Модальная логика. Лекция 4: примеры канонических модальных формул и логик

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

15 октября 2020 года

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^m\Diamond^n p$, где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$, где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$, где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad$ для всех $y \in W$, таких что xRy, имеем $M, y \models A$

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$, где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad$ для всех $y \in W$, таких что xRy, имеем $M, y \models A$
$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad$ существует $y \in W$, такой что xRy и $M, y \models A$

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$,   где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad$ для всех $y \in W$, таких что xRy, имеем $M, y \models A$

$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad$ существует $y \in W$, такой что xRy и $M, y \models A$

Пусть $n \geqslant 0$. Обозначение: $\Box^n A := \underbrace{\Box \ldots \Box}_{n \text{ штук}} A$;

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$, где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

$$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \in W\text{, таких что } xRy\text{, имеем } M, y \models A$$
$$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad \text{существует } y \in W\text{, такой что } xRy \text{ и } M, y \models A$$

Пусть $n \geqslant 0$. Обозначение: $\Box^n A := \underbrace{\Box \dots \Box}_{n \text{ штук}} A$; аналогично $\Diamond^n$.

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$, где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

$$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \in W \text{, таких что } xRy \text{, имеем } M, y \models A$$
$$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad \text{существует } y \in W \text{, такой что } xRy \text{ и } M, y \models A$$

Пусть $n \geqslant 0$. Обозначение: $\Box^n A := \underbrace{\Box \ldots \Box}_{n \text{ штук}} A$; аналогично $\Diamond^n$.

Композиция отношений $R, S \subseteq W \times W$ определяется так:

$$R \circ S = \{\langle x, z \rangle \mid \exists y\colon \ \langle x, y \rangle \in R \text{ и } \langle y, z \rangle \in S\}.$$

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^m\Diamond^n p$, где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

$$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \in W\text{, таких что } xRy\text{, имеем } M, y \models A$$
$$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad \text{существует } y \in W\text{, такой что } xRy \text{ и } M, y \models A$$

Пусть $n \geqslant 0$. Обозначение: $\Box^n A := \underbrace{\Box\ldots\Box}_{n\text{ штук}} A$; аналогично $\Diamond^n$.

Композиция отношений $R, S \subseteq W \times W$ определяется так:

$$R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid \exists y\colon\ \langle x, y\rangle \in R \text{ и } \langle y, z\rangle \in S\}.$$

Степени отношения: $R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in W\}$, $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$.

Итерированные модальности

План: изучить (i, j, m, n)-формулы $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$, где $i, j, m, n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad$ для всех $y \in W$, таких что xRy, имеем $M, y \models A$
$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad$ существует $y \in W$, такой что xRy и $M, y \models A$

Пусть $n \geqslant 0$. Обозначение: $\Box^n A := \underbrace{\Box \ldots \Box}_{n \text{ штук}} A$; аналогично $\Diamond^n$.

Композиция отношений $R, S \subseteq W \times W$ определяется так:

$$R \circ S = \{\langle x, z \rangle \mid \exists y\colon\ \langle x, y \rangle \in R \text{ и } \langle y, z \rangle \in S\}.$$

Степени отношения: $R^0 = \{\langle x, x \rangle \mid x \in W\}$, $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$.

Упражнение. Для всякого $n \geqslant 0$ имеем:

$M, x \models \Box^n A \quad \Leftrightarrow \quad$ для всех $y \in W$, таких что $x \, R^n \, y$, имеем $M, y \models A$

Итерированные модальности

План: изучить (i,j,m,n)-формулы $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^m\Diamond^n p$, где $i,j,m,n \geqslant 0$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель: $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

$$\begin{array}{lcl} M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \text{для всех } y \in W, \text{ таких что } xRy, \text{ имеем } M, y \models A \\ M, x \models \Diamond A & \Leftrightarrow & \text{существует } y \in W, \text{ такой что } xRy \text{ и } M, y \models A \end{array}$$

Пусть $n \geqslant 0$. Обозначение: $\Box^n A := \underbrace{\Box \ldots \Box}_{n \text{ штук}} A$; аналогично $\Diamond^n$.

Композиция отношений $R, S \subseteq W \times W$ определяется так:

$$R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid \exists y\colon\ \langle x, y\rangle \in R \text{ и } \langle y, z\rangle \in S\}.$$

Степени отношения: $R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in W\}$, $R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n$.

Упражнение. Для всякого $n \geqslant 0$ имеем:

$$\begin{array}{lcl} M, x \models \Box^n A & \Leftrightarrow & \text{для всех } y \in W, \text{ таких что } x\,R^n\,y, \text{ имеем } M, y \models A \\ M, x \models \Diamond^n A & \Leftrightarrow & \text{существует } y \in W, \text{ такой что } x\,R^n\,y \text{ и } M, y \models A \end{array}$$

Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \qquad \Longleftrightarrow$

Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z\, \big(\, x\, R^i\, y \;\;\&\;\; x\, R^m\, z \;\;\Rightarrow\;\; \exists t\, (y\, R^j\, t \;\;\&\;\; z\, R^n\, t)\big)$$

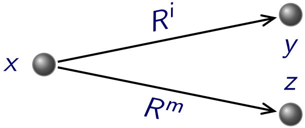
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \iff \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \, \big(x \, R^i \, y \;\; \& \;\; x \, R^m \, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t \, (y \, R^j \, t \;\; \& \;\; z \, R^n \, t) \big)$$



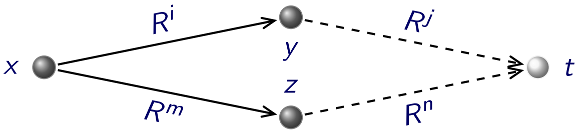
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \iff \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x R^i y \;\;\&\;\; x R^m z \;\;\Rightarrow\;\; \exists t \left(y R^j t \;\;\&\;\; z R^n t \right) \right)$$



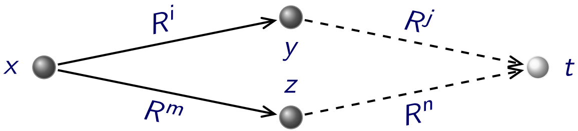
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\;\&\;\; x\, R^m\, z \;\;\Rightarrow\;\; \exists t \left(y\, R^j\, t \;\;\&\;\; z\, R^n\, t \right) \right)$$



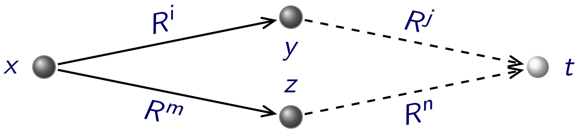
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\; \& \;\; x\, R^m\, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t \left(y\, R^j\, t \;\; \& \;\; z\, R^n\, t \right) \right)$$



Доказательство.
$(\Leftarrow)$ Пусть $x \models \Diamond^i \Box^j p$. Значит, $\exists y$: $x\, R^i\, y$ и $y \models \Box^j p$. Докажем: $x \models \Box^m \Diamond^n p$.

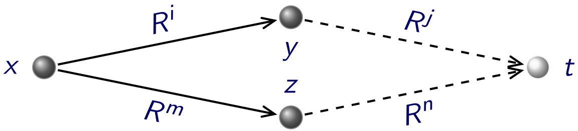
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \iff \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \,(\, x\, R^i\, y \;\;\&\;\; x\, R^m\, z \;\;\Rightarrow\;\; \exists t\, (y\, R^j\, t \;\;\&\;\; z\, R^n\, t)\,)$$



Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $x \models \Diamond^i \Box^j p$. Значит, $\exists y$: $x\, R^i\, y$ и $y \models \Box^j p$. Докажем: $x \models \Box^m \Diamond^n p$. Для этого возьмем $\forall z$: $x\, R^m\, z$, и проверим: $z \models \Diamond^n p$.

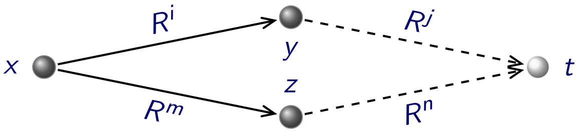
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\; \& \;\; x\, R^m\, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t\, (y\, R^j\, t \;\; \& \;\; z\, R^n\, t) \right)$$



Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $x \models \Diamond^i \Box^j p$. Значит, $\exists y$: $x\, R^i\, y$ и $y \models \Box^j p$. Докажем: $x \models \Box^m \Diamond^n p$. Для этого возьмем $\forall z$: $x\, R^m\, z$, и проверим: $z \models \Diamond^n p$. По (i, j, m, n)-свойству, $\exists t$ такой, что $y\, R^j\, t$ и $z\, R^n\, t$.

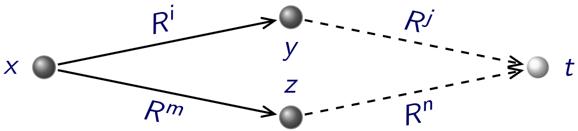
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \iff R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x R^i y \ \& \ x R^m z \ \Rightarrow \ \exists t \left(y R^j t \ \& \ z R^n t \right) \right)$$



Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $x \models \Diamond^i \Box^j p$. Значит, $\exists y$: $x R^i y$ и $y \models \Box^j p$. Докажем: $x \models \Box^m \Diamond^n p$. Для этого возьмем $\forall z$: $x R^m z$, и проверим: $z \models \Diamond^n p$.
По (i, j, m, n)-свойству, $\exists t$ такой, что $y R^j t$ и $z R^n t$.
Ввиду $y \models \Box^j p$ получаем $t \models p$.

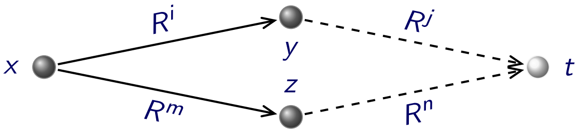
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \qquad \Longleftrightarrow \qquad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \ \ \& \ \ x\, R^m\, z \ \ \Rightarrow \ \ \exists t \left(y\, R^j\, t \ \ \& \ \ z\, R^n\, t \right) \right)$$



Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $x \models \Diamond^i \Box^j p$. Значит, $\exists y$: $x\, R^i\, y$ и $y \models \Box^j p$. Докажем: $x \models \Box^m \Diamond^n p$. Для этого возьмем $\forall z$: $x\, R^m\, z$, и проверим: $z \models \Diamond^n p$.

По (i, j, m, n)-свойству, $\exists t$ такой, что $y\, R^j\, t$ и $z\, R^n\, t$.

Ввиду $y \models \Box^j p$ получаем $t \models p$.

Ввиду $z\, R^n\, t$ получаем $z \models \Diamond^n p$. $\triangleleft$

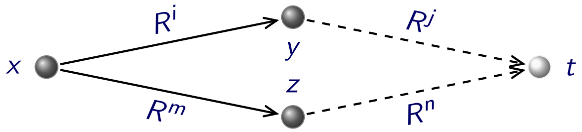
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\; \& \;\; x\, R^m\, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t \left(y\, R^j\, t \;\; \& \;\; z\, R^n\, t \right) \right)$$



Доказательство. Напоминание: $R(x) \; := \{ y \mid x\, R\, y \}$.

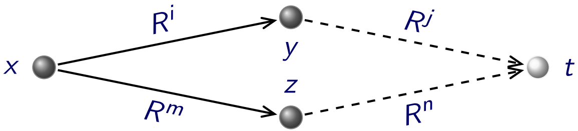
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \iff R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\; \& \;\; x\, R^m\, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t\, (y\, R^j\, t \;\; \& \;\; z\, R^n\, t) \right)$$



Доказательство. Напоминание: $R(x) := \{y \mid x\, R\, y\}$.
$(\Rightarrow)$

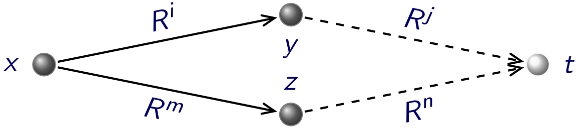
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\; \& \;\; x\, R^m\, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t \left(y\, R^j\, t \;\; \& \;\; z\, R^n\, t \right) \right)$$



Доказательство. Напоминание: $R(x) := \{y \mid x\, R\, y\}$.

$(\Rightarrow)$ Допустим, (i, j, m, n)-свойство нарушено для точек x, y, z.

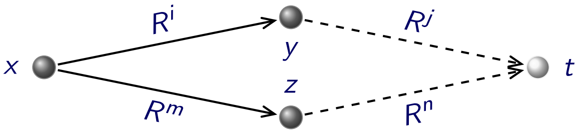
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \iff \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z\, \big(\, x\, R^i\, y \;\;\&\;\; x\, R^m\, z \;\;\Rightarrow\;\; \exists t\, (y\, R^j\, t \;\;\&\;\; z\, R^n\, t)\,\big)$$



Доказательство. Напоминание: $R(x) \;:= \{y \mid x\, R\, y\}$.

$(\Rightarrow)$ Допустим, (i, j, m, n)-свойство нарушено для точек x, y, z.

Значит, $x\, R^i\, y$ и $x\, R^m\, z$, но $R^j(y) \cap R^n(z) = \varnothing$.

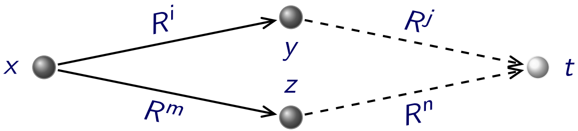
Какое свойство шкал выражает (i,j,m,n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i,j,m,n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\; \& \;\; x\, R^m\, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t \left(y\, R^j\, t \;\; \& \;\; z\, R^n\, t \right) \right)$$



Доказательство. Напоминание: $R(x) := \{y \mid x\, R\, y\}$.

$(\Rightarrow)$ Допустим, (i,j,m,n)-свойство нарушено для точек x, y, z.

Значит, $x\, R^i\, y$ и $x\, R^m\, z$, но $R^j(y) \cap R^n(z) = \varnothing$.

Угадаем оценку: $V(p) := R^j(y)$.

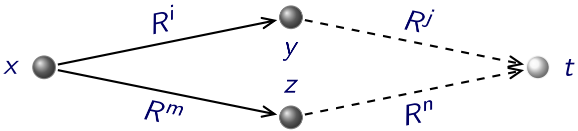
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\; \& \;\; x\, R^m\, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t \left(y\, R^j\, t \;\; \& \;\; z\, R^n\, t \right) \right)$$



Доказательство. Напоминание: $R(x) := \{y \mid x\, R\, y\}$.
$(\Rightarrow)$ Допустим, (i, j, m, n)-свойство нарушено для точек x, y, z.
Значит, $x\, R^i\, y$ и $x\, R^m\, z$, но $R^j(y) \cap R^n(z) = \varnothing$.
Угадаем оценку: $V(p) := R^j(y)$.
Тогда $y \models \Box^j p$ и $z \models \Diamond^i \Box^j p$,

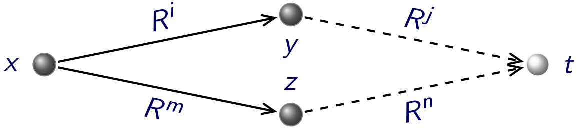
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\;\&\;\; x\, R^m\, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t \left(y\, R^j\, t \;\;\&\;\; z\, R^n\, t \right) \right)$$



Доказательство. Напоминание: $R(x) := \{y \mid x\, R\, y\}$.
$(\Rightarrow)$ Допустим, (i, j, m, n)-свойство нарушено для точек x, y, z.
Значит, $x\, R^i\, y$ и $x\, R^m\, z$, но $R^j(y) \cap R^n(z) = \varnothing$.
Угадаем оценку: $V(p) := R^j(y)$.
Тогда $y \models \Box^j p$ и $z \models \Diamond^i \Box^j p$, а также $z \not\models \Diamond^n p$ и $x \not\models \Box^m \Diamond^n p$.

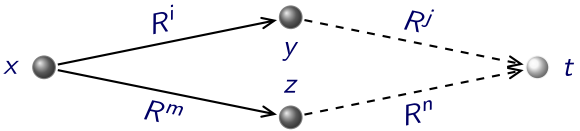
Какое свойство шкал выражает (i, j, m, n)-формула?

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Лемма 1.

$F \models \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \quad \Longleftrightarrow \quad R$ обладает (i, j, m, n)-свойством:

$$\forall x, y, z \left(x\, R^i\, y \;\;\&\;\; x\, R^m\, z \;\;\Rightarrow\;\; \exists t \left(y\, R^j\, t \;\;\&\;\; z\, R^n\, t \right) \right)$$



Доказательство. Напоминание: $R(x) := \{y \mid x\, R\, y\}$.
$(\Rightarrow)$ Допустим, (i, j, m, n)-свойство нарушено для точек x, y, z.
Значит, $x\, R^i\, y$ и $x\, R^m\, z$, но $R^j(y) \cap R^n(z) = \varnothing$.
Угадаем оценку: $V(p) := R^j(y)$.
Тогда $y \models \Box^j p$ и $z \models \Diamond^i \Box^j p$, а также $z \not\models \Diamond^n p$ и $x \not\models \Box^m \Diamond^n p$.
Тем самым в точке x опроверглась (i, j, m, n)-формула.

Напоминание: канонические логики

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \ \mid \ x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,

Напоминание: канонические логики

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathsf{Fm} \ \mid \ x - \text{ПНТ и } x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \ \leftrightharpoons$ для всех формул $A \in \mathsf{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,

Напоминание: канонические логики

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \;\mid\; x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p_i \;\leftrightharpoons\; p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p_i \;\leftrightharpoons\; p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

$T \subseteq \mathrm{Fm}$ — теория, если $T \supseteq \mathbf{K}$ и T замкнута по MP.

Напоминание: канонические логики

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,
- $x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p_i \;\leftrightharpoons\; p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

$T \subseteq \mathrm{Fm}$ — теория, если $T \supseteq \mathbf{K}$ и T замкнута по MP.

Теория T — полная непротиворечивая, если $\forall A$: $A \notin T \Leftrightarrow (\neg A) \in T$.

Напоминание: канонические логики

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x — \text{ПНТ и } x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \ \leftrightharpoons \$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,
- $x \models p_i \ \leftrightharpoons \ p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Факт: $M_L \models L$ для всякой нормальной непротиворечивой логики L.

Напоминание: канонические логики

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \; := \; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \;\; \leftrightharpoons \;\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\; \Rightarrow \;\; A \in y)$,
- $x \models p_i \;\; \leftrightharpoons \;\; p_i \in x, \quad$ для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Факт: $M_L \models L$ для всякой нормальной непротиворечивой логики L.

Каноническая шкала логики L — это $F_L = (W_L, R_L)$.

Напоминание: канонические логики

Определение

Канонческая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \ \mid \ x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,
- $x \, R_L \, y \ \ \leftrightharpoons \ \$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,
- $x \models p_i \ \leftrightharpoons \ p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Каноническая шкала логики L — это $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — **каноническая**, если $F_L \models L$.

Напоминание: канонические логики

Определение

Канонический модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \ \leftrightharpoons \$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,
- $x \models p_i \ \leftrightharpoons \ p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Каноническая шкала логики L — это $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — **каноническая**, если $F_L \models L$.

Теорема

L — *каноническая логика* $\Longrightarrow$ L — *полная логика.*

Напоминание: канонические логики

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p_i \;\leftrightharpoons\; p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Каноническая шкала логики L — это $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — **каноническая**, если $F_L \models L$.

Теорема

L — каноническая логика $\;\Longrightarrow\;$ L — полная логика.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ (к исчислению $\mathbf{K}$ добавили множество аксиом Γ).

Напоминание: канонические логики

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x - \text{ПНТ и } x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \ \leftrightharpoons$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,
- $x \models p_i \ \leftrightharpoons \ p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Каноническая шкала логики L — это $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — **каноническая**, если $F_L \models L$.

Теорема

L — каноническая логика $\implies$ L — полная логика.

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ (к исчислению $\mathbf{K}$ добавили множество аксиом Γ).
Чтобы доказать, что L канонич., что проверить для формул $A \in \Gamma$?

Напоминание: канонические формулы

Определение

Модальная формула A — каноническая, если для любой логики L, такой что $A \in L$, имеем $F_L \models A$.

Напоминание: канонические формулы

Определение

Модальная формула A — *канонической*, если для любой логики L, такой что $A \in L$, имеем $F_L \models A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$. *Тогда:*

Напоминание: канонические формулы

Определение

Модальная формула A — **каноническая**, если для любой логики L, такой что $A \in L$, имеем $F_L \models A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$. *Тогда:*

все формулы из Γ *канонические* $\Rightarrow$ L — *каноническая* $\Rightarrow$ L — *полная.*

Напоминание: канонические формулы

Определение

Модальная формула A — канонческая, если для любой логики L, такой что $A \in L$, имеем $F_L \models A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$. *Тогда:*

все формулы из Γ *канонические* $\Rightarrow$ L — *каноническая* $\Rightarrow$ L — *полная.*

Определение

Логика L — полная, если для всех формул A имеем:

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F\text{, таких что } F \models L.$$

Расширение теории одной формулой (напоминание)

$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.

Расширение теории одной формулой (напоминание)

$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.

Лемма 1.

$$T + A \;=\; \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T + \Gamma \quad = \quad \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T + \Gamma \;=\; \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.

($\subseteq$) Множество S содержит T и Γ.

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T + \Gamma \;=\; \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.

($\subseteq$) Множество S содержит T и Γ. Множество S замкнуто по MP:

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T + \Gamma \;=\; \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
($\subseteq$) Множество S содержит T и Γ. Множество S замкнуто по MP:
если $B \in S$, то есть $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T$,

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T + \Gamma \;=\; \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
($\subseteq$) Множество S содержит T и Γ. Множество S замкнуто по MP:
если $B \in S$, то есть $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T$,
и $(B \to C) \in S$, то есть $(A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to (B \to C)) \in T$,

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T + \Gamma \;=\; \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
($\subseteq$) Множество S содержит T и Γ. Множество S замкнуто по MP:
если $B \in S$, то есть $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T$,
и $(B \to C) \in S$, то есть $(A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to (B \to C)) \in T$,
то $C \in S$, ибо $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to C) \in T$ по тавтологии:

$$(\alpha \to B) \;\to\; \big[(\alpha' \to (B \to C)) \;\to\; (\alpha \wedge \alpha' \to C)\big].$$

Расширение теории множеством формул

$T+\Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T+\Gamma \;=\; \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
($\subseteq$) Множество S содержит T и Γ. Множество S замкнуто по MP:
если $B \in S$, то есть $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T$,
и $(B \to C) \in S$, то есть $(A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to (B \to C)) \in T$,
то $C \in S$, ибо $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to C) \in T$ по тавтологии:

$$(\alpha \to B) \;\to\; \big[(\alpha' \to (B \to C)) \;\to\; (\alpha \wedge \alpha' \to C)\big].$$

Но $T+\Gamma$ — наименьшая с такими свойствами. Значит, $(T+\Gamma) \subseteq S$.

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T + \Gamma \;=\; \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
$(\subseteq)$ Множество S содержит T и Γ. Множество S замкнуто по MP:
если $B \in S$, то есть $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T$,
и $(B \to C) \in S$, то есть $(A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to (B \to C)) \in T$,
то $C \in S$, ибо $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to C) \in T$ по тавтологии:

$$(\alpha \to B) \;\to\; \big[(\alpha' \to (B \to C)) \;\to\; (\alpha \wedge \alpha' \to C)\big].$$

Но $T + \Gamma$ — наименьшая с такими свойствами. Значит, $(T + \Gamma) \subseteq S$.

$(\supseteq)$ Всякая теория T', содержащая T и Γ, обязательно содержит и каждую формулу B, такую что $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T$, где $A_i \in \Gamma$.

Расширение теории множеством формул

$T + \Gamma$ есть наименьшая теория, содержащая T и все формулы из Γ.

Лемма 2.

$$T + \Gamma \;=\; \{B \mid (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T \text{ для некоторых } A_i \in \Gamma\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
$(\subseteq)$ Множество S содержит T и Γ. Множество S замкнуто по MP:
если $B \in S$, то есть $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T$,
и $(B \to C) \in S$, то есть $(A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to (B \to C)) \in T$,
то $C \in S$, ибо $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \ldots \wedge A'_m \to C) \in T$ по тавтологии:

$$(\alpha \to B) \;\to\; \big[(\alpha' \to (B \to C)) \;\to\; (\alpha \wedge \alpha' \to C)\big].$$

Но $T + \Gamma$ — наименьшая с такими свойствами. Значит, $(T + \Gamma) \subseteq S$.

$(\supseteq)$ Всякая теория T', содержащая T и Γ, обязательно содержит и каждую формулу B, такую что $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \in T$, где $A_i \in \Gamma$.
То есть $T' \supseteq S$. В том числе $(T + \Gamma) \supseteq S$. $\triangleleft$

Итерированные модальности в канонической модели

$x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$

Итерированные модальности в канонической модели

$x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$

Утверждение:

$x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \;\Leftarrow\; A \in y)$

Итерированные модальности в канонической модели

$x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$

Утверждение:

$x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \;\Leftarrow\; A \in y)$

$A \in y \Rightarrow \neg A \notin y \Rightarrow \Box\neg A \notin x \Rightarrow \neg\Box\neg A \in x$, то есть $\Diamond A \in x$.

Итерированные модальности в канонической модели

$x \, R_L \, y \ \ \leftrightharpoons \ \ $ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \ \ \Rightarrow \ \ A \in y)$

Утверждение:

$x \, R_L \, y \ \ \leftrightharpoons \ \ $ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \ \ \Leftarrow \ \ A \in y)$

Лемма

В канонической шкале F_L имеем (при любом $n \geqslant 0$):

$$x \, (R_L)^n \, y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех формул } A \ \ (\, \Box^n A \in x \ \ \Rightarrow \ \ A \in y \,)$$

Итерированные модальности в канонической модели

$x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$

Утверждение:

$x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \;\Leftarrow\; A \in y)$

Лемма

В канонической шкале F_L имеем (при любом $n \geqslant 0$):

$$x\,(R_L)^n\,y \;\Leftrightarrow\; \text{для всех формул } A\ \ (\,\Box^n A \in x \;\Rightarrow\; A \in y\,)$$
$$x\,(R_L)^n\,y \;\Leftrightarrow\; \text{для всех формул } A\ \ (\,\Diamond^n A \in x \;\Leftarrow\; A \in y\,)$$

Итерированные модальности в канонической модели

$x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$

Утверждение:

$x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \;\Leftarrow\; A \in y)$

Лемма

В канонической шкале F_L имеем (при любом $n \geqslant 0$):

$$x\,(R_L)^n\,y \quad\Leftrightarrow\quad \textit{для всех формул } A \;\; (\,\Box^n A \in x \;\Rightarrow\; A \in y\,)$$
$$x\,(R_L)^n\,y \quad\Leftrightarrow\quad \textit{для всех формул } A \;\; (\,\Diamond^n A \in x \;\Leftarrow\; A \in y\,)$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Если $x\,(R_L)^n\,y$, то начиная с $\Box^n A \in x$ и переходя по цепочке из n точек, мы снимаем по одному $\Box$.

Итерированные модальности в канонической модели

$x \, R_L \, y \;\; \leftrightharpoons \;\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\; \Rightarrow \;\; A \in y)$

Утверждение:

$x \, R_L \, y \;\; \leftrightharpoons \;\;$ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \;\; \Leftarrow \;\; A \in y)$

Лемма

В канонической шкале F_L имеем (при любом $n \geqslant 0$):

$$x \, (R_L)^n \, y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех формул } A \;\; (\, \Box^n A \in x \;\; \Rightarrow \;\; A \in y \,)$$
$$x \, (R_L)^n \, y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех формул } A \;\; (\, \Diamond^n A \in x \;\; \Leftarrow \;\; A \in y \,)$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Если $x \, (R_L)^n \, y$, то начиная с $\Box^n A \in x$ и переходя по цепочке из n точек, мы снимаем по одному $\Box$.

$(\Leftarrow)$ Индукция по n. **База индукции** при $n = 1$ по определению; при $n = 0$ — простое упражнение.

Итерированные модальности в канонической модели

$x\, R_L\, y \ \leftrightharpoons\ $ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow\ A \in y)$

Утверждение:

$x\, R_L\, y \ \leftrightharpoons\ $ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \ \Leftarrow\ A \in y)$

Лемма

В канонической шкале F_L имеем (при любом $n \geqslant 0$):

$$x\,(R_L)^n\, y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех формул } A \ \ (\ \Box^n A \in x \ \Rightarrow\ A \in y\ )$$
$$x\,(R_L)^n\, y \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех формул } A \ \ (\ \Diamond^n A \in x \ \Leftarrow\ A \in y\ )$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Если $x\,(R_L)^n\, y$, то начиная с $\Box^n A \in x$ и переходя по цепочке из n точек, мы снимаем по одному $\Box$.

$(\Leftarrow)$ Индукция по n. **База индукции** при $n = 1$ по определению; при $n = 0$ — простое упражнение.

Шаг индукции. Пусть $\forall A\ (\Box^{n+1} A \in x \Rightarrow A \in y)$. Почему $x\,(R_L)^{n+1}\, y$?

Итерированные модальности в канонической модели

$x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$

Утверждение:

$x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \;\Leftarrow\; A \in y)$

Лемма

В канонической шкале F_L имеем (при любом $n \geqslant 0$):

$$x\,(R_L)^n\,y \quad\Leftrightarrow\quad \text{для всех формул } A \;\; (\,\Box^n A \in x \;\;\Rightarrow\;\; A \in y\,)$$
$$x\,(R_L)^n\,y \quad\Leftrightarrow\quad \text{для всех формул } A \;\; (\,\Diamond^n A \in x \;\;\Leftarrow\;\; A \in y\,)$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Если $x\,(R_L)^n\,y$, то начиная с $\Box^n A \in x$ и переходя по цепочке из n точек, мы снимаем по одному $\Box$.

$(\Leftarrow)$ Индукция по n. **База индукции** при $n = 1$ по определению; при $n = 0$ — простое упражнение.

Шаг индукции. Пусть $\forall A\; (\Box^{n+1} A \in x \Rightarrow A \in y)$. Почему $x\,(R_L)^{n+1}\,y$?

То есть почему $\exists z$: $x\,(R_L)^n\,z\,R_L\,y$?

Итерированные модальности в канонической модели

$x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$

Утверждение:

$x\,R_L\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Diamond A \in x \;\Leftarrow\; A \in y)$

Лемма

В канонической шкале F_L имеем (при любом $n \geqslant 0$):

$$x\,(R_L)^n\,y \;\Leftrightarrow\; \text{для всех формул } A \;\left(\,\Box^n A \in x \;\Rightarrow\; A \in y\,\right)$$
$$x\,(R_L)^n\,y \;\Leftrightarrow\; \text{для всех формул } A \;\left(\,\Diamond^n A \in x \;\Leftarrow\; A \in y\,\right)$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Если $x\,(R_L)^n\,y$, то начиная с $\Box^n A \in x$ и переходя по цепочке из n точек, мы снимаем по одному $\Box$.

$(\Leftarrow)$ Индукция по n. **База индукции** при $n = 1$ по определению; при $n = 0$ — простое упражнение.

Шаг индукции. Пусть $\forall A\; (\Box^{n+1} A \in x \Rightarrow A \in y)$. Почему $x\,(R_L)^{n+1}\,y$? То есть почему $\exists z$: $x\,(R_L)^n\,z\,R_L\,y$? Указание: доказать, что $Z = L + \big(\{B \mid \Box^n B \in x\} \cup \{\Diamond C \mid C \in y\}\big)$ непротиворечиво.

План проверки каноничности формулы

План проверки каноничности какой-либо модальной формулы A:

План проверки каноничности формулы

План проверки каноничности какой-либо модальной формулы A:

1. Выяснить, какое свойство P шкал задает формула A.

План проверки каноничности формулы

План проверки каноничности какой-либо модальной формулы A:

1. Выяснить, какое свойство P шкал задает формула A.
2. Проверить это свойство P для канонической шкалы F_L (для всякой нормальной логики L, содержащей формулу A).

План проверки каноничности формулы

План проверки каноничности какой-либо модальной формулы A:

1. Выяснить, какое свойство P шкал задает формула A.
2. Проверить это свойство P для канонической шкалы F_L (для всякой нормальной логики L, содержащей формулу A).

Упражнение. Итерированные модальности и выводимость в логике:

План проверки каноничности формулы

План проверки каноничности какой-либо модальной формулы A:

1. Выяснить, какое свойство P шкал задает формула A.
2. Проверить это свойство P для канонической шкалы F_L (для всякой нормальной логики L, содержащей формулу A).

Упражнение. Итерированные модальности и выводимость в логике:

1) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Box A \to \Box B$.

План проверки каноничности формулы

План проверки каноничности какой-либо модальной формулы A:

1. Выяснить, какое свойство P шкал задает формула A.

2. Проверить это свойство P для канонической шкалы F_L (для всякой нормальной логики L, содержащей формулу A).

Упражнение. Итерированные модальности и выводимость в логике:

1) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Box A \to \Box B$.
2) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Diamond A \to \Diamond B$.

План проверки каноничности формулы

План проверки каноничности какой-либо модальной формулы A:

1. Выяснить, какое свойство P шкал задает формула A.

2. Проверить это свойство P для канонической шкалы F_L (для всякой нормальной логики L, содержащей формулу A).

Упражнение. Итерированные модальности и выводимость в логике:

1) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Box A \to \Box B$.
2) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Diamond A \to \Diamond B$.
3) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Box^n A \to \Box^n B$.

План проверки каноничности формулы

План проверки каноничности какой-либо модальной формулы A:

1. Выяснить, какое свойство P шкал задает формула A.

2. Проверить это свойство P для канонической шкалы F_L (для всякой нормальной логики L, содержащей формулу A).

Упражнение. Итерированные модальности и выводимость в логике:

1) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Box A \to \Box B$.
2) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Diamond A \to \Diamond B$.
3) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Box^n A \to \Box^n B$.
4) Если $L \vdash A \to B$, то $L \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n B$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$ *— каноническая; здесь* $i, j, m, n \geqslant 0$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$ *— каноническая; здесь* $i, j, m, n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть L содержит (i, j, m, n)-формулу.

Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$ — каноническая; здесь $i, j, m, n \geqslant 0$.

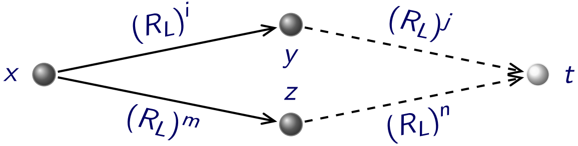
Доказательство. Пусть L содержит (i, j, m, n)-формулу.
Проверим, что шкала $F_L = (W_L, R_L)$ обладает (i, j, m, n)-свойством.

Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$ — *каноническая; здесь* $i, j, m, n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть L содержит (i, j, m, n)-формулу.
Проверим, что шкала $F_L = (W_L, R_L)$ обладает (i, j, m, n)-свойством.

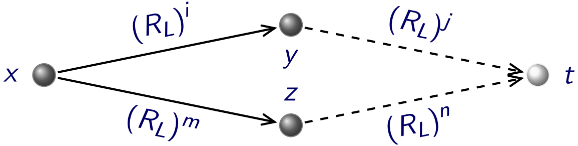


Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$ — каноническая; здесь $i, j, m, n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть L содержит (i, j, m, n)-формулу.
Проверим, что шкала $F_L = (W_L, R_L)$ обладает (i, j, m, n)-свойством.



Пусть $x\,(R_L)^i\,y$ и $x\,(R_L)^m\,z$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^m\Diamond^n p$ — каноническая; здесь $i, j, m, n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть L содержит (i, j, m, n)-формулу.
Проверим, что шкала $F_L = (W_L, R_L)$ обладает (i, j, m, n)-свойством.

$$\begin{array}{ccccc} & & y & & \\ & \overset{(R_L)^i}{\nearrow} & & \overset{(R_L)^j}{\searrow} & \\ x & & & & t \\ & \underset{(R_L)^m}{\searrow} & & \underset{(R_L)^n}{\nearrow} & \\ & & z & & \end{array}$$

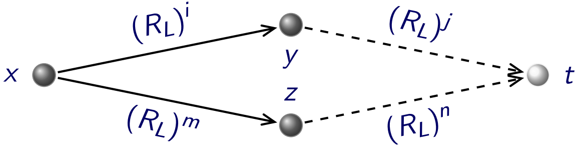
Пусть $x\,(R_L)^i\,y$ и $x\,(R_L)^m\,z$. Как построить ПНТ t?

Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$ — каноническая; здесь $i, j, m, n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть L содержит (i, j, m, n)-формулу.
Проверим, что шкала $F_L = (W_L, R_L)$ обладает (i, j, m, n)-свойством.



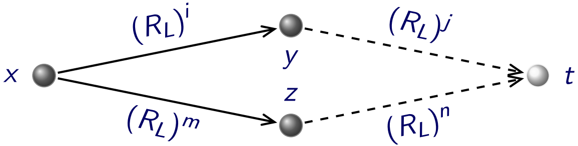
Пусть $x\,(R_L)^i\,y$ и $x\,(R_L)^m\,z$. Как построить ПНТ t?
Она должна содержать $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^m\Diamond^n p$ — каноническая; здесь $i, j, m, n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть L содержит (i, j, m, n)-формулу.
Проверим, что шкала $F_L = (W_L, R_L)$ обладает (i, j, m, n)-свойством.



Пусть $x\,(R_L)^i\,y$ и $x\,(R_L)^m\,z$. Как построить ПНТ t?
Она должна содержать $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

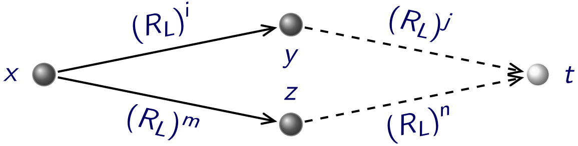
Утв. *Множества $\sharp^j y$ и $\sharp^n z$ — теории. Значит, замкнуты по $\&$.*

Каноничность (i, j, m, n)-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^m\Diamond^n p$ — каноническая; здесь $i, j, m, n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть L содержит (i, j, m, n)-формулу.
Проверим, что шкала $F_L = (W_L, R_L)$ обладает (i, j, m, n)-свойством.



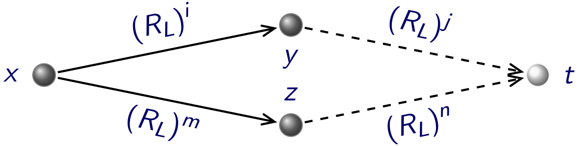
Пусть $x\,(R_L)^i\,y$ и $x\,(R_L)^m\,z$. Как построить ПНТ t?
Она должна содержать $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Множества $\sharp^j y$ и $\sharp^n z$ — теории. Значит, замкнуты по &.*

Рассмотрим теорию $T = L + (\sharp^j y \cup \sharp^n z)$.

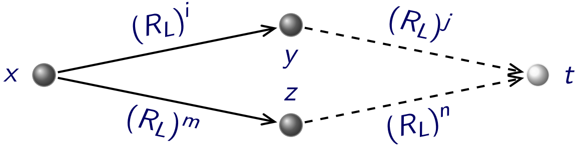
Продолжение следует...

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



Обозначили $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

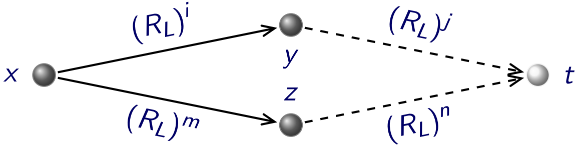
Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



Обозначили $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\sharp^j y \cup \sharp^n z)$ *непротиворечива.*

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)

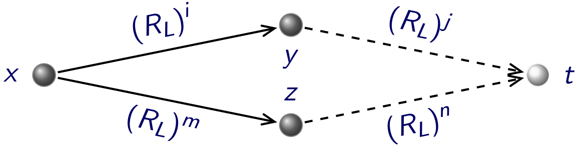


Обозначили $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\sharp^j y \cup \sharp^n z)$ *непротиворечива.*

Этого достаточно: тогда по Лемме Линденбаума $T \subseteq t$ для некоторого $t \in W_L$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)

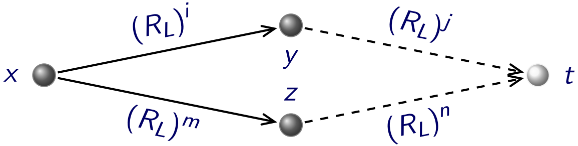


Обозначили $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\sharp^j y \cup \sharp^n z)$ *непротиворечива.*

Этого достаточно: тогда по Лемме Линденбаума $T \subseteq t$ для некоторого $t \in W_L$. Тогда очевидно $y\,(R_L)^j\,t$ и $z\,(R_L)^n\,t$, то есть t — искомый!

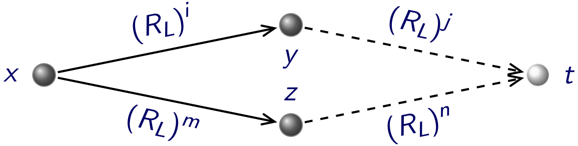
Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство.

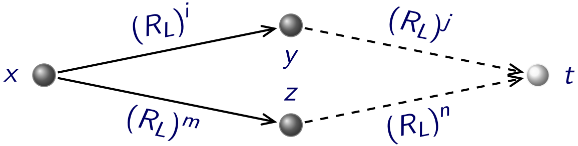


Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\sharp^j y \cup \sharp^n z)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)

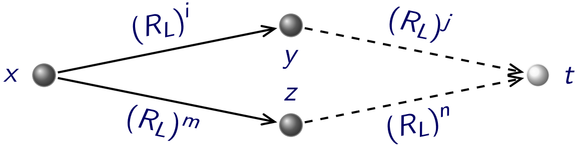


Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)

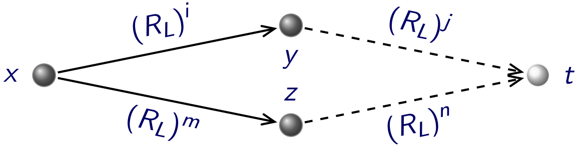


Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $\;B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $\;B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)

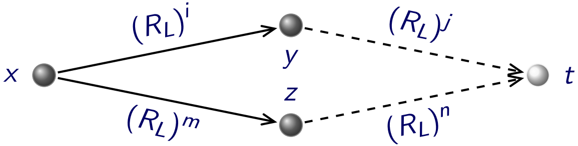
$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, dashed, "(R_L)^j"] & \\ x \arrow[ur, "(R_L)^i"] \arrow[dr, "(R_L)^m"'] & & t \\ & z \arrow[ur, dashed, "(R_L)^n"'] & \end{tikzcd}$$

Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.
$L \vdash A \to \neg B$,

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)

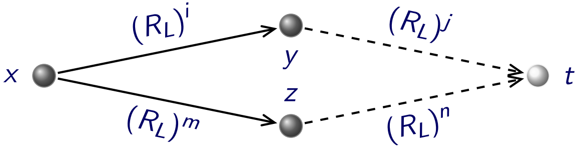


Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.
$L \vdash A \to \neg B$, $\quad L \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n \neg B$,

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)

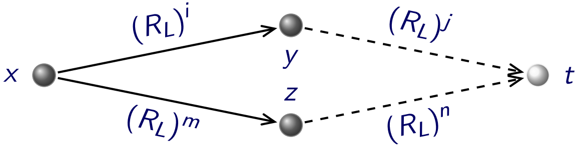


Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.
$L \vdash A \to \neg B$, $\quad L \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n \neg B$, $\quad L \vdash \neg(\Diamond^n A \wedge \Box^n B)$ $\qquad (*)$.

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



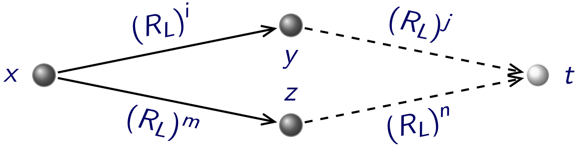
Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.
$L \vdash A \to \neg B, \quad L \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n \neg B, \quad L \vdash \neg(\Diamond^n A \wedge \Box^n B) \qquad (*).$

$\Box^j A \in y$

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

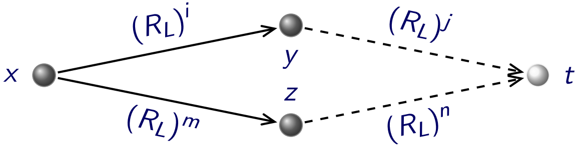
Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.

$$L \vdash A \to \neg B, \quad L \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n \neg B, \quad L \vdash \neg(\Diamond^n A \wedge \Box^n B) \qquad (*).$$

$$\Box^j A \in y \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \quad \Diamond^i \Box^j A \in x$$

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



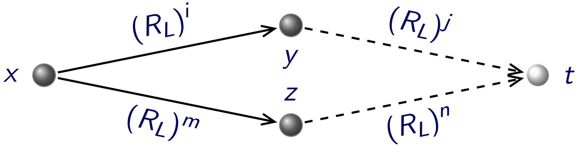
Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.
$L \vdash A \to \neg B, \quad L \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n \neg B, \quad L \vdash \neg(\Diamond^n A \wedge \Box^n B) \qquad (*)$.

$$\Box^j A \in y \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \Diamond^i \Box^j A \in x \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \Box^m \Diamond^n A \in x$$

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



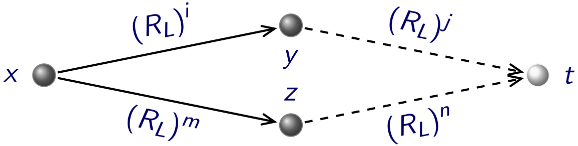
Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.
$L \vdash A \to \neg B, \quad L \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n \neg B, \quad L \vdash \neg(\Diamond^n A \wedge \Box^n B) \qquad (*)$.

$$\Box^j A \in y \overset{(1)}{\Longrightarrow} \Diamond^i \Box^j A \in x \overset{(2)}{\Longrightarrow} \Box^m \Diamond^n A \in x \overset{(3)}{\Longrightarrow} \Diamond^n A \in z.$$

Каноничность (i, j, m, n)-формул (окончание)



Обозначим $\sharp^j y := \{B \mid \Box^j B \in y\}$ и $\sharp^n z := \{C \mid \Box^n C \in z\}$.

Утв. *Теория* $T = L + (\,\sharp^j y \cup \sharp^n z\,)$ *непротиворечива.*

Доказательство. Допустим $\bot \in T$.
Тогда $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell) \to \bot) \in L$, где $A_a \in \sharp^j y$ и $B_b \in \sharp^n z$.
Обозначим формулы $A := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_k)$, $B := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_\ell)$.
Тогда $L \vdash (A \wedge B) \to \bot$, где $A \in \sharp^j y$ и $B \in \sharp^n z$ по замкнутости отн. $\&$.
Заметим: $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$.

$$L \vdash A \to \neg B, \quad L \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n \neg B, \quad L \vdash \neg(\Diamond^n A \wedge \Box^n B) \qquad (*).$$

$$\Box^j A \in y \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \Diamond^i \Box^j A \in x \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \Box^m \Diamond^n A \in x \quad \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad \Diamond^n A \in z.$$

Получили: $(\Diamond^n A \wedge \Box^n B) \in z$, а это противоречит $(*)$, ведь $L \subseteq z$. $\triangleleft$

Семейство полных логик

Пусть $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ — произвольное подмножество.

Семейство полных логик

Пусть $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ — произвольное подмножество.
Обозначим

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{ \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \mid (i, j, m, n) \in \sigma \}.$$

Семейство полных логик

Пусть $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ — произвольное подмножество. Обозначим

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{ \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \mid (i, j, m, n) \in \sigma \}.$$

Теорема

Каждая из логик $\mathbf{K}_\sigma$ — каноническая

Семейство полных логик

Пусть $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ — произвольное подмножество. Обозначим

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{\, \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \mid (i, j, m, n) \in \sigma \,\}.$$

Теорема

Каждая из логик $\mathbf{K}_\sigma$ — каноническая, а значит, полная.

Семейство полных логик

Пусть $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ — произвольное подмножество. Обозначим

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{\, \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \mid (i, j, m, n) \in \sigma \,\}.$$

Теорема

Каждая из логик $\mathbf{K}_\sigma$ — каноническая, а значит, полная.

Следствие.

Каждая из 15 «традиционных» модальных логик каноническая, а значит, полная.

Семейство полных логик

Пусть $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ — произвольное подмножество. Обозначим

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{ \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \mid (i, j, m, n) \in \sigma \}.$$

Теорема

Каждая из логик $\mathbf{K}_\sigma$ — каноническая, а значит, полная.

Следствие.

Каждая из 15 «традиционных» модальных логик каноническая, а значит, полная. В частности:

$$\mathrm{K4} \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех транзитивных шкалах.}$$

Семейство полных логик

Пусть $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ — произвольное подмножество. Обозначим

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{\, \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \mid (i, j, m, n) \in \sigma \,\}.$$

Теорема

Каждая из логик $\mathbf{K}_\sigma$ — каноническая, а значит, полная.

Следствие.

Каждая из 15 «традиционных» модальных логик каноническая, а значит, полная. В частности:

$$\mathsf{K4} \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех транзитивных шкалах.}$$
$$\mathsf{S4} \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех рефл. транз. шкалах.}$$

Семейство полных логик

Пусть $\sigma \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ — произвольное подмножество. Обозначим

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{\, \Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p \mid (i, j, m, n) \in \sigma \,\}.$$

Теорема

Каждая из логик $\mathbf{K}_\sigma$ — каноническая, а значит, полная.

Следствие.

Каждая из 15 «традиционных» модальных логик каноническая, а значит, полная. В частности:

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{K4} \vdash A & \iff & A \text{ общезначима на всех транзитивных шкалах.} \\
\mathrm{S4} \vdash A & \iff & A \text{ общезначима на всех рефл. транз. шкалах.} \\
\mathrm{S5} \vdash A & \iff & A \text{ общезначима на всех шкалах с отн. экв-ти.}
\end{array}$$

Полимодальные логики

Вместо одного $\Box$ будут модальности $\Box_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ (можно: $i \in \Sigma$).

Полимодальные логики

Вместо одного $\Box$ будут модальности $\Box_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ (можно: $i \in \Sigma$).
Вместо шкалы $F = (W, R)$ – шкала $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, $R_i \subseteq W \times W$.

Полимодальные логики

Вместо одного $\Box$ будут модальности $\Box_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ (можно: $i \in \Sigma$).
Вместо шкалы $F = (W, R)$ – шкала $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, $R_i \subseteq W \times W$.

Исчисление $\mathbf{K}_n$: аксиомы $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$, правила $\dfrac{A}{\Box_i A}$.

Полимодальные логики

Вместо одного $\Box$ будут модальности $\Box_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ (можно: $i \in \Sigma$).
Вместо шкалы $F = (W, R)$ – шкала $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, $R_i \subseteq W \times W$.

Исчисление $\mathbf{K}_n$: аксиомы $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$, правила $\dfrac{A}{\Box_i A}$.

Канонической моделью будет $M_L = (W_L, (R_L)_1, \ldots, (R_L)_n, V_L)$, где

$$x\,(R_L)_i\,y \;\leftrightharpoons\; \text{для всех формул } A \in \mathrm{Fm} \text{ имеем: } (\Box_i A \in x \;\Rightarrow\; A \in y).$$

Полимодальные логики

Вместо одного $\Box$ будут модальности $\Box_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ (можно: $i \in \Sigma$).
Вместо шкалы $F = (W, R)$ – шкала $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, $R_i \subseteq W \times W$.
Исчисление $\mathbf{K}_n$: аксиомы $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$, правила $\dfrac{A}{\Box_i A}$.
Канонической моделью будет $M_L = (W_L, (R_L)_1, \ldots, (R_L)_n, V_L)$, где

$$x\,(R_L)_i\,y \ \leftrightharpoons\ \text{для всех формул } A \in \mathrm{Fm} \text{ имеем: } (\Box_i A \in x \ \Rightarrow\ A \in y).$$

Обозначим $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ (мог быть любым алфавитом).
Для всякого слова $\alpha = a_1 \ldots a_\ell$ длины ℓ в алфавите Σ вводим итерированную модальность

$$\Box_\alpha = \Box_{a_1} \ldots \Box_{a_\ell},$$

Полимодальные логики

Вместо одного $\Box$ будут модальности $\Box_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ (можно: $i \in \Sigma$).
Вместо шкалы $F = (W, R)$ – шкала $F = (W, R_1, \dots, R_n)$, $R_i \subseteq W \times W$.

Исчисление $\mathbf{K}_n$: аксиомы $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$, правила $\dfrac{A}{\Box_i A}$.

Каноническoй моделью будет $M_L = (W_L, (R_L)_1, \dots, (R_L)_n, V_L)$, где

$$x\,(R_L)_i\,y \;\leftrightharpoons\; \text{для всех формул } A \in \mathrm{Fm} \text{ имеем: } (\Box_i A \in x \;\Rightarrow\; A \in y).$$

Обозначим $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ (мог быть любым алфавитом).
Для всякого слова $\alpha = a_1 \dots a_\ell$ длины ℓ в алфавите Σ вводим итерированную модальность

$$\Box_\alpha = \Box_{a_1} \dots \Box_{a_\ell}, \quad \text{аналогично } \Diamond_\alpha.$$

Полимодальные логики

Вместо одного $\Box$ будут модальности $\Box_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ (можно: $i \in \Sigma$).
Вместо шкалы $F = (W, R)$ – шкала $F = (W, R_1, \ldots, R_n)$, $R_i \subseteq W \times W$.

Исчисление $\mathbf{K}_n$: аксиомы $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$, правила $\dfrac{A}{\Box_i A}$.

Канонической моделью будет $M_L = (W_L, (R_L)_1, \ldots, (R_L)_n, V_L)$, где

$$x\,(R_L)_i\,y \;\leftrightharpoons\; \text{для всех формул } A \in \mathrm{Fm} \text{ имеем: } (\Box_i A \in x \;\Rightarrow\; A \in y).$$

Обозначим $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ (мог быть любым алфавитом).
Для всякого слова $\alpha = a_1 \ldots a_\ell$ длины ℓ в алфавите Σ вводим итерированную модальность

$$\Box_\alpha = \Box_{a_1} \ldots \Box_{a_\ell}, \quad \text{аналогично } \Diamond_\alpha.$$

Композиция отношений: $R_\alpha = R_{a_1} \circ \ldots R_{a_\ell}$.

Полимодальный аналог (i, j, m, n)-формул

Лемма

$F \models \Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p \quad \Longleftrightarrow$

Полимодальный аналог (i, j, m, n)-формул

Лемма

$F \models \Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p \quad \Longleftrightarrow \quad R_i$ *обладают* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$*-свойством:*

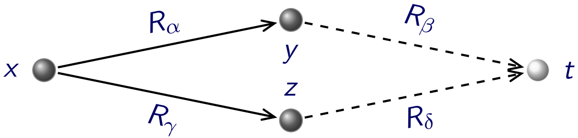
$$\forall x, y, z \left(x \, R_\alpha \, y \;\; \& \;\; x \, R_\gamma \, z \;\; \Rightarrow \;\; \exists t \, (y \, R_\beta \, t \;\; \& \;\; z \, R_\delta \, t) \right)$$

Полимодальный аналог (i, j, m, n)-формул

Лемма

$F \models \Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p \iff R_i$ *обладают* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-*свойством:*

$$\forall x, y, z \left(x\, R_\alpha\, y \ \ \& \ \ x\, R_\gamma\, z \ \Rightarrow \ \exists t\, (y\, R_\beta\, t \ \ \& \ \ z\, R_\delta\, t) \right)$$



Каноничность $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-формул

Каноничность $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p$ *— каноническая.*

Каноничность $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p$ — каноническая.

Σ^* — это множество всех слов в алфавите Σ (включая пустое слово).

Каноничность $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p$ *— каноническая.*

Σ^* — это множество всех слов в алфавите Σ (включая пустое слово).
Пусть $\sigma \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*)$ — некот. множество четверок слов.

Каноничность $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p$ — каноническая.

Σ^* — это множество всех слов в алфавите Σ (включая пустое слово).
Пусть $\sigma \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*)$ — некот. множество четверок слов.
Рассмотрим логику

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{\, \Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p \;\mid\; (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \sigma \,\}.$$

Каноничность $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p$ *— каноническая.*

Σ^* — это множество всех слов в алфавите Σ (включая пустое слово).
Пусть $\sigma \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*)$ — некот. множество четверок слов.
Рассмотрим логику

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{\, \Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p \;\mid\; (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \sigma \,\}.$$

Теорема

Каждая из логик $\mathbf{K}_\sigma$ *— каноническая, а значит, полная.*

Каноничность $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$-формул

Теорема

Каждая формула $\Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p$ — каноническая.

Σ^* — это множество всех слов в алфавите Σ (включая пустое слово).
Пусть $\sigma \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*)$ — некот. множество четверок слов.
Рассмотрим логику

$$\mathbf{K}_\sigma := \mathbf{K} \oplus \{ \Diamond_\alpha \Box_\beta p \to \Box_\gamma \Diamond_\delta p \mid (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \sigma \}.$$

Теорема

Каждая из логик $\mathbf{K}_\sigma$ — каноническая, а значит, полная.

Вопрос. Сколько здесь логик — счетное количество или континуум?

Временные логики (tense logics)

Модальная формула, выражающая симметричность отношения:

Факт 1. Пусть $F = (W, R)$. Тогда: $F \models p \to \Box\Diamond p \iff R^{-1} \subseteq R$.

Временные логики (tense logics)

Модальная формула, выражающая симметричность отношения:

Факт 1. Пусть $F = (W, R)$. Тогда: $F \models p \to \Box\Diamond p \iff R^{-1} \subseteq R$.

Факт 2. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда: $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R^{-1} \subseteq S$.

Временные логики (tense logics)

Модальная формула, выражающая симметричность отношения:

Факт 1. Пусть $F = (W, R)$. Тогда: $F \models p \to \Box\Diamond p \iff R^{-1} \subseteq R$.

Факт 2. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда: $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R^{-1} \subseteq S$.

Факт 3. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда:

$$F \models (p \to \Box_1\Diamond_2 p) \ \wedge\ (p \to \Box_2\Diamond_1 p) \quad \iff \quad R^{-1} = S.$$

Модальная формула, выражающая симметричность отношения:

Факт 1. Пусть $F = (W, R)$. Тогда: $F \models p \to \Box\Diamond p \iff R^{-1} \subseteq R$.

Факт 2. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда: $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R^{-1} \subseteq S$.

Факт 3. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда:

$$F \models (p \to \Box_1\Diamond_2 p) \;\wedge\; (p \to \Box_2\Diamond_1 p) \quad \iff \quad R^{-1} = S.$$

Факт 4. Формулы $p \to \Box_1\Diamond_2 p$ и $p \to \Box_2\Diamond_1 p$ — канонические.

Временные логики (tense logics)

Модальная формула, выражающая симметричность отношения:

Факт 1. Пусть $F = (W, R)$. Тогда: $F \models p \to \Box\Diamond p \iff R^{-1} \subseteq R$.

Факт 2. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда: $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R^{-1} \subseteq S$.

Факт 3. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда:

$$F \models (p \to \Box_1\Diamond_2 p) \ \wedge \ (p \to \Box_2\Diamond_1 p) \quad \iff \quad R^{-1} = S.$$

Факт 4. Формулы $p \to \Box_1\Diamond_2 p$ и $p \to \Box_2\Diamond_1 p$ — канонические.

Временной напарник одномодальной логики $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$:

$$L.t \ = K_2 \oplus \ \Gamma \ \oplus \ p \to \Box\diamondminus p \ \oplus \ p \to \boxminus\Diamond p.$$

Временные логики (tense logics)

Модальная формула, выражающая симметричность отношения:
Факт 1. Пусть $F = (W, R)$. Тогда: $F \models p \to \Box\Diamond p \iff R^{-1} \subseteq R$.
Факт 2. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда: $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R^{-1} \subseteq S$.
Факт 3. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда:

$$F \models (p \to \Box_1\Diamond_2 p) \ \wedge \ (p \to \Box_2\Diamond_1 p) \quad \iff \quad R^{-1} = S.$$

Факт 4. Формулы $p \to \Box_1\Diamond_2 p$ и $p \to \Box_2\Diamond_1 p$ — канонические.

Временной напарник одномодальной логики $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$:

$$L.t \ = K_2 \oplus \ \Gamma \ \oplus \ p \to \Box\diamondminus p \ \oplus \ p \to \boxminus\Diamond p.$$

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ и все формулы из $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$ канонические.

Временные логики (tense logics)

Модальная формула, выражающая симметричность отношения:
Факт 1. Пусть $F = (W, R)$. Тогда: $F \models p \to \Box\Diamond p \iff R^{-1} \subseteq R$.
Факт 2. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда: $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R^{-1} \subseteq S$.
Факт 3. Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда:

$$F \models (p \to \Box_1\Diamond_2 p) \ \wedge \ (p \to \Box_2\Diamond_1 p) \quad \iff \quad R^{-1} = S.$$

Факт 4. Формулы $p \to \Box_1\Diamond_2 p$ и $p \to \Box_2\Diamond_1 p$ — канонические.

Временной напарник одномодальной логики $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$:

$$L.t \ = K_2 \oplus \ \Gamma \ \oplus \ p \to \Box\diamondminus p \ \oplus \ p \to \boxminus\Diamond p.$$

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ *и все формулы из* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$ *канонические.*
Тогда ее временной напарник $L.t$ *— каноническая (и полная) логика.*

Логика с модальностью симметричного замыкания

Симметричное замыкание отношения $R \subseteq (W \times W)$ — это наименьшее симметричное отношение S, содержащее R.

Логика с модальностью симметричного замыкания

Симметричное замыкание отношения $R \subseteq (W \times W)$ — это наименьшее симметричное отношение S, содержащее R.

Факт 1. Симметричное замыкание есть $S = R^{\mathrm{sym}} = R \cup R^{-1}$.

Логика с модальностью симметричного замыкания

Симметричное замыкание отношения $R \subseteq (W \times W)$ — это наименьшее симметричное отношение S, содержащее R.

Факт 1. Симметричное замыкание есть $S = R^{\mathrm{sym}} = R \cup R^{-1}$.

Можно ли модальными формулами задать класс шкал

$$\{F = (W, R, S) \mid S = R^{\mathrm{sym}}\}?$$

Симметричное замыкание отношения $R \subseteq (W \times W)$ — это наименьшее симметричное отношение S, содержащее R.

Факт 1. Симметричное замыкание есть $S = R^{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$.

Можно ли модальными формулами задать класс шкал

$$\{F = (W, R, S) \mid S = R^{\text{sym}}\}?$$

Факт 2. Этот класс шкал задаётся следующими аксиомами (Lloyd Humberstone, $\leqslant 2020$):

$$(A1) \quad \boxdot p \to \Box p \qquad\qquad R \subseteq S$$

Симметричное замыкание отношения $R \subseteq (W \times W)$ — это наименьшее симметричное отношение S, содержащее R.

Факт 1. Симметричное замыкание есть $S = R^{\mathrm{sym}} = R \cup R^{-1}$.

Можно ли модальными формулами задать класс шкал

$$\{F = (W, R, S) \mid S = R^{\mathrm{sym}}\}?$$

Факт 2. Этот класс шкал задаётся следующими аксиомами (Lloyd Humberstone, $\leqslant 2020$):

$$\begin{array}{lll} (A1) & \boxdot p \to \Box p & R \subseteq S \\ (A2) & p \to \Box \Diamond\!\!\!\cdot\, p & R^{-1} \subseteq S \end{array}$$

Логика с модальностью симметричного замыкания

Симметричное замыкание отношения $R \subseteq (W \times W)$ — это наименьшее симметричное отношение S, содержащее R.

Факт 1. Симметричное замыкание есть $S = R^{\mathrm{sym}} = R \cup R^{-1}$.

Можно ли модальными формулами задать класс шкал

$$\{F = (W, R, S) \mid S = R^{\mathrm{sym}}\}?$$

Факт 2. Этот класс шкал задаётся следующими аксиомами (Lloyd Humberstone, $\leqslant 2020$):

$$\begin{array}{lll} (A1) & \boxdot p \to \Box p & R \subseteq S \\ (A2) & p \to \Box \Diamonddot p & R^{-1} \subseteq S \\ (A3) & p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p) & (R \cup R^{-1}) \supseteq S \end{array}$$

Логика с модальностью симметричного замыкания

Симметричное замыкание отношения $R \subseteq (W \times W)$ — это наименьшее симметричное отношение S, содержащее R.

Факт 1. Симметричное замыкание есть $S = R^{\mathrm{sym}} = R \cup R^{-1}$.

Можно ли модальными формулами задать класс шкал

$$\{F = (W, R, S) \mid S = R^{\mathrm{sym}}\}?$$

Факт 2. Этот класс шкал задаётся следующими аксиомами (Lloyd Humberstone, $\leqslant 2020$):

$$\begin{array}{lll}
(A1) & \boxdot p \to \Box p & R \subseteq S \\
(A2) & p \to \Box \diamonddot p & R^{-1} \subseteq S \\
(A3) & p \wedge \Box q \ \to \ \boxdot(q \vee \Diamond p) & (R \cup R^{-1}) \supseteq S
\end{array}$$

Упражнение. Выведите из них симметричность S, то есть $p \to \boxdot \diamonddot p$.

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \ \rightarrow \ \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \Longleftrightarrow \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \Longleftrightarrow \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \Longleftrightarrow \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$.

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad\Longleftrightarrow\quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$. Проверим: $x \models \boxdot(q \vee \Diamond p)$.

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \Longleftrightarrow \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$. Проверим: $x \models \boxdot(q \vee \Diamond p)$.
Для этого берем любую точку y, такую что xSy. Возможны 2 случая:

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда

$$F \models p \wedge \Box q \ \to \ \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \Longleftrightarrow \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$. Проверим: $x \models \boxdot(q \vee \Diamond p)$.
Для этого берем любую точку y, такую что xSy. Возможны 2 случая:
1) xRy. Тогда $y \models q$.

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \ \rightarrow \ \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \Longleftrightarrow \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$. Проверим: $x \models \boxdot(q \vee \Diamond p)$.
Для этого берем любую точку y, такую что xSy. Возможны 2 случая:
1) xRy. Тогда $y \models q$.
2) yRx. Тогда $y \models \Diamond p$.

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad\Longleftrightarrow\quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$. Проверим: $x \models \boxdot(q \vee \Diamond p)$.
Для этого берем любую точку y, такую что xSy. Возможны 2 случая:
1) xRy. Тогда $y \models q$.
2) yRx. Тогда $y \models \Diamond p$.

($\Rightarrow$) Допустим $(R \cup R^{-1}) \not\supseteq S$.
Значит, $\exists x, y$ такие, что $x\,S\,y$, но $\neg(x\,R\,y)$ и $\neg(y\,R\,x)$.

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \ \to\ \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \Longleftrightarrow \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$. Проверим: $x \models \boxdot(q \vee \Diamond p)$.
Для этого берем любую точку y, такую что xSy. Возможны 2 случая:
1) xRy. Тогда $y \models q$.
2) yRx. Тогда $y \models \Diamond p$.

($\Rightarrow$) Допустим $(R \cup R^{-1}) \not\supseteq S$.
Значит, $\exists x, y$ такие, что $x\,S\,y$, но $\neg(x\,R\,y)$ и $\neg(y\,R\,x)$.
Угадаем оценку: $V(p) = \{x\}$ и $V(q) = R(x)$.

Модальная определимость шкал с симм. замыканием

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \ \to\ \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \Longleftrightarrow \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$. Проверим: $x \models \boxdot(q \vee \Diamond p)$.
Для этого берем любую точку y, такую что xSy. Возможны 2 случая:
1) xRy. Тогда $y \models q$.
2) yRx. Тогда $y \models \Diamond p$.

($\Rightarrow$) Допустим $(R \cup R^{-1}) \not\supseteq S$.
Значит, $\exists x, y$ такие, что $x\,S\,y$, но $\neg(x\,R\,y)$ и $\neg(y\,R\,x)$.
Угадаем оценку: $V(p) = \{x\}$ и $V(q) = R(x)$.
Очевидно $x \models p$ и $x \models \Box q$.

Лемма

Пусть $F = (W, R, S)$. *Тогда*

$$F \models p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p) \quad \iff \quad (R \cup R^{-1}) \supseteq S.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Берем любую модель $M = (W, R, S, V)$, в которой $(R \cup R^{-1}) \supseteq S$.
Допустим $x \models p$ и $x \models \Box q$. Проверим: $x \models \boxdot(q \vee \Diamond p)$.
Для этого берем любую точку y, такую что xSy. Возможны 2 случая:
1) xRy. Тогда $y \models q$.
2) yRx. Тогда $y \models \Diamond p$.

($\Rightarrow$) Допустим $(R \cup R^{-1}) \not\supseteq S$.
Значит, $\exists x, y$ такие, что $x\,S\,y$, но $\neg(x\,R\,y)$ и $\neg(y\,R\,x)$.
Угадаем оценку: $V(p) = \{x\}$ и $V(q) = R(x)$.
Очевидно $x \models p$ и $x \models \Box q$.
Однако $x \not\models \boxdot(q \vee \Diamond p)$, ибо xSy, но $y \not\models q$ и $y \not\models \Diamond p$. $\triangleleft$

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box \diamonddot p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box \Diamond\!\!\!\cdot\; p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула (A3) $p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box \Diamond\!\!\!\cdot\; p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\;p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ — *каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box\Diamond\!\!\!\!\cdot\; p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\;p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box\Diamond p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\quad p \wedge \Box q \quad \to \quad \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box\text{◈} p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\;p \wedge \Box q \;\;\to\;\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \;\supseteq S_L$.

$\boxcircle p \to \Box p$ и $p \to \Box \circledDiamond p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула (A3) $p \wedge \Box q \;\to\; \boxcircle(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \;\supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$.

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box \Diamonddot p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$. Имеем:

(1) $\forall B\ (\ \boxdot B \in x \;\Rightarrow\; B \in y\ )$ $\qquad (x\, S_L\, y)$

(2) $\exists C\ (\ \Box C \in x$ и $C \notin y\ )$ $\qquad \neg(x\, R_L\, y)$

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box\Diamond\!\!\!\diamond\, p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\;p \wedge \Box q \;\;\to\;\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ — *каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \;\supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$. Имеем:

(1) $\forall B\; (\;\boxdot B \in x \;\;\Rightarrow\;\; B \in y\;)$ $\qquad (x\, S_L\, y)$

(2) $\exists C\; (\;\Box C \in x$ и $C \notin y\;)$ $\qquad \neg(x\, R_L\, y)$

Чтобы доказать $y\, R_L\, x$, возьмем $\Box D \in y$, надо: $D \in x$.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box \Diamond\!\!\!\!\diamond p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула (A3) $p \wedge \Box q \;\; \to \;\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \;\supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$. Имеем:

(1) $\forall B \; (\; \boxdot B \in x \;\; \Rightarrow \;\; B \in y \;)$ $\qquad (x\, S_L\, y)$

(2) $\exists C \; (\; \Box C \in x$ и $C \notin y \;)$ $\qquad \neg(x\, R_L\, y)$

Чтобы доказать $y\, R_L\, x$, возьмем $\Box D \in y$, надо: $D \in x$. Доп. $\neg D \in x$.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box \Diamond\!\!\!\!\cdot\, p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\;p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \;\supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$. Имеем:

(1) $\forall B$ ($\boxdot B \in x \;\Rightarrow\; B \in y$) $\qquad (x\, S_L\, y)$

(2) $\exists C$ ($\Box C \in x$ и $C \notin y$) $\qquad \neg(x\, R_L\, y)$

Чтобы доказать $y\, R_L\, x$, возьмем $\Box D \in y$, надо: $D \in x$. Доп. $\neg D \in x$. Тогда формула $(\neg D \wedge \Box C)$ лежит в x. Но в L есть формула:

$$(\neg D \wedge \Box C) \;\to \boxdot(C \vee \neg\Box D).$$

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box\Diamond p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\ p \wedge \Box q \ \to \ \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \ \supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$. Имеем:

(1) $\forall B$ ($\boxdot B \in x \ \Rightarrow \ B \in y$) $\qquad (x\, S_L\, y)$

(2) $\exists C$ ($\Box C \in x$ и $C \notin y$) $\qquad \neg(x\, R_L\, y)$

Чтобы доказать $y\, R_L\, x$, возьмем $\Box D \in y$, надо: $D \in x$. Доп. $\neg D \in x$. Тогда формула $(\neg D \wedge \Box C)$ лежит в x. Но в L есть формула:

$$(\neg D \wedge \Box C) \ \to \boxdot(C \vee \neg\Box D).$$

Значит, формула $\boxdot(C \vee \neg\Box D)$ есть в x.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box \Diamond\!\!\!\!\Diamond p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула (A3) $p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \;\supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$. Имеем:

(1) $\forall B$ ($\boxdot B \in x \;\Rightarrow\; B \in y$) $\qquad (x\, S_L\, y)$

(2) $\exists C$ ($\Box C \in x$ и $C \notin y$) $\qquad \neg(x\, R_L\, y)$

Чтобы доказать $y\, R_L\, x$, возьмем $\Box D \in y$, надо: $D \in x$. Доп. $\neg D \in x$. Тогда формула $(\neg D \wedge \Box C)$ лежит в x. Но в L есть формула:

$$(\neg D \wedge \Box C) \;\to \boxdot(C \vee \neg \Box D).$$

Значит, формула $\boxdot(C \vee \neg\Box D)$ есть в x. Тогда $C \vee \neg\Box D$ есть в y.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box \Diamond\!\!\!\!\diamond\, p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\;p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \;\supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$. Имеем:

(1) $\forall B\; (\; \boxdot B \in x \;\Rightarrow\; B \in y \;)$ $\qquad (x\, S_L\, y)$

(2) $\exists C\; (\; \Box C \in x$ $\;$ и $\;$ $C \notin y \;)$ $\qquad \neg(x\, R_L\, y)$

Чтобы доказать $y\, R_L\, x$, возьмем $\Box D \in y$, надо: $D \in x$. Доп. $\neg D \in x$. Тогда формула $(\neg D \wedge \Box C)$ лежит в x. Но в L есть формула:

$$(\neg D \wedge \Box C) \;\to \boxdot(C \vee \neg\Box D).$$

Значит, формула $\boxdot(C \vee \neg\Box D)$ есть в x. Тогда $C \vee \neg\Box D$ есть в y. Но $C \notin y$.

Каноничность аксиом Хамберстоуна

$\boxdot p \to \Box p$ и $p \to \Box\Diamond p$ — канонические: ибо это (i, j, m, n)-формулы.

Лемма

Формула $(A3)$ $\;p \wedge \Box q \;\;\to\;\; \boxdot(q \vee \Diamond p)$ *— каноническая.*

Доказательство. Берем любую (бимодальную) логику L, содержащую эту формулу. Ее каноническая шкала $F_L = (W_L, R_L, S_L)$. Надо: $F_L \models (A3)$. Это равносильно: $(R_L \cup R_L^{-1}) \;\supseteq S_L$.

Пусть $x, y \in W_L$, $x\, S_L\, y$, но $\neg(x\, R_L\, y)$. Докажем, что $y\, R_L\, x$. Имеем:

(1) $\forall B\ (\ \boxdot B \in x \;\;\Rightarrow\;\; B \in y\ )$ $\qquad (x\, S_L\, y)$

(2) $\exists C\ (\ \Box C \in x$ и $C \notin y\ )$ $\qquad \neg(x\, R_L\, y)$

Чтобы доказать $y\, R_L\, x$, возьмем $\Box D \in y$, надо: $D \in x$. Доп. $\neg D \in x$. Тогда формула $(\neg D \wedge \Box C)$ лежит в x. Но в L есть формула:

$$(\neg D \wedge \Box C) \;\to \boxdot(C \vee \neg\Box D).$$

Значит, формула $\boxdot(C \vee \neg\Box D)$ есть в x. Тогда $C \vee \neg\Box D$ есть в y. Но $C \notin y$. Значит, $\neg\Box D \in y$. Противоречие.

Дальнейшие вопросы

- (просто) Логика рефл. замыкания: $S = R \cup \{(x, x) \mid x \in W\}$.

Дальнейшие вопросы

- (просто) Логика рефл. замыкания: $S = R \cup \{(x, x) \mid x \in W\}$.
- (задача) Логика рефлексивного симметричного замыкания.

Дальнейшие вопросы

- (просто) Логика рефл. замыкания: $S = R \cup \{(x, x) \mid x \in W\}$.
- (задача) Логика рефлексивного симметричного замыкания.
- Логика **S5**-замыкания: $S = (R \cup R^{-1})^*$.

Дальнейшие вопросы

- (просто) Логика рефл. замыкания: $S = R \cup \{(x, x) \mid x \in W\}$.
- (задача) Логика рефлексивного симметричного замыкания.
- Логика **S5**-замыкания: $S = (R \cup R^{-1})^*$.

  Ясно, что класс шкал вида $F = (W, R, Q, T, S)$, в которых $Q = R^{-1}$, $T = R \cup Q$, $S = T^*$, задается некоторым конечным множеством модальных $(\Box_1, \Box_2, \Box_3, \Box_4)$-формул.

Дальнейшие вопросы

- (просто) Логика рефл. замыкания: $S = R \cup \{(x, x) \mid x \in W\}$.
- (задача) Логика рефлексивного симметричного замыкания.
- Логика **S5**-замыкания: $S = (R \cup R^{-1})^*$.

  Ясно, что класс шкал вида $F = (W, R, Q, T, S)$, в которых $Q = R^{-1}$, $T = R \cup Q$, $S = T^*$, задается некоторым конечным множеством модальных $(\Box_1, \Box_2, \Box_3, \Box_4)$-формул.

  Но что будет, если Q и T выбросить из шкал?
  То есть взять класс шкал вида $F = (W, R, S)$, где $S = (R \cup R^{-1})^*$.
  Задается ли он какими-то модальными $(\Box_1, \Box_4)$-формулами?

Дальнейшие вопросы

- (просто) Логика рефл. замыкания: $S = R \cup \{(x,x) \mid x \in W\}$.
- (задача) Логика рефлексивного симметричного замыкания.
- Логика **S5**-замыкания: $S = (R \cup R^{-1})^*$.

  Ясно, что класс шкал вида $F = (W, R, Q, T, S)$, в которых $Q = R^{-1}$, $T = R \cup Q$, $S = T^*$, задается некоторым конечным множеством модальных $(\Box_1, \Box_2, \Box_3, \Box_4)$-формул.

  Но что будет, если Q и T выбросить из шкал?
  То есть взять класс шкал вида $F = (W, R, S)$, где $S = (R \cup R^{-1})^*$.
  Задается ли он какими-то модальными $(\Box_1, \Box_4)$-формулами?
- Логика евклидова замыкания? (наим. евкл. отн. содерж. R)

Дальнейшие вопросы

- (просто) Логика рефл. замыкания: $S = R \cup \{(x, x) \mid x \in W\}$.
- (задача) Логика рефлексивного симметричного замыкания.
- Логика **S5**-замыкания: $S = (R \cup R^{-1})^*$.

  Ясно, что класс шкал вида $F = (W, R, Q, T, S)$, в которых $Q = R^{-1}$, $T = R \cup Q$, $S = T^*$, задается некоторым конечным множеством модальных $(\Box_1, \Box_2, \Box_3, \Box_4)$-формул.

  Но что будет, если Q и T выбросить из шкал?
  То есть взять класс шкал вида $F = (W, R, S)$, где $S = (R \cup R^{-1})^*$.
  Задается ли он какими-то модальными $(\Box_1, \Box_4)$-формулами?
- Логика евклидова замыкания? (наим. евкл. отн. содерж. R)

Конец лекции 4. Спасибо за внимание!