с/к «Модальная логика» (весна 2020): Задачи

Лектор: с.н.с. Е.Е.Золин

Задачи на «4» (надо решить задачу из билета, если не решали ее в осеннем семестре)

1. Найдите условие на шкалу $F = (W, R)$, то есть на отношение R, необходимое и достаточное для того, чтобы[1] $\mathsf{Logic}(F) \subseteq \mathbf{Ver}$. Разрешимо ли это условие для конечных шкал?
2. Верно ли включение:[2] $\mathsf{Logic}(\mathbb{N}, \gtrdot) \subseteq \mathbf{Triv}$? Здесь $m \gtrdot n \iff m = n + 1$.
3. **а)** Постройте все одноточечные *бимодальные* шкалы $F = (W, R, S)$. **б)** Предъявите пример бимодальной шкалы, логика которой не содержится в логике ни одной из шкал из пункта а).
   Тем самым для бимодального языка не верна даже *слабая теорема Макинсона*.
4. **а)** Объясните сначала тривиальный факт: множество всех подмножеств данного множества W с $|W| = n$ элементами можно породить n множествами (то есть выбрать n подмножеств $X_1, \ldots, X_n \subseteq W$, из которых с помощью пересечения, объединения и дополнения можно породить все подмножества W). **б)** Докажите, что эту оценку можно экспоненциально улучшить. Для простоты рассмотрите множество W с числом элементов, равным степени двойки: $|W| = n = 2^k$, $k \geqslant 1$. Предъявите k множеств $Y_1, \ldots, Y_k$, порождающих все подмножества W. **в)** Что делать в случае, если $|W| = n$ — не степень двойки?
   Из этого несложным рассуждением следует, что в характеристической формуле $\chi_{\mathsf{set}}(F)$ достаточно использовать не 2^n переменных P_X, $X \subseteq W$, а как минимум экспоненциально меньше.
5. Следующие конечные шкалы неизоморфны. Согласно общей теории, тогда их модальные логики различны и даже не сравнимы по включению. Для каких-нибудь $i \neq j$ найдите формулу A, такую что $F_i \models A$, но $F_j \not\models A$, и наоборот. Шкалы $F_i = (W, R_i)$, где $W = \{a, b, c\}$, отношения R_i таковы:
   1) $R_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\} \cup \{\langle a, a\rangle\}$;
   2) $R_2 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\} \cup \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$;
   3) $R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\} \cup \{\langle b, a\rangle\}$;
   4) $R_4 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\} \cup \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$;
   5) $R_5 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\} \cup \{\langle a, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$;
   6) $R_6 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle\} \cup \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, b\rangle\}$.

Задачи на «5» (решите любую из этих задач на выбор студента)

6. Решите задачу 5 для трех пар шкал (на выбор). *Если не решали осенью*
7. **а)** Найдите условие на шкалу $F = (W, R)$, то есть на отношение R, необходимое и достаточное для того, чтобы $\mathsf{Logic}(F) \subseteq \mathbf{Triv}$. **б)** Разрешимо ли это условие для конечных шкал? **в)*** Является ли это условие элементарным, то есть выразимым (быть может бесконечным) множеством замкнутых формул первого порядка в сигнатуре $\{R, =\}$? (над всеми / над конечными шкалами)

[1] Напоминание: $\mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top)$ — логика одноточечной иррефлексивной шкалы.
[2] Напоминание: $\mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$ — логика одноточечной рефлексивной шкалы.

8. Выяснить включения между логиками $L_n = \mathsf{Logic}(F_n)$, где $n \geqslant 2$, а также логиками $\bigcap_{n\geqslant 2} L_n$ и L_ω, для следующих шкал: (*пункт на выбор*)
   а) F_n — симметричный иррефлексивный цикл из n точек, F_ω — целые числа $\mathbb{Z}$ с отношением: каждое число n видит лишь числа $n-1$ и $n+1$;
   б) F_n — симметричный рефлексивный цикл из n точек; F_ω — аналогично на $\mathbb{Z}$.

9. Докажите, что всякая нормальная логика L либо содержится в **Ver**, либо содержит $\mathsf{KD} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$, то есть $L \vdash \Diamond\top$. Значит, логика **Ver** образует *расщепление* решетки всех нормальных логик.

10. Убедитесь, что логика **Triv** ***не дает*** расщепления решетки всех нормальных логик. Говоря проще, докажите, что среди логик, ***не*** содержащихся в **Triv**, нет наименьшей. Один из способов это сделать — предъявите убывающую последовательность логик, не содержащихся в **Triv**, такую что пересечение этих логик содержится в **Triv**.

11. Убедитесь, однако, что логика **Triv** дает расщепление решетки всех нормальных *транзитивных* логик — найдите такую логику $L_0 = \mathsf{K4} \oplus A$, что всякая нормальная логика над $\mathsf{K4}$ либо содержится в **Triv**, либо содержит L_0.

12. Постройте множество замкнутых модальных формул Γ, каждое конечное подмножество которого $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в некоторой *конечной* шкале, а всё Γ не выполнимо ни в какой *конечной* шкале.

13. Постройте множество замкнутых модальных формул Γ, каждое конечное подмножество которого $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в некоторой **GL**-шкале,[3] а всё Γ не выполнимо ни в какой **GL**-шкале.

14. **а)** Постройте конечную, но не модально различимую модель M, в которой $M \models \Box A \to A$ для всех модальных формул A, но $F \not\models \Box p \to p$, то есть шкала F не является рефлексивной.
    б) Придумайте бесконечную модально различимую модель M с аналогичными свойствами (или докажите, что ее не существует).

    Как мы помним, если модель M и конечна, и модально различима, то такого быть не могло: если в M истинны все подстановочные примеры некоторой формулы B, то в F общезначима B. Эта задача показывает, что оба условия существенны.

[3] Напомним, **GL**-шкалами являются транзитивные шкалы без бесконечно возарастающих цепей.