Модальная логика. Лекция 3: теорема о полноте минимальной модальной логики, канонические модальные логики, канонические модальные формулы

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

9 октября 2020 года

Исчисление для минимальной нормальной логики K:

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.

Минимальная нормальная модальная логика K

Исчисление для минимальной нормальной логики K:

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Минимальная нормальная модальная логика **K**

Исчисление для минимальной нормальной логики K:

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Минимальная нормальная модальная логика **K**

Исчисление для минимальной нормальной логики K:

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Определение

$L \subseteq \mathrm{Fm}$ — нормальная модальная логика, если
– L содержит все аксиомы логики **K**,
– L замкнуто по трем правилам (MP), (Nec), (Sub).

Минимальная нормальная модальная логика K

Исчисление для минимальной нормальной логики K:

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Определение

$L \subseteq \mathrm{Fm}$ — нормальная модальная логика, если
– L содержит все аксиомы логики **K**,
– L замкнуто по трем правилам (MP), (Nec), (Sub).

$L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — наименьшая (нормальная) логика, содержащая Γ.

Минимальная нормальная модальная логика **K**

Исчисление для минимальной нормальной логики K:

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Определение

$L \subseteq \mathrm{Fm}$ — нормальная модальная логика, если
– L содержит все аксиомы логики **K**,
– L замкнуто по трем правилам (MP), (Nec), (Sub).

$L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ — наименьшая (нормальная) логика, содержащая Γ.

Примеры: $\mathrm{KT} = \mathbf{K} \oplus \{\Box p \to p\}$,
$\mathrm{K4} = \mathbf{K} \oplus \{\Box p \to \Box\Box p\}$,
$\mathrm{S4} = \mathbf{K} \oplus \{\Box p \to p,\ \Box p \to \Box\Box p\}$.

Теоремы о корректности и полноте

Теорема о корректности и полноте логики K

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ \textit{общезначима (на всех шкалах).}}$$

Теоремы о корректности и полноте

Теорема о корректности и полноте логики $\mathbf{K}$

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Для некоторых модальных логик L мы докажем:

Теорема о корректности и полноте логики L

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F, \text{ таких что } F \models L.$$

Теоремы о корректности и полноте

Теорема о корректности и полноте логики $\mathbf{K}$

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Для некоторых модальных логик L мы докажем:

Теорема о корректности и полноте логики L

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F\text{, таких что } F \models L.$$

Замечание. Если $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, то: $\quad F \models L \;\Leftrightarrow\; F \models \Gamma.$

Теоремы о корректности и полноте

Теорема о корректности и полноте логики $\mathbf{K}$

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Для некоторых модальных логик L мы докажем:

Теорема о корректности и полноте логики L

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F\text{, таких что } F \models L.$$

Замечание. Если $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, то: $\quad F \models L \;\Leftrightarrow\; F \models \Gamma$.

Мы понимаем логику всякую L двояко:
– и как множество формул (содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по правилам),
– и как исчисление с аксиомами логики $\mathbf{K}$ и собственными (мн-во Γ).

Теоремы о корректности и полноте

Теорема о корректности и полноте логики $\mathbf{K}$

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Для некоторых модальных логик L мы докажем:

Теорема о корректности и полноте логики L

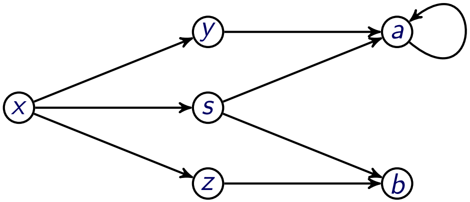
Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F\text{, таких что } F \models L.$$

Замечание. Если $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, то: $\quad F \models L \;\Leftrightarrow\; F \models \Gamma$.

Мы понимаем логику всякую L двояко:
– и как множество формул (содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по правилам),
– и как исчисление с аксиомами логики $\mathbf{K}$ и собственными (мн-во Γ).
Поэтому записи $A \in L$ и $L \vdash A$ для нас — синонимы.

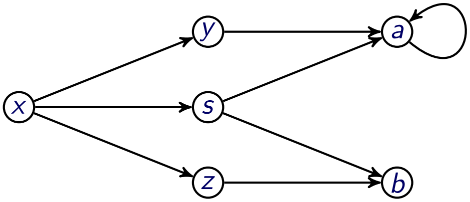
Теория одной точки (в модели Крипке)



Как охарактеризовать множество формул, истинных в точке x?

$$T := \mathrm{Theory}(M, x) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid M, x \models A\}$$

Теория одной точки (в модели Крипке)

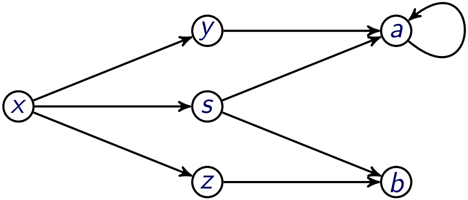


Как охарактеризовать множество формул, истинных в точке x?

$$T := \mathrm{Theory}(M, x) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid M, x \models A\}$$

1. $T \supseteq \mathbf{K}$, т.к. теоремы $\mathbf{K}$ истинны всюду,

Теория одной точки (в модели Крипке)

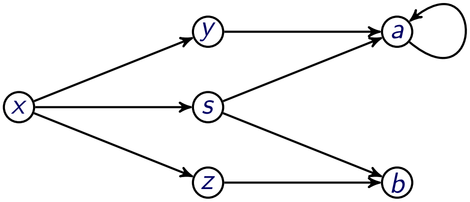


Как охарактеризовать множество формул, истинных в точке x?

$$T := \mathrm{Theory}(M, x) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid M, x \models A\}$$

1. $T \supseteq \mathbf{K}$, т.к. теоремы $\mathbf{K}$ истинны всюду,
2. T замкнуто по (MP): если $M, x \models A,\ A \to B$, то $M, x \models B$,

Теория одной точки (в модели Крипке)

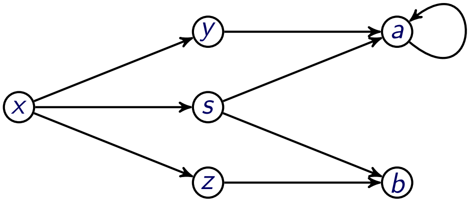


Как охарактеризовать множество формул, истинных в точке x?

$$T := \text{Theory}(M, x) = \{A \in \text{Fm} \mid M, x \models A\}$$

1. $T \supseteq \mathbf{K}$, т.к. теоремы $\mathbf{K}$ истинны всюду,
2. T замкнуто по (MP): если $M, x \models A$, $A \to B$, то $M, x \models B$,
3. T непротиворечиво: не бывает так, что $A \in T$ и $(\neg A) \in T$.

Теория одной точки (в модели Крипке)

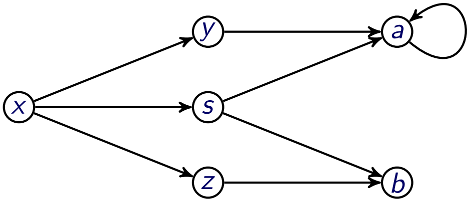


Как охарактеризовать множество формул, истинных в точке x?

$$T := \mathrm{Theory}(M, x) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid M, x \models A\}$$

1. $T \supseteq \mathbf{K}$, т.к. теоремы $\mathbf{K}$ истинны всюду,
2. T замкнуто по (MP): если $M, x \models A$, $A \to B$, то $M, x \models B$,
3. T непротиворечиво: не бывает так, что $A \in T$ и $(\neg A) \in T$.
4. T полно: всегда $A \in T$ или $(\neg A) \in T$.

Теория одной точки (в модели Крипке)



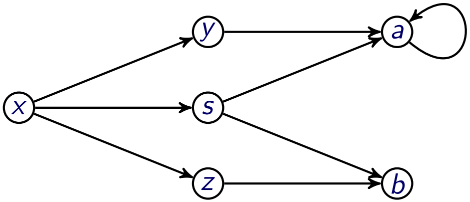
Как охарактеризовать множество формул, истинных в точке x?

$$T := \mathrm{Theory}(M, x) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid M, x \models A\}$$

1. $T \supseteq \mathbf{K}$, т.к. теоремы $\mathbf{K}$ истинны всюду,
2. T замкнуто по (MP): если $M, x \models A$, $A \to B$, то $M, x \models B$,
3. T непротиворечиво: не бывает так, что $A \in T$ и $(\neg A) \in T$.
4. T полно: всегда $A \in T$ или $(\neg A) \in T$.

Такие $T \subseteq \mathrm{Fm}$ наз. полными непротиворечивыми теориями (ПНТ).

Теория одной точки (в модели Крипке)



Как охарактеризовать множество формул, истинных в точке x?

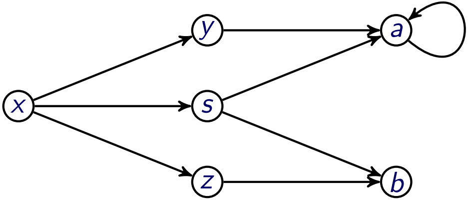
$$T := \mathrm{Theory}(M, x) = \{A \in \mathrm{Fm} \mid M, x \models A\}$$

1. $T \supseteq \mathbf{K}$, т.к. теоремы $\mathbf{K}$ истинны всюду,
2. T замкнуто по (MP): если $M, x \models A,\ A \to B$, то $M, x \models B$,
3. T непротиворечиво: не бывает так, что $A \in T$ и $(\neg A) \in T$.
4. T полно: всегда $A \in T$ или $(\neg A) \in T$.

Такие $T \subseteq \mathrm{Fm}$ наз. полными непротиворечивыми теориями (ПНТ).

Если кроме того $M \models L$, то имеем: $T \supseteq L$.

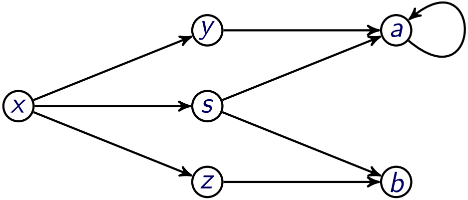
Связи между теориями точек



Если xRy, то что можно сказать о связи теорий этих точек?

$$T := \mathrm{Theory}(M, x), \qquad S := \mathrm{Theory}(M, y).$$

Связи между теориями точек

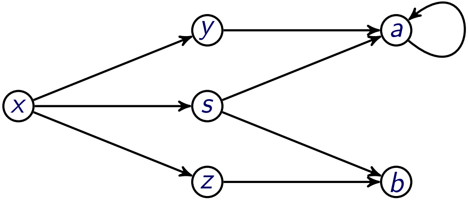


Если xRy, то что можно сказать о связи теорий этих точек?

$$T := \mathrm{Theory}(M, x), \qquad S := \mathrm{Theory}(M, y).$$

Ответ: для каждой формулы A, если $\Box A \in T$, то $A \in S$.

Связи между теориями точек



Если xRy, то что можно сказать о связи теорий этих точек?

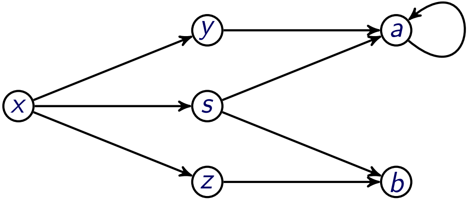
$$T := \mathrm{Theory}(M, x), \qquad S := \mathrm{Theory}(M, y).$$

Ответ: для каждой формулы A, если $\Box A \in T$, то $A \in S$.

Как связана оценка переменных с теорией точки?

$$x \in V(p_i) \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models p_i$$

Связи между теориями точек



Если xRy, то что можно сказать о связи теорий этих точек?

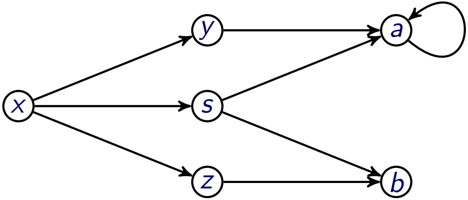
$$T := \mathrm{Theory}(M, x), \qquad S := \mathrm{Theory}(M, y).$$

Ответ: для каждой формулы A, если $\Box A \in T$, то $A \in S$.

Как связана оценка переменных с теорией точки?

$$x \in V(p_i) \iff M, x \models p_i \iff p_i \in T.$$

Связи между теориями точек



Если xRy, то что можно сказать о связи теорий этих точек?

$$T := \text{Theory}(M, x), \qquad S := \text{Theory}(M, y).$$

Ответ: для каждой формулы A, если $\Box A \in T$, то $A \in S$.

Как связана оценка переменных с теорией точки?

$$x \in V(p_i) \iff M, x \models p_i \iff p_i \in T.$$

Каноническая модель логики L — состоит из всех ПНТ $T \supseteq L$.

Некоторые факты о теориях

Теория (модальная) — это $T \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по MP.

Некоторые факты о теориях

Теория (модальная) — это $T \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по MP.

Обозначение:
$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.

Некоторые факты о теориях

Теория (модальная) — это $T \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее **K** и замкнутое по MP.

Обозначение:
$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.
(Наименьшая существует — как пересечение всех таких теорий.)

Некоторые факты о теориях

Теория (модальная) — это $T \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по MP.

Обозначение:
$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.
(Наименьшая существует — как пересечение всех таких теорий.)

Лемма 1.

$$T + A \quad = \quad \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Некоторые факты о теориях

Теория (модальная) — это $T \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по MP.

Обозначение:
$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.
(Наименьшая существует — как пересечение всех таких теорий.)

Лемма 1.

$$T + A \quad = \quad \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
($\subseteq$) S содержит T и A и замкнуто по MP.

Некоторые факты о теориях

Теория (модальная) — это $T \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по MP.

Обозначение:
$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.
(Наименьшая существует — как пересечение всех таких теорий.)

Лемма 1.

$$T + A \quad = \quad \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
($\subseteq$) S содержит T и A и замкнуто по MP.
$T + A$ — наименьшая с такими свойствами. Значит, $T + A \subseteq S$.

Некоторые факты о теориях

Теория (модальная) — это $T \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по MP.

Обозначение:
$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.
(Наименьшая существует — как пересечение всех таких теорий.)

Лемма 1.

$$T + A \quad = \quad \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
$(\subseteq)$ S содержит T и A и замкнуто по MP.
$T + A$ — наименьшая с такими свойствами. Значит, $T + A \subseteq S$.

$(\supseteq)$ Всякая теория T', содержащая T и A, обязательно содержит каждую формулу B, такую что $(A \to B) \in T$.

Некоторые факты о теориях

Теория (модальная) — это $T \subseteq \mathrm{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по MP.

Обозначение:
$T + A$ есть наименьшая теория, содержащая T и формулу A.
(Наименьшая существует — как пересечение всех таких теорий.)

Лемма 1.

$$T + A \;=\; \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через S.
($\subseteq$) S содержит T и A и замкнуто по MP.
$T + A$ — наименьшая с такими свойствами. Значит, $T + A \subseteq S$.

($\supseteq$) Всякая теория T', содержащая T и A, обязательно содержит каждую формулу B, такую что $(A \to B) \in T$. То есть $T' \supseteq S$. В том числе $T + A \supseteq S$. ◁

О расширении теории

Лемма 2.

Пусть T — непротиворечивая теория, A — любая формула.
Тогда $T + A$ или $T + \neg A$ является непротиворечивой теорией.

Лемма 2.

Пусть T — непротиворечивая теория, A — любая формула.
Тогда $T + A$ или $T + \neg A$ является непротиворечивой теорией.

Доказательство. Воспользуемся формулой:

$$T + A = \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

О расширении теории

Лемма 2.

Пусть T — непротиворечивая теория, A — любая формула. Тогда $T + A$ или $T + \neg A$ является непротиворечивой теорией.

Доказательство. Воспользуемся формулой:

$$T + A = \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Если бы $\perp$ лежала и в $T + A$, и в $T + \neg A$,

Лемма 2.

Пусть T — непротиворечивая теория, A — любая формула. Тогда $T + A$ или $T + \neg A$ является непротиворечивой теорией.

Доказательство. Воспользуемся формулой:

$$T + A = \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Если бы $\perp$ лежала и в $T + A$, и в $T + \neg A$, то формулы $(A \to \perp)$ и $(\neg A \to \perp)$ лежали бы в T.

О расширении теории

Лемма 2.

Пусть T — непротиворечивая теория, A — любая формула.
Тогда $T + A$ или $T + \neg A$ является непротиворечивой теорией.

Доказательство. Воспользуемся формулой:

$$T + A = \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Если бы $\perp$ лежала и в $T + A$, и в $T + \neg A$,
то формулы $(A \to \perp)$ и $(\neg A \to \perp)$ лежали бы в T.
Воспользуемся тавтологией (выводимой в ИВ, а значит $\in T$):

О расширении теории

Лемма 2.

Пусть T — непротиворечивая теория, A — любая формула.
Тогда $T + A$ или $T + \neg A$ является непротиворечивой теорией.

Доказательство. Воспользуемся формулой:

$$T + A = \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Если бы $\bot$ лежала и в $T + A$, и в $T + \neg A$,
то формулы $(A \to \bot)$ и $(\neg A \to \bot)$ лежали бы в T.
Воспользуемся тавтологией (выводимой в ИВ, а значит $\in T$):

$$(A \to B) \ \to \ [(\neg A \to B) \to B] \qquad \text{для } B := \bot.$$

О расширении теории

Лемма 2.

Пусть T — непротиворечивая теория, A — любая формула.
Тогда $T + A$ или $T + \neg A$ является непротиворечивой теорией.

Доказательство. Воспользуемся формулой:

$$T + A = \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Если бы $\bot$ лежала и в $T + A$, и в $T + \neg A$,
то формулы $(A \to \bot)$ и $(\neg A \to \bot)$ лежали бы в T.
Воспользуемся тавтологией (выводимой в ИВ, а значит $\in T$):

$$(A \to B) \to [(\neg A \to B) \to B] \qquad \text{для } B := \bot.$$

По правилу MP получаем $\bot \in T$, что не так. ◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.

$\triangleleft$

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.
1) T — теория.

$\triangleleft$

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.
1) T — теория. Если $A, A \to B \in T$,

◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.
1) T — теория. Если $A, A \to B \in T$, то для некоторых m, n имеем $A \in T_m$ и $(A \to B) \in T_n$.

◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$. Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.
1) T — теория. Если $A, A \to B \in T$, то для некоторых m, n имеем $A \in T_m$ и $(A \to B) \in T_n$. Взяв максимум $k = \max(m, n)$, получаем $A, A \to B \in T_k$, откуда $B \in T_k$ (ибо T_k — теория) и $B \in T$.

◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$. Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.

1) T — теория.

2) T — непротиворечива.

◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$. Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.

1) T — теория.

2) T — непротиворечива. Если бы $\perp \in T$, то $\exists n$: $\perp \in T_n$, что не так.

$\triangleleft$

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.

1) T — теория.

2) T — непротиворечива.

3) T — полна. ◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.

1) T — теория.

2) T — непротиворечива.

3) T — полна. Допустим $A_n \notin T$ и $\neg A_n \notin T$. ◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.

1) T — теория.

2) T — непротиворечива.

3) T — полна. Допустим $A_n \notin T$ и $\neg A_n \notin T$. Её номер: $A_m := \neg A_n$.

◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.
1) T — теория.
2) T — непротиворечива.
3) T — полна. Допустим $A_n \notin T$ и $\neg A_n \notin T$. Её номер: $A_m := \neg A_n$.
Значит, $T_n + A_n$ и $T_m + A_m$ обе противоречивы. $\triangleleft$

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$. Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.

1) T — теория.

2) T — непротиворечива.

3) T — полна. Допустим $A_n \notin T$ и $\neg A_n \notin T$. Её номер: $A_m := \neg A_n$. Значит, $T_n + A_n$ и $T_m + A_m$ обе противоречивы. Берем $k = \max(m, n)$.

◁

Пополнение теории

Определение. T полная, если $\forall A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма Линденбаума.

Всякая НТ содержится в некоторой полной НТ.

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathrm{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$.
Пусть T_0 — НТ. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ есть ПНТ.
1) T — теория.
2) T — непротиворечива.
3) T — полна. Допустим $A_n \notin T$ и $\neg A_n \notin T$. Её номер: $A_m := \neg A_n$.
Значит, $T_n + A_n$ и $T_m + A_m$ обе противоречивы. Берем $k = \max(m, n)$.
Получили: $T_k + A_n$ и $T_k + \neg A_n$ обе противоречивы, чего не бывает. $\triangleleft$

Свойства полных непротиворечивых теорий

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & \neg A \in T & \iff & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \iff & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \iff & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \iff & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}$$

Свойства полных непротиворечивых теорий

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \neg A \in T & \Longleftrightarrow & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \Longleftrightarrow & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}
$$

Доказательство. (1) по определению ПНТ.

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \neg A \in T & \iff & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \iff & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \iff & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \iff & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}$$

Доказательство. (1) по определению ПНТ. Проверим, например, (3).

Свойства полных непротиворечивых теорий

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \neg A \in T & \Longleftrightarrow & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \Longleftrightarrow & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}
$$

Доказательство. (1) по определению ПНТ. Проверим, например, (3).
($\Leftarrow$) Пусть $A \in T$. Тавтология $A \to (A \vee B)$ есть в T. Тогда $(A \vee B) \in T$.

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \neg A \in T & \iff & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \iff & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \iff & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \iff & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}$$

Доказательство. (1) по определению ПНТ. Проверим, например, (3).

($\Leftarrow$) Пусть $A \in T$. Тавтология $A \to (A \vee B)$ есть в T. Тогда $(A \vee B) \in T$.

($\Rightarrow$) Пусть $A \notin T$ и $B \notin T$.

Свойства полных непротиворечивых теорий

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & \neg A \in T & \Longleftrightarrow & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \Longleftrightarrow & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}$$

Доказательство. (1) по определению ПНТ. Проверим, например, (3).
($\Leftarrow$) Пусть $A \in T$. Тавтология $A \to (A \vee B)$ есть в T. Тогда $(A \vee B) \in T$.
($\Rightarrow$) Пусть $A \notin T$ и $B \notin T$. Тогда $\neg A \in T$ и $\neg B \in T$.

Свойства полных непротиворечивых теорий

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \neg A \in T & \Longleftrightarrow & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \Longleftrightarrow & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}$$

Доказательство. (1) по определению ПНТ. Проверим, например, (3).
($\Leftarrow$) Пусть $A \in T$. Тавтология $A \to (A \vee B)$ есть в T. Тогда $(A \vee B) \in T$.
($\Rightarrow$) Пусть $A \notin T$ и $B \notin T$. Тогда $\neg A \in T$ и $\neg B \in T$.
Следующая тавтология есть в ИВ, а значит, и в T:

$$\neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B)).$$

Свойства полных непротиворечивых теорий

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$\begin{array}{llcl}
(1) & \neg A \in T & \iff & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \iff & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \iff & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \iff & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}$$

Доказательство. (1) по определению ПНТ. Проверим, например, (3).
($\Leftarrow$) Пусть $A \in T$. Тавтология $A \to (A \vee B)$ есть в T. Тогда $(A \vee B) \in T$.
($\Rightarrow$) Пусть $A \notin T$ и $B \notin T$. Тогда $\neg A \in T$ и $\neg B \in T$.
Следующая тавтология есть в ИВ, а значит, и в T:

$$\neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B)).$$

По правилу MP получаем $\neg(A \vee B) \in T$.

Свойства полных непротиворечивых теорий

Лемма 3.

Пусть T — ПНТ. Тогда для любых формул A, B имеем:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \neg A \in T & \Longleftrightarrow & A \notin T \\
(2) & (A \wedge B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ и } B \in T \\
(3) & (A \vee B) \in T & \Longleftrightarrow & A \in T \text{ или } B \in T \\
(4) & (A \to B) \in T & \Longleftrightarrow & (A \in T \Rightarrow B \in T)
\end{array}$$

Доказательство. (1) по определению ПНТ. Проверим, например, (3).
($\Leftarrow$) Пусть $A \in T$. Тавтология $A \to (A \vee B)$ есть в T. Тогда $(A \vee B) \in T$.
($\Rightarrow$) Пусть $A \notin T$ и $B \notin T$. Тогда $\neg A \in T$ и $\neg B \in T$.
Следующая тавтология есть в ИВ, а значит, и в T:

$$\neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B)).$$

По правилу MP получаем $\neg(A \vee B) \in T$. Значит, $(A \vee B) \notin T$. $\triangleleft$

Каноническая модель непр. нормальной логики L

Определение. Логика L непротиворечива, если $\bot \notin L$.

Каноническая модель непр. нормальной логики L

Определение. Логика L непротиворечива, если $\bot \notin L$.
Эквивалентно: $L \neq \mathrm{Fm}$.
Эквивалентно: не бывает такого, что $A \in L$ и $\neg A \in L$.

Каноническая модель непр. нормальной логики L

Определение. Логика L непротиворечива, если $\bot \notin L$.
Эквивалентно: $L \neq \mathrm{Fm}$.
Эквивалентно: не бывает такого, что $A \in L$ и $\neg A \in L$.

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика.

Определение. Логика L непротиворечива, если $\bot \notin L$.
Эквивалентно: $L \neq \mathrm{Fm}$.
Эквивалентно: не бывает такого, что $A \in L$ и $\neg A \in L$.

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика.

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \; := \; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,

Каноническая модель непр. нормальной логики L

Определение. Логика L непротиворечива, если $\bot \notin L$.
Эквивалентно: $L \neq \mathrm{Fm}$.
Эквивалентно: не бывает такого, что $A \in L$ и $\neg A \in L$.

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика.

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x$ — ПНТ и $x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,

Каноническая модель непр. нормальной логики L

Определение. Логика L непротиворечива, если $\bot \notin L$.
Эквивалентно: $L \neq \mathrm{Fm}$.
Эквивалентно: не бывает такого, что $A \in L$ и $\neg A \in L$.

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика.

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \;:=\; \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x — \text{ПНТ и } x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \;\;\leftrightharpoons\;\;$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$,
- $x \models p_i \;\;\leftrightharpoons\;\; p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Каноническая модель непр. нормальной логики L

Определение. Логика L непротиворечива, если $\bot \notin L$.
Эквивалентно: $L \neq \mathrm{Fm}$.
Эквивалентно: не бывает такого, что $A \in L$ и $\neg A \in L$.

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика.

Определение

Каноническая модель логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L \ := \ \{x \subseteq \mathrm{Fm} \mid x — \text{ПНТ и } x \supseteq L\}$,
- $x\, R_L\, y \ \leftrightharpoons$ для всех формул $A \in \mathrm{Fm}$ имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow \ A \in y)$,
- $x \models p_i \ \leftrightharpoons \ p_i \in x$, для каждой переменной $p_i \in \mathrm{Var}$.

Наша цель — доказать: $\boxed{M_L \models A \iff L \vdash A}$ для всех формул A.

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x,$ для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x,$ для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A.

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x,$ для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L.

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x,$ для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ.

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x,$ для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

$\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in x$. Почему $x \models \Box A$?

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in x$. Почему $x \models \Box A$? Берем любой y, такой что $x\, R_L\, y$.

$\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in x$. Почему $x \models \Box A$? Берем любой y, такой что $x \, R_L \, y$. По построению R_L имеем $A \in y$.

$\triangleleft$

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \in x$. Почему $x \models \Box A$? Берем любой y, такой что $x \, R_L \, y$. По построению R_L имеем $A \in y$. По предположению индукции $y \models A$.

$\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

$\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \quad \iff \quad \Box A \in x.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

◁

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.

$\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$. Если $C \in L$, то по Nec имеем $\Box C \in L \subseteq x$. Значит, $C \in \sharp x$.

$\lhd$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.
2) $\sharp x$ замкнут по MP.

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x,$ для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.
2) $\sharp x$ замкнут по MP. Если $C, C \to D \in \sharp x$, то $\Box C, \Box(C \to D) \in x$.

◁

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.
2) $\sharp x$ замкнут по MP. Если $C, C \to D \in \sharp x$, то $\Box C, \Box(C \to D) \in x$. Поскольку $\mathbf{K} \subseteq L \subseteq x$, имеем $\Box(C \to D) \to (\Box C \to \Box D) \in x$.

$\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x,$ для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.
2) $\sharp x$ замкнут по MP. Если $C, C \to D \in \sharp x$, то $\Box C, \Box(C \to D) \in x$. Поскольку $\mathbf{K} \subseteq L \subseteq x$, имеем $\Box(C \to D) \to (\Box C \to \Box D) \in x$. Дважды по MP — получаем $\Box D \in x$. Значит $D \in \sharp x$.

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x,$ для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \iff \Box A \in x.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.
2) $\sharp x$ замкнут по MP.
3) $\sharp x$ непротиворечив. $\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \qquad \iff \qquad \Box A \in x.$$

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.
2) $\sharp x$ замкнут по MP.
3) $\sharp x$ непротиворечив. Если бы $\bot \in \sharp x$, то $\Box\bot \in x$. $\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \iff \Box A \in x.$$

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.
2) $\sharp x$ замкнут по MP.
3) $\sharp x$ непротиворечив. Если бы $\bot \in \sharp x$, то $\Box\bot \in x$. Но $L \vdash \Box\bot \to \Box A$.

$\triangleleft$

Ключевая лемма о канонической модели

Лемма 4 (Ключевая).

$M_L, x \models A \iff A \in x$, для каждой точки $x \in W_L$ и формулы A.

Доказательство. Индукция по построению A. Для переменных $A = p_i$ — по построению оценки V_L. Для $\neg, \wedge, \vee, \to$ — по лемме о ПНТ. Остается доказать:

$$x \models \Box A \quad \iff \quad \Box A \in x.$$

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утв. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая L.*

1) $L \subseteq \sharp x$.
2) $\sharp x$ замкнут по MP.
3) $\sharp x$ непротиворечив. Если бы $\bot \in \sharp x$, то $\Box\bot \in x$. Но $L \vdash \Box\bot \to \Box A$. По правилу MP получаем $\Box A \in x$, что не так. $\triangleleft$

Ключевая лемма (окончание доказательства)

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Ключевая лемма (окончание доказательства)

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x \, R_L \, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Ключевая лемма (окончание доказательства)

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x\, R_L\, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \;:=\; \sharp x + \neg A \;\supseteq L.$$

Ключевая лемма (окончание доказательства)

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x\, R_L\, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \;:=\; \sharp x + \neg A \;\supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$.

Ключевая лемма (окончание доказательства)

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x\, R_L\, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \;:=\; \sharp x + \neg A \;\supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$. Тогда $x\, R_L\, y$ и $\neg A \in y$,

Ключевая лемма (окончание доказательства)

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x\, R_L\, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \;:=\; \sharp x + \neg A \;\supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$. Тогда $x\, R_L\, y$ и $\neg A \in y$, значит $A \notin y$, и по предположению индукции $y \not\models A$. Отсюда $x \not\models \Box A$.

Ключевая лемма (окончание доказательства)

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x \, R_L \, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \ := \ \sharp x + \neg A \ \supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$. Тогда $x \, R_L \, y$ и $\neg A \in y$, значит $A \notin y$, и по предположению индукции $y \not\models A$. Отсюда $x \not\models \Box A$.

Итак, почему T — непротиворечива?

Ключевая лемма (окончание доказательства)

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x\, R_L\, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \;:=\; \sharp x + \neg A \;\supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$. Тогда $x\, R_L\, y$ и $\neg A \in y$, значит $A \notin y$, и по предположению индукции $y \not\models A$. Отсюда $x \not\models \Box A$.

Итак, почему T — непротиворечива? Допустим $\bot \in T$.

Ключевая лемма (окончание доказательства)

($\Rightarrow$) Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x \, R_L \, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \ := \ \sharp x + \neg A \ \supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$. Тогда $x \, R_L \, y$ и $\neg A \in y$, значит $A \notin y$, и по предположению индукции $y \not\models A$. Отсюда $x \not\models \Box A$.

Итак, почему T — непротиворечива? Допустим $\bot \in T$.
По формуле для $+$, это значит $(\neg A \to \bot) \in \sharp x$.

Ключевая лемма (окончание доказательства)

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x\, R_L\, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \;:=\; \sharp x + \neg A \;\supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$. Тогда $x\, R_L\, y$ и $\neg A \in y$, значит $A \notin y$, и по предположению индукции $y \not\models A$. Отсюда $x \not\models \Box A$.

Итак, почему T — непротиворечива? Допустим $\bot \in T$.
По формуле для $+$, это значит $(\neg A \to \bot) \in \sharp x$.
Тавтология $(\neg A \to \bot) \to A$ принадлежит $\sharp x$.

Ключевая лемма (окончание доказательства)

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x\, R_L\, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \ := \ \sharp x + \neg A \ \supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$. Тогда $x\, R_L\, y$ и $\neg A \in y$, значит $A \notin y$, и по предположению индукции $y \not\models A$. Отсюда $x \not\models \Box A$.

Итак, почему T — непротиворечива? Допустим $\bot \in T$.
По формуле для $+$, это значит $(\neg A \to \bot) \in \sharp x$.
Тавтология $(\neg A \to \bot) \to A$ принадлежит $\sharp x$.
Тогда по MP заключаем $A \in \sharp x$, то есть $\Box A \in x$, что не так.

Ключевая лемма (окончание доказательства)

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Мы изучили теорию $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Определение отношения R_L можно переписать так: $x\, R_L\, y \Leftrightarrow \sharp x \subseteq y$.

Рассмотрим теорию

$$T \;:=\; \sharp x + \neg A \;\supseteq L.$$

Если мы докажем, что T непротиворечива, то по лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $y \in W_L$. Тогда $x\, R_L\, y$ и $\neg A \in y$, значит $A \notin y$, и по предположению индукции $y \not\models A$. Отсюда $x \not\models \Box A$.

Итак, почему T — непротиворечива? Допустим $\bot \in T$.
По формуле для $+$, это значит $(\neg A \to \bot) \in \sharp x$.
Тавтология $(\neg A \to \bot) \to A$ принадлежит $\sharp x$.
Тогда по MP заключаем $A \in \sharp x$, то есть $\Box A \in x$, что не так.

Ключевая лемма доказана. $\triangleleft$

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \iff L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.
Тогда $M_L, x \models A$.

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.
Тогда $M_L, x \models A$.
Таким образом, $M_L \models A$.

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \iff L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.
Тогда $M_L, x \models A$.
Таким образом, $M_L \models A$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \nvdash A$.

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.
Тогда $M_L, x \models A$.
Таким образом, $M_L \models A$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \nvdash A$.
Тогда теория $T := L + \neg A$ непротиворечива,

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.
Тогда $M_L, x \models A$.
Таким образом, $M_L \models A$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \nvdash A$.
Тогда теория $T := L + \neg A$ непротиворечива,
иначе $(\neg A \to \bot) \in L$, то есть $A \in L$, что не так.

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L *имеем:*

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.
Тогда $M_L, x \models A$.
Таким образом, $M_L \models A$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \nvdash A$.
Тогда теория $T := L + \neg A$ непротиворечива,
иначе $(\neg A \to \bot) \in L$, то есть $A \in L$, что не так.
По Лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $x \in W_L$.

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L имеем:

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.
Тогда $M_L, x \models A$.
Таким образом, $M_L \models A$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \nvdash A$.
Тогда теория $T := L + \neg A$ непротиворечива,
иначе $(\neg A \to \bot) \in L$, то есть $A \in L$, что не так.
По Лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $x \in W_L$.
Тогда $M_L, x \not\models A$.

Теорема о полноте логики отн. канонической модели

Теорема

Для всякой непротиворечивой нормальной модальной логики L *имеем:*

$$M_L \models A \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash A, \qquad \text{для всякой формулы } A.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash A$. Для каждого $x \in W_L$ имеем $L \subseteq x$.
Значит, $A \in x$.
Тогда $M_L, x \models A$.
Таким образом, $M_L \models A$.

($\Rightarrow$) Пусть $L \nvdash A$.
Тогда теория $T := L + \neg A$ непротиворечива,
иначе $(\neg A \to \bot) \in L$, то есть $A \in L$, что не так.
По Лемме Линденбаума T содержится в некоторой ПНТ $x \in W_L$.
Тогда $M_L, x \not\models A$.
Таким образом, $M_L \not\models A$.

Полнота модальной логики $\mathbf{K}$

Теорема о корректности и полноте логики $\mathbf{K}$

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Полнота модальной логики $\mathbf{K}$

Теорема о корректности и полноте логики $\mathbf{K}$

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Доказательство.
($\Longrightarrow$) Было доказано на прошлой лекции (корректность).

Полнота модальной логики $\mathbf{K}$

Теорема о корректности и полноте логики $\mathbf{K}$

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Доказательство.

($\Longrightarrow$) Было доказано на прошлой лекции (корректность).

($\Longleftarrow$) Пусть $\mathbf{K} \nvdash A$. Тогда $M_L \not\models A$.

Полнота модальной логики $\mathbf{K}$

Теорема о корректности и полноте логики $\mathbf{K}$

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Доказательство.

($\Longrightarrow$) Было доказано на прошлой лекции (корректность).

($\Longleftarrow$) Пусть $\mathbf{K} \nvdash A$. Тогда $M_L \not\models A$. Таким образом, A опровергнута на некоторой шкале. $\triangleleft$

Теорема о корректности и полноте логики **K**

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$\mathbf{K} \vdash A \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Доказательство.
($\Longrightarrow$) Было доказано на прошлой лекции (корректность).

($\Longleftarrow$) Пусть $\mathbf{K} \nvdash A$. Тогда $M_L \not\models A$. Таким образом, A опровергнута на некоторой шкале. ◁

Что с другими логиками?
Для каких из них работает метод канонической модели?
То есть для каких L он позволяет доказать полноту?

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Напоминание: логика L — полная, если для всех формул A

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F \text{, таких что } F \models L.$$

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Напоминание: логика L — полная, если для всех формул A

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F\text{, таких что } F \models L.$$

Теорема

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L полная логика.

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Напоминание: логика L — полная, если для всех формул A

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F\text{, таких что } F \models L.$$

Теорема

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L полная логика.

Доказательство. Доказываем полноту L.

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Напоминание: логика L — полная, если для всех формул A

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F\text{, таких что } F \models L.$$

Теорема

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L полная логика.

Доказательство. Доказываем полноту L.

($\Rightarrow$) Доказана на предыдущей лекции (корректность).

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Напоминание: логика L — полная, если для всех формул A

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F, \text{ таких что } F \models L.$$

Теорема

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L полная логика.

Доказательство. Доказываем полноту L.

($\Rightarrow$) Доказана на предыдущей лекции (корректность).

($\Leftarrow$) Пусть $L \nvdash A$. Тогда $M_L \not\models A$.

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Напоминание: логика L — полная, если для всех формул A

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F\text{, таких что } F \models L.$$

Теорема

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L полная логика.

Доказательство. Доказываем полноту L.
($\Rightarrow$) Доказана на предыдущей лекции (корректность).
($\Leftarrow$) Пусть $L \nvdash A$. Тогда $M_L \not\models A$. Таким образом, формулу A опровергли на канонической шкале F_L, причем $F_L \models L$. ◁

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Напоминание: логика L — полная, если для всех формул A

$$L \vdash A \iff A \text{ общезначима на всех шкалах } F \text{, таких что } F \models L.$$

Теорема

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L полная логика.

Доказательство. Доказываем полноту L.
($\Rightarrow$) Доказана на предыдущей лекции (корректность).
($\Leftarrow$) Пусть $L \nvdash A$. Тогда $M_L \not\models A$. Таким образом, формулу A опровергли на канонической шкале F_L, причем $F_L \models L$. ◁

Какие логики — канонические?

Канонические логики

Обозначим каноническую шкалу $F_L = (W_L, R_L)$.

Определение

Логика L — каноническая, если $F_L \models L$.

Напоминание: логика L — полная, если для всех формул A

$L \vdash A \iff A$ общезначима на всех шкалах F, таких что $F \models L$.

Теорема

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L полная логика.

Доказательство. Доказываем полноту L.
($\Rightarrow$) Доказана на предыдущей лекции (корректность).
($\Leftarrow$) Пусть $L \nvdash A$. Тогда $M_L \not\models A$. Таким образом, формулу A опровергли на канонической шкале F_L, причем $F_L \models L$. $\triangleleft$

Какие логики — канонические? Можно ли свести проверку каноничности к проверке некоторого свойства для отдельных аксиом?

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — **канонеческая**, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — канонической, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Позже мы увидим, что это достаточно проверять лишь для $L = \mathbf{K} \oplus A$.

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — канонической, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Позже мы увидим, что это достаточно проверять лишь для $L = \mathbf{K} \oplus A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Пусть все формулы из Γ канонические.
Тогда L — каноническая логика (а значит, она полна).

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — каноническая, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Позже мы увидим, что это достаточно проверять лишь для $L = \mathbf{K} \oplus A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Пусть все формулы из Γ канонические.
Тогда L — каноническая логика (а значит, она полна).

Доказательство. Надо проверить: $F_L \models L$.

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — каноническая, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Позже мы увидим, что это достаточно проверять лишь для $L = \mathbf{K} \oplus A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$*.*
Пусть все формулы из Γ *канонические.*
Тогда L *— каноническая логика (а значит, она полна).*

Доказательство. Надо проверить: $F_L \models L$.
Достаточно проверить: $F_L \models \Gamma$.

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — каноническая, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Позже мы увидим, что это достаточно проверять лишь для $L = \mathbf{K} \oplus A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Пусть все формулы из Γ канонические.
Тогда L — каноническая логика (а значит, она полна).

Доказательство. Надо проверить: $F_L \models L$.
Достаточно проверить: $F_L \models \Gamma$.
Берем любую формулу $A \in \Gamma$. Она каноническая.

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — каноническая, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Позже мы увидим, что это достаточно проверять лишь для $L = \mathbf{K} \oplus A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Пусть все формулы из Γ канонические.
Тогда L — каноническая логика (а значит, она полна).

Доказательство. Надо проверить: $F_L \models L$.
Достаточно проверить: $F_L \models \Gamma$.
Берем любую формулу $A \in \Gamma$. Она каноническая.
Кроме того, $L \vdash A$.

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — канонической, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Позже мы увидим, что это достаточно проверять лишь для $L = \mathbf{K} \oplus A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Пусть все формулы из Γ канонические.
Тогда L — каноническая логика (а значит, она полна).

Доказательство. Надо проверить: $F_L \models L$.
Достаточно проверить: $F_L \models \Gamma$.
Берем любую формулу $A \in \Gamma$. Она каноническая.
Кроме того, $L \vdash A$. Значит, $F_L \models A$. $\triangleleft$

Канонические формулы

Определение

Модальная формула A — **канонической**, если для любой логики L, такой что $L \vdash A$, имеем $F_L \models A$.

Позже мы увидим, что это достаточно проверять лишь для $L = \mathbf{K} \oplus A$.

Теорема

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Пусть все формулы из Γ *канонические.*
Тогда L *— каноническая логика (а значит, она полна).*

Доказательство. Надо проверить: $F_L \models L$.
Достаточно проверить: $F_L \models \Gamma$.
Берем любую формулу $A \in \Gamma$. Она каноническая.
Кроме того, $L \vdash A$. Значит, $F_L \models A$. ◁

Какие же формулы канонические? Много ли их известно науке?

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Факт. $F \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *отношение* R *транзитивно.*

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Факт. $F \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *отношение* R *транзитивно.*

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $M = (W, R, V)$, где R — транзитивное отношение.

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Факт. $F \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *отношение R транзитивно.*

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $M = (W, R, V)$, где R — транзитивное отношение.

Пусть $x \models \Box p$. Почему $x \models \Box\Box p$?

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Факт. $F \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *отношение R транзитивно.*

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $M = (W, R, V)$, где R — транзитивное отношение.

Пусть $x \models \Box p$. Почему $x \models \Box\Box p$? Берем любые y, z, такие что $xRyRz$.

Почему $z \models p$?

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\, (xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\, (xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\, (xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\, (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\, (xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Факт. $F \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *отношение* R *транзитивно.*

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $M = (W, R, V)$, где R — транзитивное отношение.

Пусть $x \models \Box p$. Почему $x \models \Box\Box p$? Берем любые y, z, такие что $xRyRz$.

Почему $z \models p$? Потому что $x \models \Box p$ и xRz!

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.

Факт. $F \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *отношение* R *транзитивно.*

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $M = (W, R, V)$, где R — транзитивное отношение.
Пусть $x \models \Box p$. Почему $x \models \Box\Box p$? Берем любые y, z, такие что $xRyRz$.
Почему $z \models p$? Потому что $x \models \Box p$ и xRz!

($\Rightarrow$) Пусть R не транзитивно: $xRyRz$, $\neg(xRz)$, для некот. $x, y, z \in W$.

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.
Факт. $F \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *отношение R транзитивно.*
Доказательство.
$(\Leftarrow)$ Пусть $M = (W, R, V)$, где R — транзитивное отношение.
Пусть $x \models \Box p$. Почему $x \models \Box\Box p$? Берем любые y, z, такие что $xRyRz$.
Почему $z \models p$? Потому что $x \models \Box p$ и xRz!

$(\Rightarrow)$ Пусть R не транзитивно: $xRyRz$, $\neg(xRz)$, для некот. $x, y, z \in W$.
Угадаем оценку: $V(p) := R(x)$. Получилась модель $M = (W, R, V)$.

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Пусть $F = (W, R)$ — шкала.
Факт. $F \models \Box p \to \Box\Box p \iff$ *отношение* R *транзитивно.*
Доказательство.
$(\Leftarrow)$ Пусть $M = (W, R, V)$, где R — транзитивное отношение.
Пусть $x \models \Box p$. Почему $x \models \Box\Box p$? Берем любые y, z, такие что $xRyRz$.
Почему $z \models p$? Потому что $x \models \Box p$ и xRz!

$(\Rightarrow)$ Пусть R не транзитивно: $xRyRz$, $\neg(xRz)$, для некот. $x, y, z \in W$.
Угадаем оценку: $V(p) := R(x)$. Получилась модель $M = (W, R, V)$.
В ней $M, x \models \Box p$, но $M, x \not\models \Box\Box p$, поскольку $x\,R^2\,z$ и $z \not\models p$. $\triangleleft$

«Традиционные» модальные логики

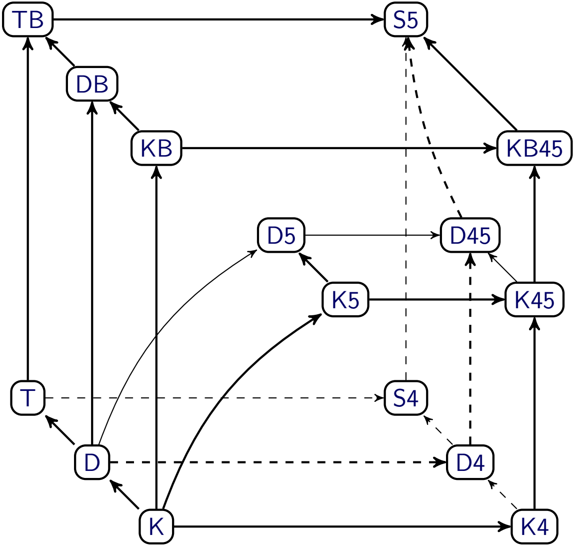
Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Теорема. Имеются лишь такие импликации между 5 свойствами:

1. рефлексивность $\Rightarrow$ сериальность,
2. рефлексивность & евклидовость $\Rightarrow$ симметричность,
3. рефлексивность & евклидовость $\Rightarrow$ транзитивность,
4. симметричность & транзитивность $\Rightarrow$ евклидовость,
5. симметричность & евклидовость $\Rightarrow$ транзитивность,
6. сериальность & сим. & транз. $\Rightarrow$ рефлексивность.

«Традиционные» модальные логики



Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Что общего у этих 5 модальных формул?

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Что общего у этих 5 модальных формул?
Они являются частными случаями (i, j, m, n)-формулы:

$$\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p, \qquad \text{где } i, j, m, n \geqslant 0.$$

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к логике **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y \, (xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x \, (xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy \, (xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall xyz \, (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz \, (xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Что общего у этих 5 модальных формул?
Они являются частными случаями (i, j, m, n)-формулы:

$$\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p, \qquad \text{где } i, j, m, n \geqslant 0.$$

(D) $\Box p \to \Diamond p$ является $(0, 1, 0, 1)$-формулой,
(T) $\Box p \to p$ является $(0, 1, 0, 0)$-формулой,
(B) $p \to \Box\Diamond p$ является $(0, 0, 1, 1)$-формулой,
(4) $\Box p \to \Box\Box p$ является $(0, 1, 2, 0)$-формулой,
(5) $\Box p \to \Box\Diamond p$ является $(0, 1, 1, 1)$-формулой.

План на будущее

- Узнаем, что выражает (i, j, m, n)-формула.

План на будущее

- Узнаем, что выражает (i, j, m, n)-формула.
- Обнаружим, что каждая (i, j, m, n)-формула — каноническая.

План на будущее

- Узнаем, что выражает (i, j, m, n)-формула.
- Обнаружим, что каждая (i, j, m, n)-формула — каноническая.
- Получим полноту «традиционных» логик — как следствие.

План на будущее

- Узнаем, что выражает (i, j, m, n)-формула.
- Обнаружим, что каждая (i, j, m, n)-формула — каноническая.
- Получим полноту «традиционных» логик — как следствие.
- Установим каноничность и полноту еще ряда логик.

План на будущее

- Узнаем, что выражает (i, j, m, n)-формула.
- Обнаружим, что каждая (i, j, m, n)-формула — каноническая.
- Получим полноту «традиционных» логик — как следствие.
- Установим каноничность и полноту еще ряда логик.

Вопрос. Добавляя произвольные (i, j, m, n)-формулы к логике $\mathbf{K}$, получаем ли мы счетное семейство логик или континуальное?

План на будущее

- Узнаем, что выражает (i, j, m, n)-формула.
- Обнаружим, что каждая (i, j, m, n)-формула — каноническая.
- Получим полноту «традиционных» логик — как следствие.
- Установим каноничность и полноту еще ряда логик.

Вопрос. Добавляя произвольные (i, j, m, n)-формулы к логике $\mathbf{K}$, получаем ли мы счетное семейство логик или континуальное?

Конец лекции 3. Спасибо за внимание!