

Модальная логика. Лекция 1: Введение (логика раскрасок графов)

Евгений Золин

Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико-математический факультет
МГУ имени М.В. Ломоносова

25 сентября 2020 года

О чём говорят на модальном языке?

Условно, **модальная логика** изучает язык, в котором помимо связок $\&$, \vee , \neg , \rightarrow , есть две новые: \square («необходимо») и \diamond («возможно»).

О чём говорят на модальном языке?

Условно, **модальная логика** изучает язык, в котором помимо связок $\&$, \vee , \neg , \rightarrow , есть две новые: \Box («необходимо») и \Diamond («возможно»).
Всегда принимаем закон: $\Box A \leftrightarrow \neg \Diamond \neg A$ и наоборот.

О чём говорят на модальном языке?

Условно, **модальная логика** изучает язык, в котором помимо связок $\&$, \vee , \neg , \rightarrow , есть две новые: \Box («необходимо») и \Diamond («возможно»).
Всегда принимаем закон: $\Box A \leftrightarrow \neg \Diamond \neg A$ и наоборот.

О каких понятиях можно говорить?

Каковы законы этих понятий?

О чём говорят на модальном языке?

- **алетическая** логика: философские понятия «необходимо», «возможно», «случайно» (возможно A и возможно $\neg A$).

О чём говорят на модальном языке?

- **алетическая** логика: философские понятия «необходимо», «возможно», «случайно» (возможно A и возможно $\neg A$).
Один из законов: $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.

О чём говорят на модальном языке?

- **алетическая** логика: философские понятия «необходимо», «возможно», «случайно» (возможно A и возможно $\neg A$).
Один из законов: $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.
- **эпистемическая** логика:
 $\Box A$ — «агент знает, что истинно A »,
 $\Diamond A$ — «агент допускает, что истинно A ».

О чём говорят на модальном языке?

- **алетическая** логика: философские понятия «необходимо», «возможно», «случайно» (возможно A и возможно $\neg A$).

Один из законов: $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.

- **эпистемическая** логика:

$\Box A$ — «агент знает, что истинно A »,

$\Diamond A$ — «агент допускает, что истинно A ».

Некоторые законы: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$, $\neg \Box A \rightarrow \Box \neg \Box A$, $\Box A \rightarrow A$.

О чём говорят на модальном языке?

- **алетическая** логика: философские понятия «необходимо», «возможно», «случайно» (возможно A и возможно $\neg A$).
Один из законов: $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.
- **эпистемическая** логика:
 $\Box A$ — «агент знает, что истинно A »,
 $\Diamond A$ — «агент допускает, что истинно A ».
Некоторые законы: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$, $\neg \Box A \rightarrow \Box \neg \Box A$, $\Box A \rightarrow A$.
- **доксастическая** логика:
 $\Box A$ — «агент верит, что A » (хотя A может и не быть истинным),
 $\Diamond A$ — «утверждение A не противоречит убеждениям агента».

О чём говорят на модальном языке?

- **алетическая** логика: философские понятия «необходимо», «возможно», «случайно» (возможно A и возможно $\neg A$).
Один из законов: $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.
- **эпистемическая** логика:
 $\Box A$ — «агент знает, что истинно A »,
 $\Diamond A$ — «агент допускает, что истинно A ».
Некоторые законы: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$, $\neg \Box A \rightarrow \Box \neg \Box A$, $\Box A \rightarrow A$.
- **доксастическая** логика:
 $\Box A$ — «агент верит, что A » (хотя A может и не быть истинным),
 $\Diamond A$ — «утверждение A не противоречит убеждениям агента».
- **деонтическая** логика (логика норм):
 $\Box A$ — «обязательно (по законам), чтобы было A »,
 $\Diamond A$ — «законы разрешают, чтобы было A ».

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

Один из законов (Лёба): $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

Один из законов (Лёба): $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

- **временная** логика:

$\Box A$ — «всегда в будущем будет верно A »,

$\Diamond A$ — «когда-то в будущем будет верно A ».

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

Один из законов (Лёба): $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

- **временная** логика:

$\Box A$ — «всегда в будущем будет верно A »,

$\Diamond A$ — «когда-то в будущем будет верно A ».

Один из законов: $\Diamond(A \& \Box B) \rightarrow \Box(B \vee \Diamond A)$.

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

Один из законов (Лёба): $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

- **временная** логика:

$\Box A$ — «всегда в будущем будет верно A »,

$\Diamond A$ — «когда-то в будущем будет верно A ».

Один из законов: $\Diamond(A \& \Box B) \rightarrow \Box(B \vee \Diamond A)$.

Другая модальность: $Until(A, B)$ — «утверждение A истинно (по крайней мере) до момента, когда будет истинно B ».

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

Один из законов (Лёба): $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

- **временная** логика:

$\Box A$ — «всегда в будущем будет верно A »,

$\Diamond A$ — «когда-то в будущем будет верно A ».

Один из законов: $\Diamond(A \& \Box B) \rightarrow \Box(B \vee \Diamond A)$.

Другая модальность: $Until(A, B)$ — «утверждение A истинно (по крайней мере) до момента, когда будет истинно B ».

- **пространственная** логика: $\Box A$ — «утверждение A истинно в некоторой окрестности данной точки».

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

Один из законов (Лёба): $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

- **временная** логика:

$\Box A$ — «всегда в будущем будет верно A »,

$\Diamond A$ — «когда-то в будущем будет верно A ».

Один из законов: $\Diamond(A \& \Box B) \rightarrow \Box(B \vee \Diamond A)$.

Другая модальность: $Until(A, B)$ — «утверждение A истинно (по крайней мере) до момента, когда будет истинно B ».

- **пространственная** логика: $\Box A$ — «утверждение A истинно в некоторой окрестности данной точки».

Топологические пространства.

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

Один из законов (Лёба): $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

- **временная** логика:

$\Box A$ — «всегда в будущем будет верно A »,

$\Diamond A$ — «когда-то в будущем будет верно A ».

Один из законов: $\Diamond(A \& \Box B) \rightarrow \Box(B \vee \Diamond A)$.

Другая модальность: $Until(A, B)$ — «утверждение A истинно (по крайней мере) до момента, когда будет истинно B ».

- **пространственная** логика: $\Box A$ — «утверждение A истинно в некоторой окрестности данной точки».

Топологические пространства.

- **логика программ**, процессов: $\Box_{\alpha} A$ — «всегда после выполнения программы α истинно утверждение A ».

О чём говорят на модальном языке?

- логика **доказуемости**:

$\Box A$ — «утверждение A доказуемо в формальной системе T »,

$\Diamond A$ — «утверждение A непротиворечит формальной системе T ».

Один из законов (Лёба): $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

- **временная** логика:

$\Box A$ — «всегда в будущем будет верно A »,

$\Diamond A$ — «когда-то в будущем будет верно A ».

Один из законов: $\Diamond(A \& \Box B) \rightarrow \Box(B \vee \Diamond A)$.

Другая модальность: *Until*(A, B) — «утверждение A истинно (по крайней мере) до момента, когда будет истинно B ».

- **пространственная** логика: $\Box A$ — «утверждение A истинно в некоторой окрестности данной точки».

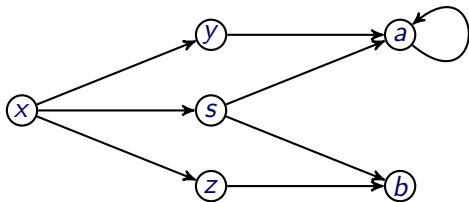
Топологические пространства.

- **логика программ**, процессов: $\Box_{\alpha} A$ — «всегда после выполнения программы α истинно утверждение A ».

Один из законов: $A \& \Box_{\alpha^*}(A \rightarrow \Box_{\alpha} A) \rightarrow \Box_{\alpha^*} A$.

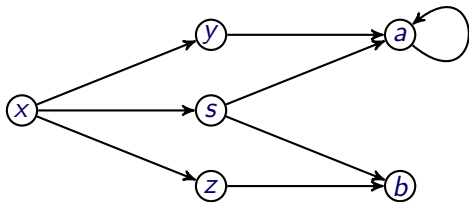
Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

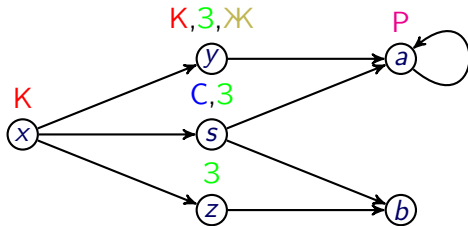
Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

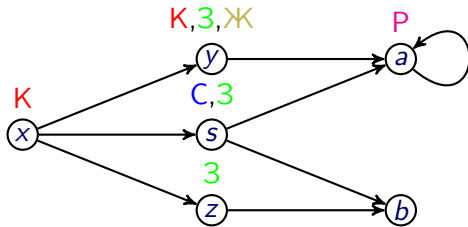
Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.

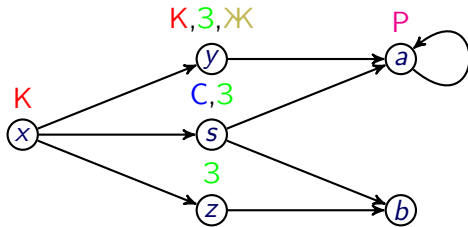


Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Утверждения о графе — записываем, используя:

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



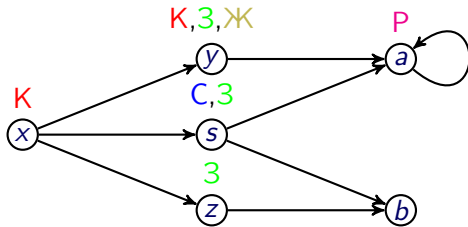
Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Утверждения о графе — записываем, используя:

- буквы для обозначения цветов: **K**, **C**, **3**, **Ж**, **P** и т.д.

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



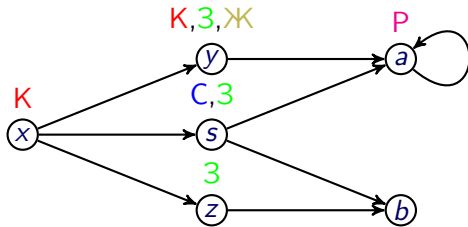
Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Утверждения о графе — записываем, используя:

- буквы для обозначения цветов: **K**, **C**, **3**, **Ж**, **P** и т.д.
- две специальные буквы: \top (истина), \perp (ложь)

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



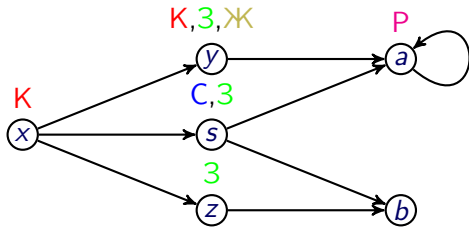
Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Утверждения о графе — записываем, используя:

- буквы для обозначения цветов: **K**, **C**, **3**, **Ж**, **P** и т.д.
- две специальные буквы: \top (истина), \perp (ложь)
- связки: $\&$ (и), \vee (или), \neg (не), \rightarrow (если... то...)

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



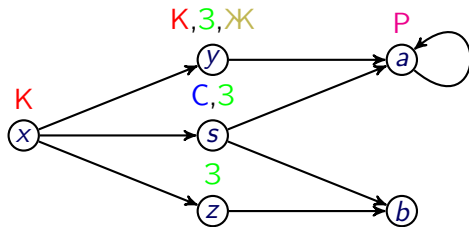
Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Утверждения о графе — записываем, используя:

- буквы для обозначения цветов: K , C , 3 , $Ж$, P и т.д.
- две специальные буквы: \top (истина), \perp (ложь)
- связки: $\&$ (и), \vee (или), \neg (не), \rightarrow (если... то...)
- две «модальности»: \square (у всех соседей), \diamond (у некоторого соседа)

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

- Утв. $\Box A$ верно в вершине x , если у всех ее соседей верно A .
- Утв. $\Diamond A$ верно в вершине x , если у некоторого ее соседа верно A .

Как мы понимаем модальности \square и \diamond на графах

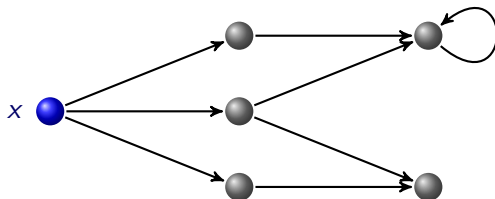
- Граф (не обязательно конечный):

$F = (W, R)$, где W — вершины, $R \subseteq W \times W$ — рёбра.

Как мы понимаем модальности \square и \diamond на графах

- Граф (не обязательно конечный):

$F = (W, R)$, где W — вершины, $R \subseteq W \times W$ — рёбра.

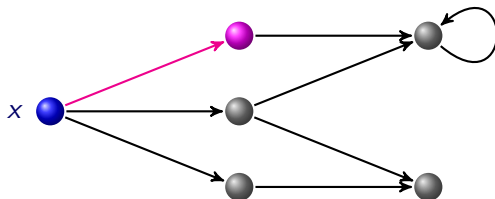


Как мы понимаем модальности \Box и \Diamond на графах

- Граф (не обязательно конечный):

$F = (W, R)$, где W — вершины, $R \subseteq W \times W$ — рёбра.

- утверждение $\Diamond A$ верно в точке x ,
если A верно в **некоторой** точке y , такой что xRy

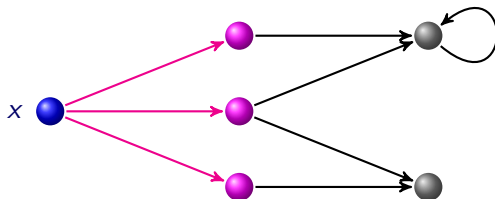


Как мы понимаем модальности \Box и \Diamond на графах

- Граф (не обязательно конечный):

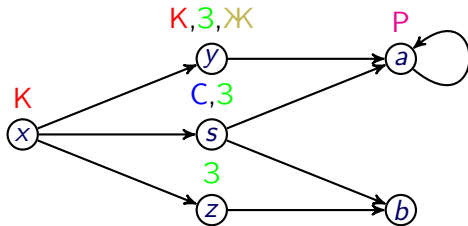
$F = (W, R)$, где W — вершины, $R \subseteq W \times W$ — рёбра.

- утверждение $\Box A$ верно в точке x ,
если A верно в **каждой** точке y , такой что xRy



Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

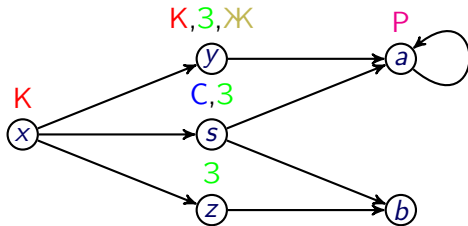
Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.

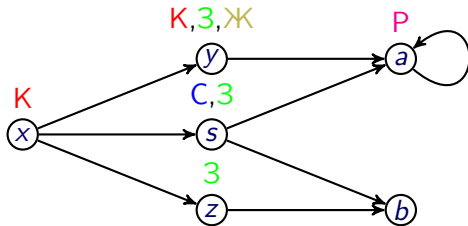


Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Пример утверждения: $K \rightarrow \Box(3 \ \& \ \Diamond P)$

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



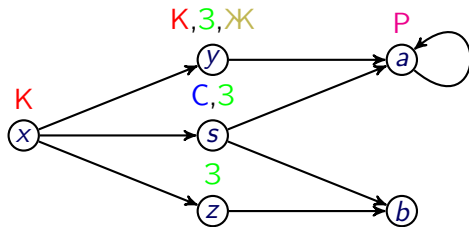
Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Пример утверждения: $K \rightarrow \Box(3 \ \& \ \Diamond P)$

Верно или неверно утверждение в **данной точке** раскрашенного графа?

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

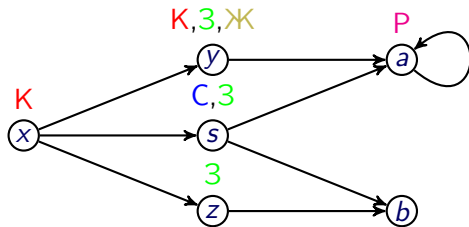
Пример утверждения: $K \rightarrow \Box(3 \ \& \ \Diamond P)$

Верно или неверно утверждение в **данной** точке раскрашенного графа?

Верно ли в точке s утверждение $\Box\Diamond K$?

Модальная логика \approx Логика раскрасок графов

Граф (ориентированный) $F = (W, R)$ — набор вершин и ребер.



Раскрашенный граф $M = (W, R, V)$ — вершинам припишем цвета.

Пример утверждения: $K \rightarrow \Box(3 \ \& \ \Diamond P)$

Верно или неверно утверждение в **данной точке** раскрашенного графа?

Верно ли в точке s утверждение $\Box\Diamond K?$ $\Diamond\Box K?$

Вопросы про утверждения о раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

Вопросы про утверждения о раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

- **Дано:**

- 1) конечный раскрашенный граф $M = (W, R, V)$,
- 2) его вершина $x \in W$,
- 3) утверждение A .

Узнать: Верно ли утверждение A в вершине x графа M ?

Вопросы про утверждения о раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

- Дано:

- 1) конечный раскрашенный граф $M = (W, R, V)$,
- 2) его вершина $x \in W$,
- 3) утверждение A .

Узнать: Верно ли утверждение A в вершине x графа M ?

Проблема разрешима! (то есть алгоритм существует)

Вопросы про утверждения о раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

- **Дано:**

- 1) конечный раскрашенный граф $M = (W, R, V)$,
- 2) его вершина $x \in W$,
- 3) утверждение A .

Узнать: Верно ли утверждение A в вершине x графа M ?

Проблема разрешима! (то есть алгоритм существует)

- **Дано:** конечный раскрашенный граф M и утверждение A .

Вопросы про утверждения о раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

- **Дано:**

- 1) конечный раскрашенный граф $M = (W, R, V)$,
- 2) его вершина $x \in W$,
- 3) утверждение A .

Узнать: Верно ли утверждение A в вершине x графа M ?

Проблема разрешима! (то есть алгоритм существует)

- **Дано:** конечный раскрашенный граф M и утверждение A .

Узнать: Верно ли утверждение A во всех точках графа M ?

Вопросы про утверждения о раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

- **Дано:**

- 1) конечный раскрашенный граф $M = (W, R, V)$,
- 2) его вершина $x \in W$,
- 3) утверждение A .

Узнать: Верно ли утверждение A в вершине x графа M ?

Проблема разрешима! (то есть алгоритм существует)

- **Дано:** конечный раскрашенный граф M и утверждение A .

Узнать: Верно ли утверждение A во всех точках графа M ?

Проблема разрешима!

Вопросы про сравнение точек в раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

- ① **Дано:** конечный раскрашенный граф M и две его точки $x, y \in W$.
Узнать: В точках x и y истинны одни и те же утверждения?

Вопросы про сравнение точек в раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

① **Дано:** конечный раскрашенный граф M и две его точки $x, y \in W$.

Узнать: В точках x и y истинны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема?

Вопросы про сравнение точек в раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

① **Дано:** конечный раскрашенный граф M и две его точки $x, y \in W$.

Узнать: В точках x и y истинны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема? Теория говорит: да!

Вопросы про сравнение точек в раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

- 1 **Дано:** конечный раскрашенный граф M и две его точки $x, y \in W$.
Узнать: В точках x и y истинны одни и те же утверждения?
Разрешима ли эта проблема? Теория говорит: да!
- 2 **Дано:** два конечных раскрашенных графа $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ и по одной точке из них: $x \in W$ и $x' \in W'$.

Вопросы про сравнение точек в раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

① **Дано:** конечный раскрашенный граф M и две его точки $x, y \in W$.

Узнать: В точках x и y истинны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема? Теория говорит: да!

② **Дано:** два конечных раскрашенных графа $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ и по одной точке из них: $x \in W$ и $x' \in W'$.

Узнать: В точке x графа M и в точке x' графа M' верны одни и те же утверждения?

Вопросы про сравнение точек в раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

① **Дано:** конечный раскрашенный граф M и две его точки $x, y \in W$.

Узнать: В точках x и y истинны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема? Теория говорит: да!

② **Дано:** два конечных раскрашенных графа $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ и по одной точке из них: $x \in W$ и $x' \in W'$.

Узнать: В точке x графа M и в точке x' графа M' верны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема?

Вопросы про сравнение точек в раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

① **Дано:** конечный раскрашенный граф M и две его точки $x, y \in W$.

Узнать: В точках x и y истинны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема? Теория говорит: да!

② **Дано:** два конечных раскрашенных графа $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ и по одной точке из них: $x \in W$ и $x' \in W'$.

Узнать: В точке x графа M и в точке x' графа M' верны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема? Тоже да.

Вопросы про сравнение точек в раскрашенных графах

Соглашение:

Букв для обозначения цветов — конечное число, например,

$$\{K, C, Z, Ж, P\}.$$

- ① **Дано:** конечный раскрашенный граф M и две его точки $x, y \in W$.

Узнать: В точках x и y истинны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема? Теория говорит: да!

- ② **Дано:** два конечных раскрашенных графа $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ и по одной точке из них: $x \in W$ и $x' \in W'$.

Узнать: В точке x графа M и в точке x' графа M' верны одни и те же утверждения?

Разрешима ли эта проблема? Тоже да.

Наблюдение: Предыдущие две проблемы «равносильны»: алгоритм для одной даёт алгоритм для решения другой.

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1 **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1 **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .
Узнать: Утверждение A является законом графа F ?

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1 **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .
Узнать: Утверждение A является законом графа F ?
Разрешима ли эта проблема?

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

① **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .

Узнать: Утверждение A является законом графа F ?

Разрешима ли эта проблема? Да! (перебор раскрасок графа)

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1 **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .
Узнать: Утверждение A является законом графа F ?
Разрешима ли эта проблема? Да! (перебор раскрасок графа)
- 2 **Дано:** два конечных графа $F = (W, R)$ и $F' = (W', R')$.

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1 **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .
Узнать: Утверждение A является законом графа F ?
Разрешима ли эта проблема? Да! (перебор раскрасок графа)
- 2 **Дано:** два конечных графа $F = (W, R)$ и $F' = (W', R')$.
Узнать: У графов F и F' одни и те же законы?

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1** **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .
Узнать: Утверждение A является законом графа F ?
Разрешима ли эта проблема? Да! (перебор раскрасок графа)
- 2** **Дано:** два конечных графа $F = (W, R)$ и $F' = (W', R')$.
Узнать: У графов F и F' одни и те же законы?
Разрешима ли эта проблема?

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1** **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .
Узнать: Утверждение A является законом графа F ?
Разрешима ли эта проблема? Да! (перебор раскрасок графа)
- 2** **Дано:** два конечных графа $F = (W, R)$ и $F' = (W', R')$.
Узнать: У графов F и F' одни и те же законы?
Разрешима ли эта проблема? Да! (док-во непростое)

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1 **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .
Узнать: Утверждение A является законом графа F ?
Разрешима ли эта проблема? Да! (перебор раскрасок графа)
- 2 **Дано:** два конечных графа $F = (W, R)$ и $F' = (W', R')$.
Узнать: У графов F и F' одни и те же законы?
Разрешима ли эта проблема? Да! (док-во непростое)
- 3 Можно ввести понятие « A — закон данной точки x графа F ».

Законы раскрасок графа

Число букв для обозначения цветов **любое** (конечное или бесконечное).
Дан конечный ориентированный граф $F = (W, R)$.

Определение

Закон графа F — это утверждение A , верное при любой раскраске графа F в каждой его точке x .

- 1 **Дано:** конечный граф $F = (W, R)$ и утверждение A .
Узнать: Утверждение A является законом графа F ?
Разрешима ли эта проблема? Да! (перебор раскрасок графа)
- 2 **Дано:** два конечных графа $F = (W, R)$ и $F' = (W', R')$.
Узнать: У графов F и F' одни и те же законы?
Разрешима ли эта проблема? Да! (док-во непростое)
- 3 Можно ввести понятие « A — закон данной точки x графа F ».
Как узнать, что у точек x и y графа F одни и те же законы?

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Что значит «получается»?

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Что значит «получается»? Варианты определения:

- 1 фраза «из утверждения A следует на (конечных) графах утверждение B » — означает: для всякого графа G , если A является законом графа G , то и B является законом графа G .

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Что значит «получается»? Варианты определения:

- 1 фраза «из утверждения A следует на (конечных) графах утверждение B » — означает: для всякого графа G , если A является законом графа G , то и B является законом графа G .
Как проверять?

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Что значит «получается»? Варианты определения:

- 1 фраза «из утверждения A следует на (конечных) графах утверждение B » — означает: для всякого графа G , если A является законом графа G , то и B является законом графа G .
Как проверять?
- 2 Из утверждения A можно **вывести** (доказать) утверждение B , если можно построить «рассуждение» — последовательность утверждений, в которых используется A и законы **всех графов**, можно использовать правило логики (если φ и $\varphi \rightarrow \psi$, то ψ), можно приписывать слева к утверждению \square , и можно подставлять вместо букв другие утверждения.

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Что значит «получается»? Варианты определения:

- 1 фраза «из утверждения A следует на (конечных) графах утверждение B » — означает: для всякого графа G , если A является законом графа G , то и B является законом графа G .
Как проверять?
- 2 Из утверждения A можно **вывести** (доказать) утверждение B , если можно построить «рассуждение» — последовательность утверждений, в которых используется A и законы **всех графов**, можно использовать правило логики (если φ и $\varphi \rightarrow \psi$, то ψ), можно приписывать слева к утверждению \square , и можно подставлять вместо букв другие утверждения.

Есть ли алгоритм проверки этой «доказуемости»?

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Теория гласит:

Теорема

У каждого *конечного* графа $F = (W, R)$ есть **главный закон**.

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Теория гласит:

Теорема

У каждого *конечного* графа $F = (W, R)$ есть **главный закон**.

Проблема 1:

- 1 Как по конечному графу F выписать его главный закон?
- 2 Сколько потребуется алгоритму времени и памяти?
- 3 Сколько минимально (букв для) цветов для главного закона?
- 4 Какова минимальная длина главного закона графа F ?

Главный закон графа (нераскрашенного)

Определение

Главный закон графа $F = (W, R)$ — это такой закон A_0 графа F , что из него «получается» (следует) любой другой закон графа F .

Теория гласит:

Теорема

У каждого *конечного* графа $F = (W, R)$ есть **главный закон**.

Проблема 1:

- 1 Как по конечному графу F выписать его главный закон?
- 2 Сколько потребуется алгоритму времени и памяти?
- 3 Сколько минимально (букв для) цветов для главного закона?
- 4 Какова минимальная длина главного закона графа F ?

Проблема 2: Можно ли (хотя бы) по графу F и утверждению A узнать, что A — главный закон графа F ?

Вариации и обобщения

Что будет с ответами на все предыдущие вопросы, если:

Вариации и обобщения

Что будет с ответами на все предыдущие вопросы, если:

- 1 Разрешить бесконечные графы: счетные и далее?

Вариации и обобщения

Что будет с ответами на все предыдущие вопросы, если:

- 1 Разрешить бесконечные графы: счетные и далее?
- 2 Позволить ходить по ребрам в обратную сторону: \boxplus и \boxminus .

Вариации и обобщения

Что будет с ответами на все предыдущие вопросы, если:

- 1 Разрешить бесконечные графы: счетные и далее?
- 2 Позволить ходить по ребрам в обратную сторону: \square и \diamond .
- 3 Раскрашивать не только вершины, но и рёбра?

Вариации и обобщения

Что будет с ответами на все предыдущие вопросы, если:

- 1 Разрешить бесконечные графы: счетные и далее?
- 2 Позволить ходить по ребрам в обратную сторону: \boxplus и \boxminus .
- 3 Раскрашивать не только вершины, но и рёбра?
Разноцветные модальности: $\{\square, \square, \square, \square, \dots\}$.

Вариации и обобщения

Что будет с ответами на все предыдущие вопросы, если:

- 1 Разрешить бесконечные графы: счетные и далее?
- 2 Позволить ходить по ребрам в обратную сторону: \boxplus и \boxminus .
- 3 Раскрашивать не только вершины, но и рёбра?
Разноцветные модальности: $\{\square, \square, \square, \square, \dots\}$.
- 4 Что если разрешить другие виды модальностей?
 - универсальная модальность ($R = W \times W$),
 - транзитивное замыкание \boxplus ,
 - номиналы («гибридные» логики).

Вариации и обобщения

Что будет с ответами на все предыдущие вопросы, если:

- 1 Разрешить бесконечные графы: счетные и далее?
- 2 Позволить ходить по ребрам в обратную сторону: \boxplus и \boxminus .
- 3 Раскрашивать не только вершины, но и рёбра?
Разноцветные модальности: $\{\square, \square, \square, \square, \dots\}$.
- 4 Что если разрешить другие виды модальностей?
 - универсальная модальность ($R = W \times W$),
 - транзитивное замыкание \boxplus ,
 - номиналы («гибридные» логики).
- 5 Если разрешить бесконечные конъюнкции и дизъюнкции — будет ли каждая (бесконечная) шкала иметь главный закон?

Вариации и обобщения

Что будет с ответами на все предыдущие вопросы, если:

- 1 Разрешить бесконечные графы: счетные и далее?
- 2 Позволить ходить по ребрам в обратную сторону: \boxplus и \boxminus .
- 3 Раскрашивать не только вершины, но и рёбра?
Разноцветные модальности: $\{\square, \square, \square, \square, \dots\}$.
- 4 Что если разрешить другие виды модальностей?
 - универсальная модальность ($R = W \times W$),
 - транзитивное замыкание \boxplus ,
 - номиналы («гибридные» логики).
- 5 Если разрешить бесконечные конъюнкции и дизъюнкции — будет ли каждая (бесконечная) шкала иметь главный закон?

Не затронутые нами вопросы:

- Каковы законы всех (конечных) графов?
- Можно ли по утверждению узнать, что оно — закон всех графов?