implies \text{существует шкала } F \ \left(F \models L \ \text{ и } \ F \not\models A \right).$$

Это и означает: формула A опровержима на некоторой L-шкале. $\square$

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Определение

Модальная логика шкалы $F = (W, R)$ — это

$$\mathrm{Logic}(F) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid F \models A\}.$$

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Определение

Модальная логика шкалы $F = (W, R)$ — это

$$\mathrm{Logic}(F) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid F \models A\}.$$

Модальная логика класса шкал $\mathbb{F}$ — это

$$\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) \;=\; \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathbb{F} \models A\},$$

где $\mathbb{F} \models A$ означает: $\forall F \in \mathbb{F}\ (F \models A)$.

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Определение

Модальная логика шкалы $F = (W, R)$ — это

$$\mathrm{Logic}(F) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid F \models A\}.$$

Модальная логика класса шкал $\mathbb{F}$ — это

$$\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) \;=\; \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathbb{F} \models A\},$$

где $\mathbb{F} \models A$ означает: $\forall F \in \mathbb{F}\ (F \models A)$.

Ранее мы доказали: $\mathrm{Logic}(F)$ и $\mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ — всегда нормальные логики.

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Определение

Модальная логика шкалы $F = (W, R)$ — это

$$\mathrm{Logic}(F) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid F \models A\}.$$

Модальная логика класса шкал $\mathbb{F}$ — это

$$\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) \;=\; \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathbb{F} \models A\},$$

где $\mathbb{F} \models A$ означает: $\forall F \in \mathbb{F}\ (F \models A)$.

Определение

Класс всех шкал (данной формулы A или) множества формул Γ:

$$\mathrm{Frames}(\Gamma) \;=\; \{F \text{ — шкала} \mid F \models \Gamma\},$$

где $F \models \Gamma$ означает: $\forall B \in \Gamma\ (F \models B)$.

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Определение

Модальная логика шкалы $F = (W, R)$ — это

$$\mathrm{Logic}(F) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid F \models A\}.$$

Модальная логика класса шкал $\mathbb{F}$ — это

$$\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) \;=\; \{A \in \mathrm{Fm} \mid \mathbb{F} \models A\},$$

где $\mathbb{F} \models A$ означает: $\forall F \in \mathbb{F}\ (F \models A)$.

Определение

Класс всех шкал (данной формулы A или) множества формул Γ:

$$\mathrm{Frames}(\Gamma) \;=\; \{F \text{ — шкала} \mid F \models \Gamma\},$$

где $F \models \Gamma$ означает: $\forall B \in \Gamma\ (F \models B)$.
Иногда говорят: многообразие шкал, задаваемое мн-вом формул Γ.

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Лемма 1.

Для любой логики L и любого класса шкал $\mathbb{F}$ имеем:

1. $L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Лемма 1.

Для любой логики L и любого класса шкал $\mathbb{F}$ имеем:

1. $L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$
2. $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F}))$

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Лемма 1.

Для любой логики L и любого класса шкал $\mathbb{F}$ имеем:

1. $L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$
2. $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F}))$
3. $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)))$

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Лемма 1.

Для любой логики L и любого класса шкал $\mathbb{F}$ имеем:

1. $L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$
2. $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F}))$
3. $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)))$
4. $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F})))$

Лемма 1.

Для любой логики L и любого класса шкал $\mathbb{F}$ имеем:

1. $L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$
2. $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F}))$
3. $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)))$
4. $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F})))$

Доказательство. Простое упражнение. $\triangleleft$

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Лемма 1.

Для любой логики L и любого класса шкал $\mathbb{F}$ имеем:

1. $L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$
2. $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F}))$
3. $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)))$
4. $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F})))$

Лемма 2.

Для любых множеств формул $\Gamma, \Gamma' \subseteq \mathrm{Fm}$ и классов шкал $\mathbb{F}, \mathbb{F}'$ имеем:

1. Если $\Gamma \subseteq \Gamma'$, то $\mathrm{Frames}(\Gamma) \supseteq \mathrm{Frames}(\Gamma')$.
2. Если $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$, то $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) \supseteq \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

Логика класса шкал. Класс шкал логики

Лемма 1.

Для любой логики L и любого класса шкал $\mathbb{F}$ имеем:

1. $L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$
2. $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F}))$
3. $\mathrm{Frames}(L) = \mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)))$
4. $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(\mathrm{Logic}(\mathbb{F})))$

Лемма 2.

Для любых множеств формул $\Gamma, \Gamma' \subseteq \mathrm{Fm}$ и классов шкал $\mathbb{F}, \mathbb{F}'$ имеем:

1. Если $\Gamma \subseteq \Gamma'$, то $\mathrm{Frames}(\Gamma) \supseteq \mathrm{Frames}(\Gamma')$.
2. Если $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$, то $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) \supseteq \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

Доказательство. Простое упражнение. $\triangleleft$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \big(F \models L \implies F \models A \big).$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \;\; \big(\, F \models L \implies F \models A \,\big).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности **Опр. 4** $\iff$ **Опр. 5**.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

$(\Longleftarrow)$ Тривиально.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(L)$.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности **Опр. 4** $\iff$ **Опр. 5.**

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(L)$. По Леммам 1 и 2:

$$L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(L)$. По Леммам 1 и 2:

$$L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности **Опр. 4** $\iff$ **Опр. 5.**

($\Longleftarrow$) Тривиально.
($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(L)$. По Леммам 1 и 2:

$$L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L.$$

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 4 $\iff$ Опр. 5.

($\Longleftarrow$) Тривиально.

($\Longrightarrow$) Пусть Опр. 4. Тогда $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{Frames}(L)$. По Леммам 1 и 2:

$$L \subseteq \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L)) \subseteq \mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L.$$

Получили Определение 5. □

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \ (\ F \models L \implies F \models A\ ).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 5.

Правая часть Определения 1 есть: $\mathrm{Frames}(L) \models A$.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \ (\, F \models L \implies F \models A\,).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности **Опр. 1** $\iff$ **Опр. 5.**

Правая часть Определения 1 есть: $\mathrm{Frames}(L) \models A$.
Иначе говоря: $A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(F \models L \implies F \models A \right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 5.

Правая часть Определения 1 есть: $\mathrm{Frames}(L) \models A$.
Иначе говоря: $A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.
А само Определение 1 становится: $A \in L \Leftrightarrow A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.

Эквивалентные определения полной логики

Определение 1. Логика L — полная, если для всякой формулы A

$$L \vdash A \iff \text{для всякой шкалы } F \ \left(\, F \models L \implies F \models A \,\right).$$

Определение 4. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

Определение 5. Логика L — полная, если она есть логика $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ класса всех L-шкал.

Доказательство эквивалентности Опр. 1 $\iff$ Опр. 5.

Правая часть Определения 1 есть: $\mathrm{Frames}(L) \models A$.
Иначе говоря: $A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.
А само Определение 1 становится: $A \in L \Leftrightarrow A \in \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$.
То есть $L = \mathrm{Logic}(\mathrm{Frames}(L))$ — это и есть Определение 5. □

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R \text{ рефлексивно}\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$

Модально определимые классы шкал

Классы Frames(A) и Frames(Γ) еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R$ рефлексивно$\} = \text{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R$ транзитивно$\} = \text{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R \text{ рефлексивно}\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R \text{ транзитивно}\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

Классы Frames(A) и Frames(Γ) еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R$ рефлексивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R$ транзитивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R$ иррефлексивно: $\forall x \neg(xRx)\}$

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R \text{ рефлексивно}\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R \text{ транзитивно}\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R \text{ иррефлексивно: } \forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$

Модально определимые классы шкал

Классы $\text{Frames}(A)$ и $\text{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R \text{ рефлексивно}\} = \text{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R \text{ транзитивно}\} = \text{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R \text{ иррефлексивно: } \forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$ — да! $= \text{Frames}(\Box\bot)$

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R$ рефлексивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R$ транзитивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R$ иррефлексивно: $\forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$ — да! $= \mathrm{Frames}(\Box\bot)$
5. $\{F = (W, R) \mid R \neq \varnothing\}$

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R$ рефлексивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R$ транзитивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R$ иррефлексивно: $\forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$ — да! $= \mathrm{Frames}(\Box\bot)$
5. $\{F = (W, R) \mid R \neq \varnothing\}$
6. $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R$ рефлексивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R$ транзитивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R$ иррефлексивно: $\forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$ — да! $= \mathrm{Frames}(\Box\bot)$
5. $\{F = (W, R) \mid R \neq \varnothing\}$
6. $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
7. $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)\}$

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R \text{ рефлексивно}\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R \text{ транзитивно}\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R \text{ иррефлексивно: } \forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$ — да! $= \mathrm{Frames}(\Box\bot)$
5. $\{F = (W, R) \mid R \neq \varnothing\}$
6. $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
7. $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)\}$
8. $\{F = (W, R) \mid W \text{ конечное}\}$

Модально определимые классы шкал

Классы Frames(A) и Frames(Γ) еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R$ рефлексивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R$ транзитивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R$ иррефлексивно: $\forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$ — да! $= \mathrm{Frames}(\Box\bot)$
5. $\{F = (W, R) \mid R \neq \varnothing\}$
6. $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
7. $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y\ \&\ y\, R\, y)\}$
8. $\{F = (W, R) \mid W$ конечное$\}$
9. $\{F = (W, R) \mid W$ бесконечное$\}$

Модально определимые классы шкал

Классы Frames(A) и Frames(Γ) еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R$ рефлексивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R$ транзитивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R$ иррефлексивно: $\forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$ — да! $= \mathrm{Frames}(\Box\bot)$
5. $\{F = (W, R) \mid R \neq \varnothing\}$
6. $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
7. $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)\}$
8. $\{F = (W, R) \mid W$ конечное$\}$
9. $\{F = (W, R) \mid W$ бесконечное$\}$
10. $\{F = (W, R) \mid F$ — связный граф$\}$ — в ор. или неор. смысле.

Модально определимые классы шкал

Классы $\mathrm{Frames}(A)$ и $\mathrm{Frames}(\Gamma)$ еще наз. модально определимыми.

1. $\{F = (W, R) \mid R$ рефлексивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to p)$
2. $\{F = (W, R) \mid R$ транзитивно$\} = \mathrm{Frames}(\Box p \to \Box\Box p)$

   Будут ли модально определимыми следующие классы шкал?

3. $\{F = (W, R) \mid R$ иррефлексивно: $\forall x \neg(xRx)\}$
4. $\{F = (W, R) \mid R = \varnothing\}$ — да! $= \mathrm{Frames}(\Box\bot)$
5. $\{F = (W, R) \mid R \neq \varnothing\}$
6. $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
7. $\{F = (W, R) \mid \forall x \exists y\, (x\, R\, y \;\&\; y\, R\, y)\}$
8. $\{F = (W, R) \mid W$ конечное$\}$
9. $\{F = (W, R) \mid W$ бесконечное$\}$
10. $\{F = (W, R) \mid F$ — связный граф$\}$ — в ор. или неор. смысле.

Какие известны методы доказательства модальной неопределимости?

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей Крипке.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей Крипке.
Соответствующие шкалы: $F_i = (W_i, R_i)$, $i \in I$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей Крипке.
Соответствующие шкалы: $F_i = (W_i, R_i)$, $i \in I$.
Случай 1.
Множества W_i попарно непересекаются: $W_i \cap W_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей Крипке.
Соответствующие шкалы: $F_i = (W_i, R_i)$, $i \in I$.

Случай 1.

Множества W_i попарно непересекаются: $W_i \cap W_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Определение (для непересекающихся моделей)

Несвязная сумма непересекающихся моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i, \qquad R = \bigcup_{i \in I} R_i, \qquad V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p) \quad \text{для } p \in \mathrm{Var}.$$

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей Крипке.
Соответствующие шкалы: $F_i = (W_i, R_i)$, $i \in I$.

Случай 1.

Множества W_i попарно непересекаются: $W_i \cap W_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Определение (для непересекающихся моделей)

Несвязная сумма непересекающихся моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i, \qquad R = \bigcup_{i \in I} R_i, \qquad V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p) \quad \text{для } p \in \mathrm{Var}.$$

Несвязная сумма шкал $(F_i = (W_i, R_i))_{i \in I}$ — это $F = \biguplus_{i \in I} F_i = (W, R)$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей Крипке.
Соответствующие шкалы: $F_i = (W_i, R_i)$, $i \in I$.

Случай 1.

Множества W_i попарно непересекаются: $W_i \cap W_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Определение (для непересекающихся моделей)

Несвязная сумма непересекающихся моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i, \qquad R = \bigcup_{i \in I} R_i, \qquad V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p) \quad \text{для } p \in \mathrm{Var}.$$

Несвязная сумма шкал $(F_i = (W_i, R_i))_{i \in I}$ — это $F = \biguplus_{i \in I} F_i = (W, R)$.

Очевидно, что $\forall x \in W_i$ имеем: $R(x) = R_i(x)$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей Крипке.
Соответствующие шкалы: $F_i = (W_i, R_i)$, $i \in I$.
Случай 1.
Множества W_i попарно непересекаются: $W_i \cap W_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Определение (для непересекающихся моделей)

Несвязная сумма непересекающихся моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i, \qquad R = \bigcup_{i \in I} R_i, \qquad V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p) \quad \text{для } p \in \mathrm{Var}.$$

Несвязная сумма шкал $(F_i = (W_i, R_i))_{i \in I}$ — это $F = \biguplus_{i \in I} F_i = (W, R)$.

Очевидно, что $\forall x \in W_i$ имеем: $R(x) = R_i(x)$. Но $\Box$ зависит от $R(x)$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей Крипке.
Соответствующие шкалы: $F_i = (W_i, R_i)$, $i \in I$.

Случай 1.

Множества W_i попарно непересекаются: $W_i \cap W_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Определение (для непересекающихся моделей)

Несвязная сумма непересекающихся моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i, \qquad R = \bigcup_{i \in I} R_i, \qquad V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p) \quad \text{для } p \in \mathrm{Var}.$$

Несвязная сумма шкал $(F_i = (W_i, R_i))_{i \in I}$ — это $F = \biguplus_{i \in I} F_i = (W, R)$.

Очевидно, что $\forall x \in W_i$ имеем: $R(x) = R_i(x)$. Но $\Box$ зависит от $R(x)$.
Индукцией по построению формулы A легко доказывается:

Лемма. $M, x \models A \iff M_i, x \models A$ *для любых* $i \in I$, $x \in W_i$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$.
Делаем для них непересекающиеся «изоморфные копии»:

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$. Делаем для них непересекающиеся «изоморфные копии»: умножаем i-ю модель M_i на $\{i\}$ (например, слева). Получим модель $M_i' \cong M_i$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$. Делаем для них непересекающиеся «изоморфные копии»: умножаем i-ю модель M_i на $\{i\}$ (например, слева). Получим модель $M_i' \cong M_i$.

Утв. *В изоморфных моделях (в соотв. точках) истинно одно и то же.*

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$. Делаем для них непересекающиеся «изоморфные копии»: умножаем i-ю модель M_i на $\{i\}$ (например, слева). Получим модель $M_i' \cong M_i$.

Утв. *В изоморфных моделях (в соотв. точках) истинно одно и то же.*

Определение (для произвольных моделей)

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus\limits_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times W_i)$

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$. Делаем для них непересекающиеся «изоморфные копии»: умножаем i-ю модель M_i на $\{i\}$ (например, слева). Получим модель $M'_i \cong M_i$.

Утв. *В изоморфных моделях (в соотв. точках) истинно одно и то же.*

Определение (для произвольных моделей)

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup_{i \in I}(\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x\rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$. Делаем для них непересекающиеся «изоморфные копии»: умножаем i-ю модель M_i на $\{i\}$ (например, слева). Получим модель $M_i' \cong M_i$.

Утв. *В изоморфных моделях (в соотв. точках) истинно одно и то же.*

Определение (для произвольных моделей)

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus\limits_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup\limits_{i \in I}(\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x \rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,
- отношение достижимости: $\langle i, x \rangle \, R \, \langle j, y \rangle \iff i = j$ и $x \, R_i \, y$,

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$.
Делаем для них непересекающиеся «изоморфные копии»: умножаем i-ю модель M_i на $\{i\}$ (например, слева). Получим модель $M_i' \cong M_i$.

Утв. *В изоморфных моделях (в соотв. точках) истинно одно и то же.*

Определение (для произвольных моделей)

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x \rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,
- отношение достижимости: $\langle i, x \rangle\, R\, \langle j, y \rangle \quad \leftrightharpoons \quad i = j$ и $x\, R_i\, y$,
- оценка переменных: $M, \langle i, x \rangle \models p \quad \leftrightharpoons \quad M_i, x \models p,$ для $p \in \mathrm{Var}$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Случай 2. Даны произвольные модели $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$. Делаем для них непересекающиеся «изоморфные копии»: умножаем i-ю модель M_i на $\{i\}$ (например, слева). Получим модель $M_i' \cong M_i$.

Утв. *В изоморфных моделях (в соотв. точках) истинно одно и то же.*

Определение (для произвольных моделей)

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus\limits_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x\rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,
- отношение достижимости: $\langle i, x\rangle\, R\, \langle j, y\rangle \quad \leftrightharpoons \quad i = j$ и $x\, R_i\, y$,
- оценка переменных: $M, \langle i, x\rangle \models p \quad \leftrightharpoons \quad M_i, x \models p,$ для $p \in \mathrm{Var}$.

Наблюдение. Так построенная M равна несвязной сумме моделей M_i'.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Определение

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus\limits_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x \rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,
- отношение достижимости: $\langle i, x \rangle \, R \, \langle j, y \rangle \iff i = j$ и $x \, R_i \, y$,
- оценка переменных: $M, \langle i, x \rangle \models p \iff M_i, x \models p$, для $p \in \mathrm{Var}$.

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Определение

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x \rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,
- отношение достижимости: $\langle i, x \rangle \, R \, \langle j, y \rangle \quad \leftrightharpoons \quad i = j$ и $x \, R_i \, y$,
- оценка переменных: $M, \langle i, x \rangle \models p \quad \leftrightharpoons \quad M_i, x \models p,$ для $p \in \mathrm{Var}$.

Теорема

Для всякой модальной формулы A и любых $i \in I$, $x \in W_i$ имеем:

1. $M, \langle i, x \rangle \models A \iff M_i, x \models A$

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Определение

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i\in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i\in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x\rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,
- отношение достижимости: $\langle i, x\rangle\, R\, \langle j, y\rangle \quad \leftrightharpoons \quad i = j$ и $x\, R_i\, y$,
- оценка переменных: $M, \langle i, x\rangle \models p \quad \leftrightharpoons \quad M_i, x \models p, \qquad$ для $p \in \mathrm{Var}$.

Теорема

Для всякой модальной формулы A и любых $i \in I$, $x \in W_i$ имеем:

1. $M, \langle i, x\rangle \models A \iff M_i, x \models A$
2. $F, \langle i, x\rangle \models A \iff F_i, x \models A$

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Определение

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup_{i \in I}(\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x\rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,
- отношение достижимости: $\langle i, x\rangle\, R\, \langle j, y\rangle \quad \leftrightharpoons \quad i = j$ и $x\, R_i\, y$,
- оценка переменных: $M, \langle i, x\rangle \models p \quad \leftrightharpoons \quad M_i, x \models p$, для $p \in \mathrm{Var}$.

Теорема

Для всякой модальной формулы A и любых $i \in I$, $x \in W_i$ имеем:

1. $M, \langle i, x\rangle \models A \iff M_i, x \models A$
2. $F, \langle i, x\rangle \models A \iff F_i, x \models A$
3. $M \models A \iff (\ M_i \models A$ *для всех* $i \in I\ )$

1: Непересекающееся объединение (несвязная сумма)

Определение

Несвязная сумма семейства моделей $(M_i = (W_i, R_i, V_i))_{i \in I}$ — это модель $M = \biguplus_{i \in I} M_i = (W, R, V)$, где

- множество точек: $W = \bigcup_{i \in I}(\{i\} \times W_i) = \{\langle i, x \rangle \mid i \in I,\ x \in W_i\}$,
- отношение достижимости: $\langle i, x \rangle \, R \, \langle j, y \rangle \quad \leftrightharpoons \quad i = j$ и $x \, R_i \, y$,
- оценка переменных: $M, \langle i, x \rangle \models p \quad \leftrightharpoons \quad M_i, x \models p, \quad$ для $p \in \mathrm{Var}$.

Теорема

Для всякой модальной формулы A и любых $i \in I$, $x \in W_i$ имеем:

1. $M, \langle i, x \rangle \models A \iff M_i, x \models A$
2. $F, \langle i, x \rangle \models A \iff F_i, x \models A$
3. $M \models A \iff (\ M_i \models A$ *для всех* $i \in I\ )$
4. $F \models A \iff (\ F_i \models A$ *для всех* $i \in I\ )$

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\uplus$.

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ *замкнут отн.* $\uplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ *для всех* $i \in I$, *то* $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ *замкнут отн.* $\uplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ *для всех* $i \in I$, *то* $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\biguplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ для всех $i \in I$, то $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

- $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\biguplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ для всех $i \in I$, то $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

- $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
  Ибо если F_1 и F_2 таковы, то $F_1 \uplus F_2$ не таков.

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\uplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ для всех $i \in I$, то $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

- $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
  Ибо если F_1 и F_2 таковы, то $F_1 \uplus F_2$ не таков.
- $\{F = (W, R) \mid W \text{ конечное}\}$

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\biguplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ для всех $i \in I$, то $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

- $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
  Ибо если F_1 и F_2 таковы, то $F_1 \uplus F_2$ не таков.
- $\{F = (W, R) \mid W \text{ конечное}\}$
  Ибо несвязная сумма бесконечного числа конечных (даже любых) шкал — бесконечная шкала.

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\biguplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ для всех $i \in I$, то $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

- $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
  Ибо если F_1 и F_2 таковы, то $F_1 \uplus F_2$ не таков.
- $\{F = (W, R) \mid W \text{ конечное}\}$
  Ибо несвязная сумма бесконечного числа конечных (даже любых) шкал — бесконечная шкала.
- $\{F = (W, R) \mid F \text{ — связный граф}\}$ — в ор. или неор. смысле.

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\uplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ для всех $i \in I$, то $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

- $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
  Ибо если F_1 и F_2 таковы, то $F_1 \uplus F_2$ не таков.
- $\{F = (W, R) \mid W \text{ конечное}\}$
  Ибо несвязная сумма бесконечного числа конечных (даже любых) шкал — бесконечная шкала.
- $\{F = (W, R) \mid F \text{ — связный граф}\}$ — в ор. или неор. смысле.
  Ибо несвязная сумма связных (даже любых) графов — несвязна.

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\uplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ для всех $i \in I$, то $(\biguplus_{i\in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

- $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
  Ибо если F_1 и F_2 таковы, то $F_1 \uplus F_2$ не таков.
- $\{F = (W, R) \mid W$ конечное$\}$
  Ибо несвязная сумма бесконечного числа конечных (даже любых) шкал — бесконечная шкала.
- $\{F = (W, R) \mid F$ — связный граф$\}$ — в ор. или неор. смысле.
  Ибо несвязная сумма связных (даже любых) графов — несвязна.

Полная логика всегда имеет вид $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$, для некоторого (быть может, «огромного») класса шкал $\mathbb{F}$.

1: Применения несвязной суммы

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут отн. $\biguplus$.
То есть если $F_i \in \mathbb{F}$ для всех $i \in I$, то $(\biguplus_{i \in I} F_i) \in \mathbb{F}$.

$\Rightarrow$ Не являются модально определимыми следующие классы шкал:

- $\{F = (W, R) \mid R = W \times W\}$
  Ибо если F_1 и F_2 таковы, то $F_1 \uplus F_2$ не таков.
- $\{F = (W, R) \mid W \text{ конечное}\}$
  Ибо несвязная сумма бесконечного числа конечных (даже любых) шкал — бесконечная шкала.
- $\{F = (W, R) \mid F \text{ — связный граф}\}$ — в ор. или неор. смысле.
  Ибо несвязная сумма связных (даже любых) графов — несвязна.

Полная логика всегда имеет вид $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$, для некоторого (быть может, «огромного») класса шкал $\mathbb{F}$.
Можно ли этот результат улучшить?

Логики «маленьких» классов шкал

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Логики «маленьких» классов шкал

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$. Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

Логики «маленьких» классов шкал

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

Логики «маленьких» классов шкал

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.
($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.

($\supseteq$) Пусть $A_i \notin L$.

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.

($\supseteq$) Пусть $A_i \notin L$. Тогда $F_i \not\models A_i$.

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.

($\supseteq$) Пусть $A_i \notin L$. Тогда $F_i \not\models A_i$. Значит, $\mathbb{F}' \not\models A_i$ и $A_i \notin \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$. $\lhd$

Логики «маленьких» классов шкал

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.

($\supseteq$) Пусть $A_i \notin L$. Тогда $F_i \not\models A_i$. Значит, $\mathbb{F}' \not\models A_i$ и $A_i \notin \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$. $\triangleleft$

Теорема

Всякая (непр.) полная логика есть логика некоторой одной шкалы.

Логики «маленьких» классов шкал

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.
($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.
($\supseteq$) Пусть $A_i \notin L$. Тогда $F_i \not\models A_i$. Значит, $\mathbb{F}' \not\models A_i$ и $A_i \notin \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$. $\triangleleft$

Теорема

Всякая (непр.) полная логика есть логика некоторой одной шкалы.

Доказательство. Пусть L полна.

Логики «маленьких» классов шкал

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.

($\supseteq$) Пусть $A_i \notin L$. Тогда $F_i \not\models A_i$. Значит, $\mathbb{F}' \not\models A_i$ и $A_i \notin \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$. $\lhd$

Теорема

Всякая (непр.) полная логика есть логика некоторой одной шкалы.

Доказательство. Пусть L полна. Построим $\mathbb{F}' = \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ как в Лемме.

Логики «маленьких» классов шкал

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.

($\supseteq$) Пусть $A_i \notin L$. Тогда $F_i \not\models A_i$. Значит, $\mathbb{F}' \not\models A_i$ и $A_i \notin \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$. $\triangleleft$

Теорема

Всякая (непр.) полная логика есть логика некоторой одной шкалы.

Доказательство. Пусть L полна. Построим $\mathbb{F}' = \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ как в Лемме. Положим $F := \biguplus_{i \in \mathbb{N}} F_i$.

Лемма

Всякая (непротиворечивая) полная логика является логикой некоторого счетного семейства шкал.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$ для некот. класса шкал $\mathbb{F} \neq \varnothing$.
Перенумеруем все «нетеоремы» логики L: $(\mathrm{Fm} \setminus L) = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Для каждой $A_i \notin L$ существует шкала $F_i \in \mathbb{F}$, такая что $F_i \not\models A_i$.
Возьмем $\mathbb{F}' := \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{F}$. Утверждаем: $\mathrm{Logic}(\mathbb{F}) = L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$.

($\subseteq$) Так как $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{F}'$.

($\supseteq$) Пусть $A_i \notin L$. Тогда $F_i \not\models A_i$. Значит, $\mathbb{F}' \not\models A_i$ и $A_i \notin \mathrm{Logic}(\mathbb{F}')$. $\triangleleft$

Теорема

Всякая (непр.) полная логика есть логика некоторой одной шкалы.

Доказательство. Пусть L полна. Построим $\mathbb{F}' = \{F_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ как в Лемме. Положим $F := \biguplus_{i \in \mathbb{N}} F_i$. Очевидно: $\mathrm{Logic}(F) = \mathrm{Logic}(\mathbb{F}') = L$. $\triangleleft$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

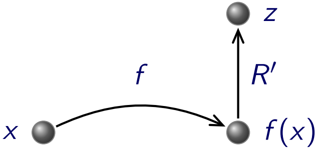
Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.



2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

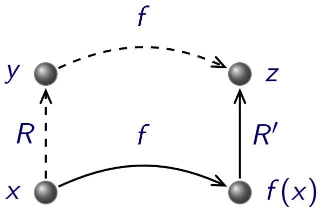
Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.



2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

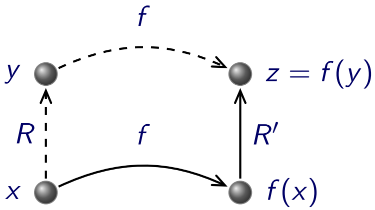
Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.



2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если f — сюръекция, то пишем $f\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $f\colon F \twoheadrightarrow F'$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если f — сюръекция, то пишем $f\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $f\colon F \twoheadrightarrow F'$.
- Пишут $M \twoheadrightarrow M'$, если $\exists$ сюръективный p-морфизм $f\colon M \twoheadrightarrow M'$;

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если f — сюръекция, то пишем $f\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $f\colon F \twoheadrightarrow F'$.
- Пишут $M \twoheadrightarrow M'$, если $\exists$ сюръективный p-морфизм $f\colon M \twoheadrightarrow M'$; при этом говорят, что M' — p-морфный образ модели M.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\, R\, y$, то $f(x)\, R'\, f(y)$;

(back) если $f(x)\, R'\, z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\, R\, y$ и $f(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение p-морфизма шкал из F в F'.
- Если f — сюръекция, то пишем $f\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $f\colon F \twoheadrightarrow F'$.
- Пишут $M \twoheadrightarrow M'$, если $\exists$ сюръективный p-морфизм $f\colon M \twoheadrightarrow M'$; при этом говорят, что M' — p-морфный образ модели M.
- Аналогично $F \twoheadrightarrow F'$.

2. Модальный морфизм (или р-морфизм)

Пусть даны две модели $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — р-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

- Опустив (var), получим определение р-морфизма шкал из F в F'.
- Если f — сюръекция, то пишем $f\colon M \twoheadrightarrow M'$ или $f\colon F \twoheadrightarrow F'$.
- Пишут $M \twoheadrightarrow M'$, если $\exists$ сюръективный р-морфизм $f\colon M \to M'$; при этом говорят, что M' — р-морфный образ модели M.
- Аналогично $F \twoheadrightarrow F'$.

Интуитивно — это «склеивание» некоторых точек шкалы (модели).

2. Модальный морфизм (или р-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — **р-морфизм** из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы* A.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f : W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A,$ *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Индукция по построению A. База ($A = p$) и шаги $\wedge, \vee, \neg, \to$ тривиальны.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x \, R \, y$, то $f(x) \, R' \, f(y)$;

(back) если $f(x) \, R' \, z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x \, R \, y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы* A.

Доказательство. Индукция по построению A. База ($A = p$) и шаги $\wedge, \vee, \neg, \to$ тривиальны. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Индукция по построению A. База ($A = p$) и шаги $\wedge, \vee, \neg, \to$ тривиальны. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Leftarrow$) Пусть $M', f(x) \models \Box A$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы* A.

Доказательство. Индукция по построению A. База ($A = p$) и шаги $\wedge, \vee, \neg, \to$ тривиальны. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Leftarrow$) Пусть $M', f(x) \models \Box A$. Почему $M, x \models \Box A$? Берем любой y: xRy.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы* A.

Доказательство. Индукция по построению A. База ($A = p$) и шаги $\wedge, \vee, \neg, \to$ тривиальны. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Leftarrow$) Пусть $M', f(x) \models \Box A$. Почему $M, x \models \Box A$? Берем любой y: xRy.

xRy

2. Модальный морфизм (или р-морфизм)

Определение

Функция $f : W \to W'$ — р-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A,$ *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Индукция по построению A. База ($A = p$) и шаги $\wedge, \vee, \neg, \to$ тривиальны. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Leftarrow$) Пусть $M', f(x) \models \Box A$. Почему $M, x \models \Box A$? Берем любой y: xRy.

$$xRy \implies f(x)\,R'\,f(y)$$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы* A.

Доказательство. Индукция по построению A. База ($A = p$) и шаги $\wedge, \vee, \neg, \to$ тривиальны. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Leftarrow$) Пусть $M', f(x) \models \Box A$. Почему $M, x \models \Box A$? Берем любой y: xRy.

$$xRy \implies f(x)\,R'\,f(y) \implies M', f(y) \models A$$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f : W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы* A.

Доказательство. Индукция по построению A. База ($A = p$) и шаги $\wedge, \vee, \neg, \to$ тривиальны. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Leftarrow$) Пусть $M', f(x) \models \Box A$. Почему $M, x \models \Box A$? Берем любой y: xRy.

$$xRy \implies f(x)\,R'\,f(y) \implies M', f(y) \models A \implies M, y \models A, \text{ ч.т.д. } \triangleleft$$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Rightarrow$) Пусть $M, x \models \Box A$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x \, R \, y$, то $f(x) \, R' \, f(y)$;

(back) если $f(x) \, R' \, z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x \, R \, y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A,$ *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Rightarrow$) Пусть $M, x \models \Box A$. Почему $M', f(x) \models \Box A$? Берем $\forall z$: $f(x) R' z$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A,$ *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Rightarrow$) Пусть $M, x \models \Box A$. Почему $M', f(x) \models \Box A$? Берем $\forall z$: $f(x)R'z$.

$f(x)R'z$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A$, *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

$(\Rightarrow)$ Пусть $M, x \models \Box A$. Почему $M', f(x) \models \Box A$? Берем $\forall z$: $f(x)R'z$.

$f(x)R'z \implies \exists y\colon x\,R\,y,\ f(y) = z$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — **p-морфизм** из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A,$ *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Rightarrow$) Пусть $M, x \models \Box A$. Почему $M', f(x) \models \Box A$? Берем $\forall z$: $f(x) R' z$.

$f(x) R' z \implies \exists y\colon x\,R\,y,\ f(y) = z \implies M, y \models A$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Определение

Функция $f\colon W \to W'$ — p-морфизм из M в M', если

(var) $M, x \models p \iff M', f(x) \models p$ для каждой переменной $p \in \mathrm{Var}$;

(forth) если $x\,R\,y$, то $f(x)\,R'\,f(y)$;

(back) если $f(x)\,R'\,z$, то $\exists$ точка $y \in W$, такая что $x\,R\,y$ и $f(y) = z$.

Лемма

$M, x \models A \iff M', f(x) \models A,$ *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Осталось:

$$M, x \models \Box A \iff M', f(x) \models \Box A.$$

($\Rightarrow$) Пусть $M, x \models \Box A$. Почему $M', f(x) \models \Box A$? Берем $\forall z$: $f(x) R' z$.

$f(x) R' z \implies \exists y\colon x\,R\,y,\ f(y) = z \implies M, y \models A \implies M', f(y) \models A.$ $\triangleleft$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f : M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A.$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A:

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A:

3. $F, x \models A \implies F', f(x) \models A$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A:

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A:

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', f(x) \models A$.
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A:

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A:

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', f(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

Доказательство. (1) См. выше. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$*. Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$*. Тогда для любой формулы* A*:*

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', f(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

Доказательство. (1) См. выше. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$.

2. Модальный морфизм (или р-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

3. $F, x \models A \implies F', f(x) \models A.$
4. $F \models A \implies F' \models A.$

Доказательство. (1) См. выше. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка. Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f : M \twoheadrightarrow M'$. Тогда для любой формулы A:

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f : F \twoheadrightarrow F'$. Тогда для любой формулы A:
3. $F, x \models A \Longrightarrow F', f(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

Доказательство. (1) См. выше. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$
Какую оценку взять на F?

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f : M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A:

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f : F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A:

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', f(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

Доказательство. (1) См. выше. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$
Какую оценку взять на F? Такую: $x \models p \;\leftrightharpoons\; f(x) \models p$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

1. $M, x \models A \Longleftrightarrow M', f(x) \models A.$
2. $M \models A \Longleftrightarrow M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A*:*

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', f(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

Доказательство. (1) См. выше. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$
Какую оценку взять на F? Такую: $x \models p \;\leftrightharpoons\; f(x) \models p$.
Получили модель $M = (W, R, V)$. Тогда $f\colon M \twoheadrightarrow M'$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. Тогда для любой формулы A:

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A.$
2. $M \models A \iff M' \models A.$

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. Тогда для любой формулы A:

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', f(x) \models A.$
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A.$

Доказательство. (1) См. выше. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$
Какую оценку взять на F? Такую: $x \models p \;\leftrightharpoons\; f(x) \models p$.
Получили модель $M = (W, R, V)$. Тогда $f\colon M \twoheadrightarrow M'$.
Кроме того $\exists x \in W\colon f(x) = x'$.

2. Модальный морфизм (или p-морфизм)

Теорема

Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. *Тогда для любой формулы* A:

1. $M, x \models A \iff M', f(x) \models A$.
2. $M \models A \iff M' \models A$.

   Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. *Тогда для любой формулы* A:

3. $F, x \models A \Longrightarrow F', f(x) \models A$.
4. $F \models A \Longrightarrow F' \models A$.

Доказательство. (1) См. выше. (2) Легко. (3) по аналогии с (4).

(4) Допустим $F', x' \not\models A$. Тогда $\exists V'$ — опровергающая оценка.
Обозначим $M' = (F', V')$. Имеем $M', x' \not\models A$
Какую оценку взять на F? Такую: $x \models p \ \leftrightharpoons \ f(x) \models p$.
Получили модель $M = (W, R, V)$. Тогда $f\colon M \twoheadrightarrow M'$.
Кроме того $\exists x \in W\colon f(x) = x'$. Поэтому $M, x \not\models A$. ◁

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$).

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F \twoheadrightarrow F', \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если } \ F \in \mathbb{F} \ \text{ и } \ F \twoheadrightarrow F', \ \text{ то } \ F' \in \mathbb{F}.$$

Класс иррефлексивных шкал — не модально определим:

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ *замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал* ($\twoheadrightarrow$)*. То есть:*

$$\text{если } \; F \in \mathbb{F} \; \text{ и } \; F \twoheadrightarrow F', \; \text{ то } \; F' \in \mathbb{F}.$$

Класс иррефлексивных шкал — не модально определим:
так как имеем сюръективный p-морфизм $(\mathbb{Z}, <) \twoheadrightarrow (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$.

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F \twoheadrightarrow F', \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

Класс иррефлексивных шкал — не модально определим:
так как имеем сюръективный p-морфизм $(\mathbb{Z}, <) \twoheadrightarrow (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$.

По доказанной теореме, для любой модальной формулы A:

$$(\mathbb{Z}, <) \models A \quad \Longrightarrow \quad (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\}) \models A.$$

Приложения p-морфизмов

Следствие

Всякий модально определимый класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия p-морфных образов шкал ($\twoheadrightarrow$). То есть:

$$\text{если} \quad F \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad F \twoheadrightarrow F', \quad \text{то} \quad F' \in \mathbb{F}.$$

Класс иррефлексивных шкал — не модально определим:
так как имеем сюръективный p-морфизм $(\mathbb{Z}, <) \twoheadrightarrow (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$.

По доказанной теореме, для любой модальной формулы A:

$$(\mathbb{Z}, <) \models A \quad \Longrightarrow \quad (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\}) \models A.$$

Эти шкалы — контрпример к импликации $\Longleftarrow$:

$$(\mathbb{Z}, <) \not\models \Box p \to p, \quad \text{но} \quad (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\}) \models \Box p \to p.$$

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность $\mathrm{PS}\textsc{pace}$.

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
   Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
   В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
   Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность $\mathrm{PS\scriptstyle{PACE}}$.
   В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
   Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность PSPACE.
   В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?
   Проблема разрешима, сложность coNP.

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
   Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность PSPACE.
   В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?
   Проблема разрешима, сложность coNP. Для полимодальных логик — сильно неразрешима (не аналитическое).

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность PSPACE.
В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?
Проблема разрешима, сложность coNP. Для полимодальных логик — сильно неразрешима (не аналитическое).
3. Отношение следования на шкалах между формулами $A \models_{\mathsf{Fr}} B$ — сильно неразрешимо (не аналитическое), даже для $A, B \in \mathrm{Fm}(\Box)$.
4. Всякая полная логика L есть логика некот. шкалы: $L = \mathrm{Logic}(F)$.

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
   Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность PSPACE.
   В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?
   Проблема разрешима, сложность coNP. Для полимодальных логик — сильно неразрешима (не аналитическое).
3. Отношение следования на шкалах между формулами $A \models_{\mathsf{Fr}} B$ — сильно неразрешимо (не аналитическое), даже для $A, B \in \mathsf{Fm}(\Box)$.
4. Всякая полная логика L есть логика некот. шкалы: $L = \mathsf{Logic}(F)$.
   Какого размера шкал F достаточно?

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность $\mathrm{PS{\scriptsize PACE}}$.
В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?
Проблема разрешима, сложность $\mathrm{co}\mathrm{NP}$. Для полимодальных логик — сильно неразрешима (не аналитическое).
3. Отношение следования на шкалах между формулами $A \models_{\mathsf{Fr}} B$ — сильно неразрешимо (не аналитическое), даже для $A, B \in \mathsf{Fm}(\Box)$.
4. Всякая полная логика L есть логика некот. шкалы: $L = \mathsf{Logic}(F)$.
Какого размера шкал F достаточно? Гигантских!!

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность $\mathrm{PS{\small PACE}}$.
В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?
Проблема разрешима, сложность $\mathrm{co}\mathrm{NP}$. Для полимодальных логик — сильно неразрешима (не аналитическое).
3. Отношение следования на шкалах между формулами $A \models_{\mathsf{Fr}} B$ — сильно неразрешимо (не аналитическое), даже для $A, B \in \mathsf{Fm}(\Box)$.
4. Всякая полная логика L есть логика некот. шкалы: $L = \mathsf{Logic}(F)$.
Какого размера шкал F достаточно? Гигантских!!

$$\beth_0 = |\mathbb{N}|, \qquad \beth_{n+1} = 2^{\beth_n}, \qquad \beth_\omega = \sup\{\beth_n \mid n \in \omega\},$$

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность $\textsc{PSpace}$.
В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?
Проблема разрешима, сложность $\mathrm{co}\mathrm{NP}$. Для полимодальных логик — сильно неразрешима (не аналитическое).
3. Отношение следования на шкалах между формулами $A \models_{\mathsf{Fr}} B$ — сильно неразрешимо (не аналитическое), даже для $A, B \in \mathrm{Fm}(\Box)$.
4. Всякая полная логика L есть логика некот. шкалы: $L = \mathrm{Logic}(F)$.
Какого размера шкал F достаточно? Гигантских!!
$$\beth_0 = |\mathbb{N}|, \qquad \beth_{n+1} = 2^{\beth_n}, \qquad \beth_\omega = \sup\{\beth_n \mid n \in \omega\},$$
Бывают полные логики L, для которых наим. такая шкала F имеет мощность $\beth_\omega$! И даже $\beth_{\omega+\omega}$! [Thomason, Shehtman, Chagrov]

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$?
Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность $\textsc{PSpace}$.
В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$?
Проблема разрешима, сложность $\text{co}\textsc{NP}$. Для полимодальных логик — сильно неразрешима (не аналитическое).
3. Отношение следования на шкалах между формулами $A \models_{\mathsf{Fr}} B$ — сильно неразрешимо (не аналитическое), даже для $A, B \in \mathrm{Fm}(\Box)$.
4. Всякая полная логика L есть логика некот. шкалы: $L = \mathrm{Logic}(F)$.
Какого размера шкал F достаточно? Гигантских!!
$$\beth_0 = |\mathbb{N}|, \qquad \beth_{n+1} = 2^{\beth_n}, \qquad \beth_\omega = \sup\{\beth_n \mid n \in \omega\},$$
Бывают полные логики L, для которых наим. такая шкала F имеет мощность $\beth_\omega$! И даже $\beth_{\omega+\omega}$! [Thomason, Shehtman, Chagrov] И даже недостижимые кардиналы (если они $\exists$). [Kracht]

Заключительные интересные факты

1. Как по формуле A узнать, что для всех шкал F имеем $F \models A$? Проблема разрешима (алгоритм $\exists$), сложность PSPACE. В полимодальном случае — аналогично, тот же класс сложности.
2. Как по формуле A узнать, что существует шкала F, т.ч. $F \models A$? Проблема разрешима, сложность coNP. Для полимодальных логик — сильно неразрешима (не аналитическое).
3. Отношение следования на шкалах между формулами $A \models_{\mathsf{Fr}} B$ — сильно неразрешимо (не аналитическое), даже для $A, B \in \mathsf{Fm}(\Box)$.
4. Всякая полная логика L есть логика некот. шкалы: $L = \mathsf{Logic}(F)$. Какого размера шкал F достаточно? Гигантских!!
$$\beth_0 = |\mathbb{N}|, \qquad \beth_{n+1} = 2^{\beth_n}, \qquad \beth_\omega = \sup\{\beth_n \mid n \in \omega\},$$
Бывают полные логики L, для которых наим. такая шкала F имеет мощность $\beth_\omega$! И даже $\beth_{\omega+\omega}$! [Thomason, Shehtman, Chagrov] И даже недостижимые кардиналы (если они $\exists$). [Kracht]

Конец лекции 5. Спасибо за внимание!