Модальная логика. Лекция 2: Синтаксис, семантика, аксиоматика

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

2 октября 2020 года

Синтаксис:

Переменные $\mathsf{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to$, константы $\top$, $\bot$.

Экскурс в логику высказываний: синтаксис

Синтаксис:

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to$, константы $\top$, $\bot$.

Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ — тоже формула,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Синтаксис:

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to$, константы $\top$, $\bot$.

Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ — тоже формула,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Кратко это записывается так:

$$A \;::=\; \bot \mid \top \mid p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B).$$

Синтаксис:

Переменные $\mathsf{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to$, константы $\top$, $\bot$.

Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ — тоже формула,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Кратко это записывается так:

$$A \ ::= \ \bot \ | \ \top \ | \ p_i \ | \ \neg A \ | \ (A \wedge B) \ | \ (A \vee B) \ | \ (A \to B).$$

Множество всех формул обозначим Fm.

Экскурс в логику высказываний: синтаксис

Синтаксис:

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to$, константы $\top$, $\bot$.

Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ — тоже формула,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Кратко это записывается так:

$$A \ ::= \ \bot \ | \ \top \ | \ p_i \ | \ \neg A \ | \ (A \wedge B) \ | \ (A \vee B) \ | \ (A \to B).$$

Множество всех формул обозначим Fm.

Оно счетное.

Экскурс в логику высказываний: семантика

Семантика формул логики высказываний:

Оценка переменных — это произвольное приписывание переменным p_i значений 0 (ложь) и 1 (истина); т.е. это функция $v\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$.

Семантика формул логики высказываний:
Оценка переменных — это произвольное приписывание переменным p_i значений 0 (ложь) и 1 (истина); т.е. это функция $v\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$.
При оценке v каждая формула A получает значение $v(A) \in \{0,1\}$.

Экскурс в логику высказываний: семантика

Семантика формул логики высказываний:
Оценка переменных — это произвольное приписывание переменным p_i значений 0 (ложь) и 1 (истина); т.е. это функция $v\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$.
При оценке v каждая формула A получает значение $v(A) \in \{0,1\}$.

Пример. При оценке $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$ формула A такая: $(p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \to p_1)$ примет значение $v(A) =$

Семантика формул логики высказываний:
Оценка переменных — это произвольное приписывание переменным p_i значений 0 (ложь) и 1 (истина); т.е. это функция $v\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$.
При оценке v каждая формула A получает значение $v(A) \in \{0,1\}$.

Пример. При оценке $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$ формула A такая: $(p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \to p_1)$ примет значение $v(A) = 1$.

Семантика формул логики высказываний:
Оценка переменных — это произвольное приписывание переменным p_i значений 0 (ложь) и 1 (истина); т.е. это функция $v\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$.
При оценке v каждая формула A получает значение $v(A) \in \{0,1\}$.

Пример. При оценке $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$ формула A такая: $(p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \to p_1)$ примет значение $v(A) = 1$.

Если формула A при каждой оценке переменных v даёт значение $v(A) = 1$, то формула A называется тавтологией или общезначимой.

Экскурс в логику высказываний: семантика

Семантика формул логики высказываний:
Оценка переменных — это произвольное приписывание переменным p_i значений 0 (ложь) и 1 (истина); т.е. это функция $v\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$.
При оценке v каждая формула A получает значение $v(A) \in \{0,1\}$.

Пример. При оценке $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$ формула A такая: $(p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \to p_1)$ примет значение $v(A) = 1$.

Если формула A при каждой оценке переменных v даёт значение $v(A) = 1$, то формула A называется тавтологией или общезначимой.

Как описать множество всех тавтологий?

Семантика формул логики высказываний:
Оценка переменных — это произвольное приписывание переменным p_i значений 0 (ложь) и 1 (истина); т.е. это функция $v\colon \mathrm{Var} \to \{0,1\}$.
При оценке v каждая формула A получает значение $v(A) \in \{0,1\}$.

Пример. При оценке $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$ формула A такая: $(p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \to p_1)$ примет значение $v(A) = 1$.

Если формула A при каждой оценке переменных v даёт значение $v(A) = 1$, то формула A называется тавтологией или общезначимой.

Как описать множество всех тавтологий?

Можно ли все тавтологии получить из конечного списка тавтологий по некоторым фиксированным правилам?

Исчисление высказываний:

Аксиомы (точнее, схемы аксиом):

1. $A \to (B \to A)$,
2. $[A \to (B \to C)] \ \to \ [(A \to B) \to (A \to C)]$,
3. $(A \wedge B) \to A$, $\qquad (A \wedge B) \to B$,
4. $A \to (B \to (A \wedge B))$,
5. $A \to (A \vee B)$, $\qquad B \to (A \vee B)$,
6. $(A \to C) \ \to \ [(B \to C) \ \to \ (A \vee B) \to C]$,
7. $(A \to B) \ \to \ [(A \to \neg B) \ \to \neg A]$,
8. $\neg\neg A \to A$ $\qquad$ (либо $A \vee \neg A$)
9. $\top$, $\qquad \bot \to A$.

Исчисление высказываний:

Аксиомы (точнее, схемы аксиом):

1. $A \to (B \to A)$,
2. $[A \to (B \to C)] \ \to \ [(A \to B) \to (A \to C)]$,
3. $(A \wedge B) \to A, \qquad (A \wedge B) \to B$,
4. $A \to (B \to (A \wedge B))$,
5. $A \to (A \vee B), \qquad B \to (A \vee B)$,
6. $(A \to C) \ \to \ [(B \to C) \ \to \ (A \vee B) \to C]$,
7. $(A \to B) \ \to \ [(A \to \neg B) \ \to \neg A]$,
8. $\neg\neg A \to A$ (либо $A \vee \neg A$)
9. $\top, \qquad \bot \to A$.

Правило вывода: *modus ponens* (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$.

Исчисление высказываний (альт. формулировка):

Аксиомы:

1. $p \to (q \to p)$,
2. $[p \to (q \to r)] \ \to \ [(p \to q) \to (p \to r)]$,
3. $(p \wedge q) \to p, \qquad (p \wedge q) \to q$,
4. $p \to (q \to (p \wedge q))$,
5. $p \to (p \vee q), \qquad q \to (p \vee q)$,
6. $(p \to r) \ \to \ [(q \to r) \ \to \ (p \vee q) \to r]$,
7. $(p \to q) \ \to \ [(p \to \neg q) \ \to \neg p]$,
8. $\neg\neg p \to p \qquad$ (либо $p \vee \neg p$)
9. $\top, \qquad \bot \to p$.

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$, $\qquad$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$.

Исчисление высказываний (альт. формулировка):

Аксиомы:

1. $p \to (q \to p)$,
2. $[p \to (q \to r)] \ \to \ [(p \to q) \to (p \to r)]$,
3. $(p \wedge q) \to p, \qquad (p \wedge q) \to q$,
4. $p \to (q \to (p \wedge q))$,
5. $p \to (p \vee q), \qquad q \to (p \vee q)$,
6. $(p \to r) \ \to \ [(q \to r) \ \to \ (p \vee q) \to r]$,
7. $(p \to q) \ \to \ [(p \to \neg q) \ \to \neg p]$,
8. $\neg\neg p \to p \qquad$ (либо $p \vee \neg p$)
9. $\top, \qquad \bot \to p$.

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$, $\qquad$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$.

$A[p := B]$ — подставили в A вместо переменной p формулу B.

Определение

Формула A называется выводимой (или доказуемой) в исчислении высказываний (пишем $\text{ИВ} \vdash A$), если существует ее вывод (или доказательство) — конечная последовательность формул

$$C_1, \ldots, C_n,$$

где каждая формула C_i — либо аксиома, либо получена из предыдущих формул (т.е. некоторых формул C_k, $k < i$) по некоторому правилу вывода.

Определение

Формула A называется выводимой (или доказуемой) в исчислении высказываний (пишем $ИВ \vdash A$), если существует ее вывод (или доказательство) — конечная последовательность формул

$$C_1, \ldots, C_n,$$

где каждая формула C_i — либо аксиома, либо получена из предыдущих формул (т.е. некоторых формул C_k, $k < i$) по некоторому правилу вывода.

Теорема о корректности и полноте ИВ

Формула A выводится в ИВ $\Longleftrightarrow$ A является тавтологией.

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

1. $A \wedge B \to A$ аксиома

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

1. $A \wedge B \to A$ аксиома
2. $A \to A \vee B$ аксиома

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

1. $A \wedge B \to A$ аксиома
2. $A \to A \vee B$ аксиома
3. $[A \to A \vee B] \;\to\; [(A \wedge B) \;\to\; (A \to A \vee B)]$ аксиома

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

1. $A \wedge B \to A$ аксиома
2. $A \to A \vee B$ аксиома
3. $[A \to A \vee B] \;\to\; [(A \wedge B) \;\to\; (A \to A \vee B)]$ аксиома
4. $(A \wedge B) \;\to\; (A \to A \vee B)$ по правилу MP

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

1. $A \wedge B \to A$ — аксиома
2. $A \to A \vee B$ — аксиома
3. $[A \to A \vee B] \;\to\; [(A \wedge B) \;\to\; (A \to A \vee B)]$ — аксиома
4. $(A \wedge B) \;\to\; (A \to A \vee B)$ — по правилу MP
5. $[(A \wedge B) \;\to\; (A \to A \vee B)] \;\to\; [(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to A \vee B)]$

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

1. $A \wedge B \to A$ — аксиома
2. $A \to A \vee B$ — аксиома
3. $[A \to A \vee B] \to [(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)]$ — аксиома
4. $(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)$ — по правилу MP
5. $[(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)] \to [(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to A \vee B)]$
6. $(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to A \vee B)$

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

1. $A \wedge B \to A$ аксиома
2. $A \to A \vee B$ аксиома
3. $[A \to A \vee B] \to [(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)]$ аксиома
4. $(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)$ по правилу MP
5. $[(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)] \to [(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to A \vee B)]$
6. $(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to A \vee B)$
7. $A \wedge B \to A \vee B$

Пример вывода

Выведем формулу $(A \land B) \to (A \lor B)$.

1. $A \land B \to A$ аксиома
2. $A \to A \lor B$ аксиома
3. $[A \to A \lor B] \;\to\; [(A \land B) \;\to\; (A \to A \lor B)]$ аксиома
4. $(A \land B) \;\to\; (A \to A \lor B)$ по правилу MP
5. $[(A \land B) \;\to\; (A \to A \lor B)] \;\to\; [(A \land B \to A) \to (A \land B \to A \lor B)]$
6. $(A \land B \to A) \to (A \land B \to A \lor B)$
7. $A \land B \to A \lor B$

Пример вывода

Выведем формулу $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.

1. $A \wedge B \to A$ аксиома
2. $A \to A \vee B$ аксиома
3. $[A \to A \vee B] \to [(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)]$ аксиома
4. $(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)$ по правилу MP
5. $[(A \wedge B) \to (A \to A \vee B)] \to [(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to A \vee B)]$
6. $(A \wedge B \to A) \to (A \wedge B \to A \vee B)$
7. $A \wedge B \to A \vee B$

Хотим аналогичное получить для модальной логики.

Модальная логика: синтаксис

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to, \Box$, константы $\top$, $\bot$.

Модальная логика: синтаксис

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to, \Box$, константы $\top$, $\bot$.
Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ и $\Box A$ — тоже формулы,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Модальная логика: синтаксис

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to, \Box$, константы $\top$, $\bot$.
Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ и $\Box A$ — тоже формулы,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Кратко это записывается так:

$$A \ ::= \ \bot \ | \ \top \ | \ p_i \ | \ \neg A \ | \ (A \wedge B) \ | \ (A \vee B) \ | \ (A \to B) \ | \ \Box A.$$

Модальная логика: синтаксис

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to, \Box$, константы $\top$, $\bot$.
Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ и $\Box A$ — тоже формулы,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Кратко это записывается так:

$$A \ ::= \ \bot \ | \ \top \ | \ p_i \ | \ \neg A \ | \ (A \wedge B) \ | \ (A \vee B) \ | \ (A \to B) \ | \ \Box A.$$

Множество всех формул обозначим Fm.

Модальная логика: синтаксис

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to, \Box$, константы $\top$, $\bot$.
Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ и $\Box A$ — тоже формулы,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Кратко это записывается так:

$$A \ ::= \ \bot \mid \top \mid p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A.$$

Множество всех формул обозначим Fm.
Оно счетное.

Модальная логика: синтаксис

Переменные $\mathsf{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to, \Box$, константы $\top$, $\bot$.
Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ и $\Box A$ — тоже формулы,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Кратко это записывается так:

$$A \ ::= \ \bot \ | \ \top \ | \ p_i \ | \ \neg A \ | \ (A \wedge B) \ | \ (A \vee B) \ | \ (A \to B) \ | \ \Box A.$$

Множество всех формул обозначим Fm.
Оно счетное.
Символ $\Diamond$ вводим как сокращение: $\Diamond A := \neg\Box\neg A$.

Модальная логика: синтаксис

Переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\neg, \wedge, \vee, \to, \Box$, константы $\top$, $\bot$.
Формулы строятся по индукции:

- символы $\bot$ и $\top$ являются формулами,
- каждая переменная p_i является формулой,
- если A — формула, то $\neg A$ и $\Box A$ — тоже формулы,
- если A, B — формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Кратко это записывается так:

$$A \;::=\; \bot \mid \top \mid p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A.$$

Множество всех формул обозначим Fm.
Оно счетное.
Символ $\Diamond$ вводим как сокращение: $\Diamond A := \neg\Box\neg A$.
Зачастую выбирают минимальный набор связок: $\bot, \to, \Box$, остальные связки — как (всем известные) сокращения.

Модальная логика: семантика Крипке (Saul Kripke)

Шкала Крипке (Kripke frame) $F = (W, R)$, где $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$.
R — отношение достижимости на мирах (точках из W).
xRy — «из x достижима y», «y — последователь x», «x видит y».

Модальная логика: семантика Крипке (Saul Kripke)

Шкала Крипке (Kripke frame) $F = (W, R)$, где $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$.
R — отношение достижимости на мирах (точках из W).
xRy — «из x достижима y», «y — последователь x», «x видит y».

Модель Крипке $M = (W, R, V)$, где (W, R) — это шкала, V — оценка переменных: каждой p_i она сопоставляет подмножество $V(p_i) \subseteq W$ — это те точки, где мы будем считать переменную p_i истинной.
Таким образом, оценка — это функция $V\colon \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(W)$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A истинна в точке x):

$$M, x \models p_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in V(p_i)$$

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A истинна в точке x):

$M, x \models p_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in V(p_i)$

$M, x \models \neg A \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A$ — то есть неверно, что $M, \models A$

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A истинна в точке x):

$M, x \models p_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in V(p_i)$

$M, x \models \neg A \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A$ — то есть неверно, что $M, \models A$

$M, x \models A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A$ **и** $M, x \models B$

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A истинна в точке x):

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models p_i & \Leftrightarrow & x \in V(p_i) \\
M, x \models \neg A & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \text{ — то есть неверно, что } M, \models A \\
M, x \models A \wedge B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ и } M, x \models B \\
M, x \models A \vee B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ или } M, x \models B
\end{array}
$$

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A истинна в точке x):

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models p_i & \Leftrightarrow & x \in V(p_i) \\
M, x \models \neg A & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \text{ — то есть неверно, что } M, \models A \\
M, x \models A \wedge B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ и } M, x \models B \\
M, x \models A \vee B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \to B & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \textbf{ или } M, x \models B
\end{array}
$$

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A истинна в точке x):

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models p_i & \Leftrightarrow & x \in V(p_i) \\
M, x \models \neg A & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \text{ — то есть неверно, что } M, \models A \\
M, x \models A \wedge B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ и } M, x \models B \\
M, x \models A \vee B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \to B & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \text{для всех } y \in W\text{, таких что } xRy\text{, имеем } M, y \models A
\end{array}
$$

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A **истинна** в точке x):

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models p_i & \Leftrightarrow & x \in V(p_i) \\
M, x \models \neg A & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \text{ — то есть неверно, что } M, \models A \\
M, x \models A \wedge B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ и } M, x \models B \\
M, x \models A \vee B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \to B & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \text{для всех } y \in W\text{, таких что } xRy\text{, имеем } M, y \models A \\
M, x \models \Diamond A & \Leftrightarrow & \text{существует } y \in W\text{, такой что } xRy \text{ и } M, y \models A
\end{array}
$$

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A истинна в точке x):

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models p_i & \Leftrightarrow & x \in V(p_i) \\
M, x \models \neg A & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \text{ — то есть неверно, что } M, \models A \\
M, x \models A \wedge B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ и } M, x \models B \\
M, x \models A \vee B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \to B & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \text{для всех } y \in W\text{, таких что } xRy\text{, имеем } M, y \models A \\
M, x \models \Diamond A & \Leftrightarrow & \text{существует } y \in W\text{, такой что } xRy \text{ и } M, y \models A
\end{array}
$$

Определение

Формула A истинна в модели M (пишем: $M \models A$), если для каждой точки $x \in W$ имеем $M, x \models A$.

Модальная логика: семантика Крипке

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A истинна в точке x):

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models p_i & \Leftrightarrow & x \in V(p_i) \\
M, x \models \neg A & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \text{ — то есть неверно, что } M, \models A \\
M, x \models A \wedge B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ и } M, x \models B \\
M, x \models A \vee B & \Leftrightarrow & M, x \models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models A \to B & \Leftrightarrow & M, x \not\models A \textbf{ или } M, x \models B \\
M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \text{для всех } y \in W\text{, таких что } xRy\text{, имеем } M, y \models A \\
M, x \models \Diamond A & \Leftrightarrow & \text{существует } y \in W\text{, такой что } xRy \text{ и } M, y \models A
\end{array}
$$

Определение

Формула A истинна в модели M (пишем: $M \models A$), если для каждой точки $x \in W$ имеем $M, x \models A$.

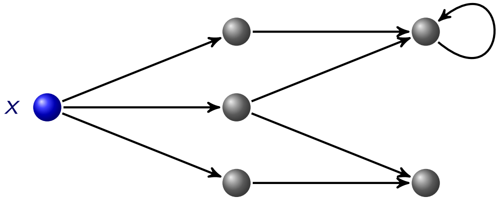
Формула A общезначима на шкале $F = (W, R)$ (пишем: $F \models A$), если для каждой оценки V на F мы имеем: $(W, R, V) \models A$.

Истинность формул $\Box A$ и $\Diamond A$, графически

- Дана модель Крипке
  $M = (W, R, V)$, где W — точки, $R \subseteq W \times W$ — рёбра, V — оценка.

Истинность формул $\Box A$ и $\Diamond A$, графически

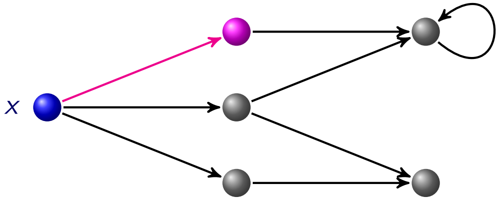
- Дана модель Крипке
  $M = (W, R, V)$, где W — точки, $R \subseteq W \times W$ — рёбра, V — оценка.



Истинность формул $\Box A$ и $\Diamond A$, графически

- Дана модель Крипке
  $M = (W, R, V)$, где W — точки, $R \subseteq W \times W$ — рёбра, V — оценка.

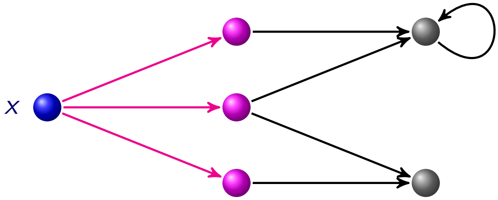
- модальная формула $\Diamond A$ истинна в точке x,
  если A истинна в некоторой точке y, такой что xRy



Истинность формул $\Box A$ и $\Diamond A$, графически

- Дана модель Крипке
  $M = (W, R, V)$, где W — точки, $R \subseteq W \times W$ — рёбра, V — оценка.

- модальная формула $\Box A$ верно в точке x,
  если A истинна в каждой точке y, такой что xRy



Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. a) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$,

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то $M, x + 1 \models p$,

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то $M, x+1 \models p$, значит $M, x \models \Diamond p$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то $M, x+1 \models p$, значит $M, x \models \Diamond p$.
б) Пусть $M = (\mathbb{Z}, \leqslant, V)$. Если $M, x \models \Box p$,

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то $M, x+1 \models p$, значит $M, x \models \Diamond p$.
б) Пусть $M = (\mathbb{Z}, \leqslant, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то ввиду $x \leqslant x$ имеем $M, x \models p$.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то $M, x+1 \models p$, значит $M, x \models \Diamond p$.
б) Пусть $M = (\mathbb{Z}, \leqslant, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то ввиду $x \leqslant x$ имеем $M, x \models p$.

Пример 3. На шкалах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{N}, <)$ общезначимы одни и те же модальные формулы.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то $M, x+1 \models p$, значит $M, x \models \Diamond p$.
б) Пусть $M = (\mathbb{Z}, \leqslant, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то ввиду $x \leqslant x$ имеем $M, x \models p$.

Пример 3. На шкалах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{N}, <)$ общезначимы одни и те же модальные формулы.

Указание: точки $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$ «видят» изоморфные структуры.

Общезначимость модальной формулы на шкале

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то $M, x+1 \models p$, значит $M, x \models \Diamond p$.
б) Пусть $M = (\mathbb{Z}, \leqslant, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то ввиду $x \leqslant x$ имеем $M, x \models p$.

Пример 3. На шкалах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{N}, <)$ общезначимы одни и те же модальные формулы.

Указание: точки $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$ «видят» изоморфные структуры.

Пример 4. На шкалах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Q}, <)$ общезначимы не одни и те же модальные формулы.

Пример 1. Формула $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ общезначима на любой шкале.

Док-во: Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и любую точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models \Box(A \wedge B) \to \Box A$.
Предположим $M, x \models \Box(A \wedge B)$. Надо проверить: $M, x \models \Box A$.
Для этого берем любую точку $y \in W$, такую что xRy. Проверим: $M, y \models A$.
Ввиду $M, x \models \Box(A \wedge B)$ и xRy, имеем $M, y \models A \wedge B$. Значит, $M, y \models A$, ч.т.д.

Пример 2. а) $(\mathbb{Z}, <) \models \Box p \to \Diamond p$. б) $(\mathbb{Z}, \leqslant) \models \Box p \to p$.

Док-во:
а) Пусть $M = (\mathbb{Z}, <, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то $M, x+1 \models p$, значит $M, x \models \Diamond p$.
б) Пусть $M = (\mathbb{Z}, \leqslant, V)$. Если $M, x \models \Box p$, то ввиду $x \leqslant x$ имеем $M, x \models p$.

Пример 3. На шкалах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{N}, <)$ общезначимы одни и те же модальные формулы.

Указание: точки $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$ «видят» изоморфные структуры.

Пример 4. На шкалах $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Q}, <)$ общезначимы не одни и те же модальные формулы.
$\Diamond\Box p \to [\Box(\Box p \to p) \to \Box p]$ общезначима на $(\mathbb{Z}, <)$, но не на $(\mathbb{Q}, <)$.

Аксиоматика всех общезначимых модальных формул

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.

Аксиоматика всех общезначимых модальных формул

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Аксиоматика всех общезначимых модальных формул

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

(modus ponens, necessitation или усиление или правило Гёделя)

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

(modus ponens, necessitation или усиление или правило Гёделя)

Понятие «формула A выводима в исчислении **K**».

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

(modus ponens, necessitation или усиление или правило Гёделя)

Понятие «формула A выводима в исчислении **K**». Пишем: $\mathbf{K} \vdash A$.

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний ИВ: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

(modus ponens, necessitation или усиление или правило Гёделя)

Понятие «формула A выводима в исчислении **K**». Пишем: $\mathbf{K} \vdash A$.

Теорема о корректности и полноте логики K

Для любой модальной формулы A имеем эквивалентность:

$$A \text{ выводима в исчислении } \mathbf{K} \iff A \text{ общезначима (на всех шкалах).}$$

Модальная логика $\mathbf{K}$: пример вывода

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Модальная логика **K**: пример вывода

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Строим вывод:

1. $A \wedge B \;\to\; A$ (аксиома ИВ)

Модальная логика **K**: пример вывода

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Строим вывод:

1. $A \wedge B \ \to \ A$ (аксиома ИВ)
2. $\Box(A \wedge B \ \to \ A)$ (по правилу Nec)

Модальная логика **K**: пример вывода

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Строим вывод:

1. $A \wedge B \;\to\; A$ (аксиома ИВ)
2. $\Box(A \wedge B \;\to\; A)$ (по правилу Nec)
3. $\Box(A \wedge B \;\to\; A) \;\to\; [\,\Box(A \wedge B) \to \Box A\,]$ (акс. дистриб.)

Модальная логика **K**: пример вывода

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \land B) \to \Box A$.

Строим вывод:

1. $A \land B \;\to\; A$ (аксиома ИВ)
2. $\Box(A \land B \;\to\; A)$ (по правилу Nec)
3. $\Box(A \land B \;\to\; A) \;\to\; [\Box(A \land B) \to \Box A]$ (акс. дистриб.)
4. $\Box(A \land B) \to \Box A$ (по правилу MP)

Модальная логика **K**: пример вывода

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Строим вывод:

1. $A \wedge B \;\to\; A$ (аксиома ИВ)
2. $\Box(A \wedge B \;\to\; A)$ (по правилу Nec)
3. $\Box(A \wedge B \;\to\; A) \;\to\; [\Box(A \wedge B) \to \Box A]$ (акс. дистриб.)
4. $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ (по правилу MP)

Модальная логика **K**: пример вывода

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Строим вывод:

1. $A \wedge B \;\to\; A$ (аксиома ИВ)
2. $\Box(A \wedge B \;\to\; A)$ (по правилу Nec)
3. $\Box(A \wedge B \;\to\; A) \;\to\; [\Box(A \wedge B) \to \Box A]$ (акс. дистриб.)
4. $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ (по правилу MP)

Аналогично выводится $\Box(A \wedge B) \to \Box B$.

Модальная логика **K**: пример вывода

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Строим вывод:

1. $A \wedge B \ \to \ A$ (аксиома ИВ)
2. $\Box(A \wedge B \ \to \ A)$ (по правилу Nec)
3. $\Box(A \wedge B \ \to \ A) \ \to \ [\Box(A \wedge B) \to \Box A]$ (акс. дистриб.)
4. $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ (по правилу MP)

Аналогично выводится $\Box(A \wedge B) \to \Box B$.

Пользуясь несколькими шагами вывода в ИВ, получаем:

$$\mathbf{K} \vdash \ \Box(A \wedge B) \to \Box A \wedge \Box B.$$

Установим выводимость: $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \to \Box A$.

Строим вывод:

1. $A \wedge B \;\to\; A$ (аксиома ИВ)
2. $\Box(A \wedge B \;\to\; A)$ (по правилу Nec)
3. $\Box(A \wedge B \;\to\; A) \;\to\; [\Box(A \wedge B) \to \Box A]$ (акс. дистриб.)
4. $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ (по правилу MP)

Аналогично выводится $\Box(A \wedge B) \to \Box B$.

Пользуясь несколькими шагами вывода в ИВ, получаем:

$$\mathbf{K} \vdash \quad \Box(A \wedge B) \to \Box A \wedge \Box B.$$

Упражнение: Выведите в **K** обратную импликацию. Тем самым:

$$\mathbf{K} \vdash \quad \Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B.$$

Теорема о корректности $\mathbf{K}$

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Теорема о корректности $\mathbf{K}$

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

Теорема о корректности $\mathbf{K}$

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.

Теорема о корректности $\mathbf{K}$

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.

Теорема о корректности **K**

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.

Теорема о корректности $\mathbf{K}$

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.

Теорема о корректности **K**

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$*, то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.
Допустим $M, x \models q$. Тогда по 1-му предположению $M, x \models p$, ч.т.д.

Теорема о корректности **K**

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.
Допустим $M, x \models q$. Тогда по 1-му предположению $M, x \models p$, ч.т.д.

б) A есть аксиома дистр.: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

Теорема о корректности **K**

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.
Допустим $M, x \models q$. Тогда по 1-му предположению $M, x \models p$, ч.т.д.

б) A есть аксиома дистр.: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.

Теорема о корректности **K**

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.
Допустим $M, x \models q$. Тогда по 1-му предположению $M, x \models p$, ч.т.д.

б) A есть аксиома дистр.: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Предположим $M, x \models \Box(p \to q)$ и $M, x \models \Box p$.

Теорема о корректности K

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.
Допустим $M, x \models q$. Тогда по 1-му предположению $M, x \models p$, ч.т.д.

б) A есть аксиома дистр.: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Предположим $M, x \models \Box(p \to q)$ и $M, x \models \Box p$. Надо: $M, x \models \Box q$.

Теорема о корректности $\mathbf{K}$

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.
Допустим $M, x \models q$. Тогда по 1-му предположению $M, x \models p$, ч.т.д.

б) A есть аксиома дистр.: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Предположим $M, x \models \Box(p \to q)$ и $M, x \models \Box p$. Надо: $M, x \models \Box q$.
Для этого возьмем любую точку y, такую что xRy, и проверим $M, y \models q$.

Теорема о корректности **K**

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.
Допустим $M, x \models q$. Тогда по 1-му предположению $M, x \models p$, ч.т.д.

б) A есть аксиома дистр.: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Предположим $M, x \models \Box(p \to q)$ и $M, x \models \Box p$. Надо: $M, x \models \Box q$.
Для этого возьмем любую точку y, такую что xRy, и проверим $M, y \models q$.
Имеем: $M, y \models p \to q$ и $M, y \models p$. Тогда очевидно: $M, y \models q$, ч.т.д.

Теорема о корректности **K**

Теорема

Если $\mathbf{K} \vdash A$, *то* A *общезначима на любой шкале.*

Доказательство. Индукцией по построению вывода формулы A.
База индукции: A есть аксиома ИВ или дистрибутивности.

а) A — аксиома ИВ, например, $p \to (q \to p)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Надо проверить: $M, x \models p \to (q \to p)$.
Допустим $M, x \models p$. Надо проверить: $M, x \models q \to p$.
Допустим $M, x \models q$. Тогда по 1-му предположению $M, x \models p$, ч.т.д.

б) A есть аксиома дистр.: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.
Берем любую модель $M = (W, R, V)$ и точку $x \in W$.
Предположим $M, x \models \Box(p \to q)$ и $M, x \models \Box p$. Надо: $M, x \models \Box q$.
Для этого возьмем любую точку y, такую что xRy, и проверим $M, y \models q$.
Имеем: $M, y \models p \to q$ и $M, y \models p$. Тогда очевидно: $M, y \models q$, ч.т.д.

Шаг индукции: правила (MP) и (Nec) – тривиальны. Осталось (Sub). ◁

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$.

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$. Надо проверить: $F \models A'$.

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$.
Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$.

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$. Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$. Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$. Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$. Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

$$M', x \models q \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models q'.$$

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$. Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$. Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

$$M', x \models q \iff M, x \models q'.$$

Утверждение. *Для любой формулы C и точки $x \in W$ имеем:*

$$M', x \models C \iff M, x \models C'.$$

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$. Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$. Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

$$M', x \models q \iff M, x \models q'.$$

Утверждение. *Для любой формулы C и точки $x \in W$ имеем:*

$$M', x \models C \iff M, x \models C'.$$

Док-во: *очевидная индукция по построению формулы C.*

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$.
Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$.
Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

$$M', x \models q \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models q'.$$

Утверждение. *Для любой формулы C и точки $x \in W$ имеем:*

$$M', x \models C \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models C'.$$

Док-во: *очевидная индукция по построению формулы C.*

Вернемся к доказательству леммы:

Пусть $F \models A$. Почему $F \models A'$?

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$. Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$. Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

$$M', x \models q \quad \iff \quad M, x \models q'.$$

Утверждение. *Для любой формулы C и точки $x \in W$ имеем:*

$$M', x \models C \quad \iff \quad M, x \models C'.$$

Док-во: *очевидная индукция по построению формулы C.*

Вернемся к доказательству леммы:

Пусть $F \models A$. Почему $F \models A'$?

Берем любую модель $M = (F, V)$. Почему $M \models A'$?

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$.
Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$.
Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

$$M', x \models q \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models q'.$$

Утверждение. *Для любой формулы C и точки $x \in W$ имеем:*

$$M', x \models C \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models C'.$$

Док-во: *очевидная индукция по построению формулы C.*

Вернемся к доказательству леммы:

Пусть $F \models A$. Почему $F \models A'$?
Берем любую модель $M = (F, V)$. Почему $M \models A'$?
По M строим M'.

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$.
Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$.
Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

$$M', x \models q \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models q'.$$

Утверждение. *Для любой формулы C и точки $x \in W$ имеем:*

$$M', x \models C \quad \Longleftrightarrow \quad M, x \models C'.$$

Док-во: *очевидная индукция по построению формулы C.*

Вернемся к доказательству леммы:

Пусть $F \models A$. Почему $F \models A'$?
Берем любую модель $M = (F, V)$. Почему $M \models A'$?
По M строим M'.
Поскольку модель M' — тоже над шкалой F, то $M' \models A$.

Лемма (Корректность правила (Sub))

Пусть F — шкала. Если $F \models A$, то $F \models A[p := B]$.

Доказательство. Пусть $F \models A$. Будем обозначать $C' := C[p := B]$. Надо проверить: $F \models A'$. Берем любую оценку V на F и $M := (F, V)$. Построим другую оценку V' и модель $M' = (F, V')$, положив:

$$M', x \models q \quad \iff \quad M, x \models q'.$$

Утверждение. *Для любой формулы C и точки $x \in W$ имеем:*

$$M', x \models C \quad \iff \quad M, x \models C'.$$

Док-во: *очевидная индукция по построению формулы C.*

Вернемся к доказательству леммы:

Пусть $F \models A$. Почему $F \models A'$?
Берем любую модель $M = (F, V)$. Почему $M \models A'$?
По M строим M'.
Поскольку модель M' — тоже над шкалой F, то $M' \models A$.
По **Утв.** получаем $M \models A'$, ч.т.д.

Модальные логики

Определение

$L \subseteq \mathrm{Fm}$ — нормальная модальная логика, если
– L содержит все аксиомы логики $\mathbf{K}$,
– L замкнуто по трем правилам (MP), (Nec), (Sub).

Определение

$L \subseteq \mathrm{Fm}$ — нормальная модальная логика, если
– L содержит все аксиомы логики $\mathbf{K}$,
– L замкнуто по трем правилам (MP), (Nec), (Sub).

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — произвольное множество формул.
Через $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ обозначают минимальную (нормальную) логику, содержащую Γ.
То есть к аксиомам исчисления $\mathbf{K}$ добавили новые аксиомы (из Γ).

Модальные логики

Определение

$L \subseteq \mathrm{Fm}$ — нормальная модальная логика, если
– L содержит все аксиомы логики $\mathbf{K}$,
– L замкнуто по трем правилам (MP), (Nec), (Sub).

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — произвольное множество формул.
Через $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ обозначают минимальную (нормальную) логику, содержащую Γ.
То есть к аксиомам исчисления $\mathbf{K}$ добавили новые аксиомы (из Γ).

Всякую нормальную логику L можно считать заданной как $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Достаточно в качестве Γ взять L или $L \setminus \mathbf{K}$ или еще более узкое множество формул, достаточное для выведения всех формул L.

Теорема о корректности для любых нормальных логик

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Если $L \vdash A$, то в любой шкале F, такой что $F \models \Gamma$, имеем $F \models A$.

Теорема о корректности для любых нормальных логик

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Если $L \vdash A$, то в любой шкале F, такой что $F \models \Gamma$, имеем $F \models A$.

Доказательство. Возьмем $C_1, \ldots, C_n$ — вывод формулы A из L.
Возьмем любую шкалу F, такую что $F \models \Gamma$.

Теорема о корректности для любых нормальных логик

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Если $L \vdash A$, то в любой шкале F, такой что $F \models \Gamma$, имеем $F \models A$.

Доказательство. Возьмем $C_1, \ldots, C_n$ — вывод формулы A из L. Возьмем любую шкалу F, такую что $F \models \Gamma$. Мы утверждаем, что $F \models C_i$ для каждого $i \leqslant n$.

Теорема о корректности для любых нормальных логик

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Если $L \vdash A$, то в любой шкале F, такой что $F \models \Gamma$, имеем $F \models A$.

Доказательство. Возьмем $C_1, \ldots, C_n$ — вывод формулы A из L.
Возьмем любую шкалу F, такую что $F \models \Gamma$. Мы утверждаем, что $F \models C_i$ для каждого $i \leqslant n$.
Для C_i — аксиом $\mathbf{K}$ это доказано выше.

Теорема о корректности для любых нормальных логик

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Если $L \vdash A$, то в любой шкале F, такой что $F \models \Gamma$, имеем $F \models A$.

Доказательство. Возьмем $C_1, \ldots, C_n$ — вывод формулы A из L.
Возьмем любую шкалу F, такую что $F \models \Gamma$. Мы утверждаем, что $F \models C_i$ для каждого $i \leqslant n$.
Для C_i — аксиом $\mathbf{K}$ это доказано выше.
Для C_i — формул из Γ это дано по условию.

Теорема о корректности для любых нормальных логик

Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$.
Если $L \vdash A$, то в любой шкале F, такой что $F \models \Gamma$, имеем $F \models A$.

Доказательство. Возьмем $C_1, \ldots, C_n$ — вывод формулы A из L.
Возьмем любую шкалу F, такую что $F \models \Gamma$. Мы утверждаем, что $F \models C_i$ для каждого $i \leqslant n$.
Для C_i — аксиом $\mathbf{K}$ это доказано выше.
Для C_i — формул из Γ это дано по условию.
Для C_i, полученному по правилу вывода, это доказано выше. $\triangleleft$

Добавляем к **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Упражнение 1. $F \models \Box p \to \Diamond p \Leftrightarrow$ *отношение* R *сериально.*
и аналогично для остальных строчек таблицы.

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Упражнение 1. $F \models \Box p \to \Diamond p \Leftrightarrow$ *отношение* R *сериально.*
и аналогично для остальных строчек таблицы.
Упражнение 2. Установите взаимосвязи между свойствами R:
(a) симм. + транз. $\Rightarrow$ евклидовость
(б) рефл. + евкл. $\Rightarrow$ симметричность и транзитивность

«Традиционные» модальные логики

Добавляем к **K** модальные формулы в качестве аксиом:

(D)	*сериальность*	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x \exists y\,(xRy)$
(T)	*рефлексивность*	$\Box p \to p$	$\forall x\,(xRx)$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall xy\,(xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	*транзитивность*	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall xyz\,(xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Упражнение 1. $F \models \Box p \to \Diamond p \Leftrightarrow$ *отношение* R *сериально.*
и аналогично для остальных строчек таблицы.

Упражнение 2. Установите взаимосвязи между свойствами R:
(а) симм. + транз. $\Rightarrow$ евклидовость
(б) рефл. + евкл. $\Rightarrow$ симметричность и транзитивность

Упражнение 3. Модальная логика знает об этих взаимосвязях!
(а) $\mathbf{K} \oplus \{B, 4\} \vdash 5$,
(б) $\mathbf{K} \oplus \{T, 5\} \vdash B \wedge 4$,
и так далее.