# Спецкурс «Модальная логика» (осень 2019): Задачи

Лектор: с.н.с. Е.Е.Золин

**Задачи на «4» (надо решить задачу, имеющуюся в билете)**

1. Найдите условие на шкалу $F = (W, R)$, то есть на отношение $R$, необходимое и достаточное для того, чтобы[1] $\mathsf{Logic}(F) \subseteq \mathbf{Ver}$. Разрешимо ли это условие для конечных шкал?
2. Верно ли включение:[2] $\mathsf{Logic}(\mathbb{N}, \gtrdot) \subseteq \mathbf{Triv}$? Здесь $m \gtrdot n \;\leftrightharpoons\; m = n + 1$.
3. Пусть $\Gamma, \Delta \subseteq \mathsf{Fm}$. Обозначим $\Box^*\Gamma \vee \Box^*\Delta := \{\, \Box^m B \vee \Box^n C \mid m, n \geqslant 0,\ B \in \Gamma,\ C \in \Delta \,\}$.
Докажите эквивалентность: $\Gamma \vdash^{*}_{L} A$ и $\Delta \vdash^{*}_{L} A \iff \Box^*\Gamma \vee \Box^*\Delta \vdash_L A$. Можно ли справа написать $\vdash^{*}_{L}$?
4. Пусть $A_n$ — приведенная ниже формула (*выберите любой пункт*). Для $\alpha \subseteq \mathbb{N}$ рассмотрим логику $\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{K} \oplus \{A_n \mid n \in \alpha\}$. Докажите: 1) логика $\mathbf{K}_\alpha$ полна; 2*) (на «5») этих логик континуум?
**а)** $p \to \Box^n p$, **б)** $\Box^n p \to p$, **в)** $\Box p \to \Box^n p$, **г)** $\Box^n p \to \Box p$; **д)** $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$. Всюду $n \geqslant 0$.
5. Следующие конечные шкалы неизоморфны. Согласно общей теории, тогда их модальные логики различны и даже не сравнимы по включению. Для каких-нибудь $i \neq j$ найдите формулу $A$, такую что $F_i \models A$, но $F_j \not\models A$, и наоборот. Шкалы $F_i = (W, R_i)$, где $W = \{a, b, c\}$, отношения $R_i$ таковы:
**1)** $R_1 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle a,a\rangle\}$;
**2)** $R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$;
**3)** $R_3 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle b,a\rangle\}$;
**4)** $R_4 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle\}$;
**5)** $R_5 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle a,a\rangle, \langle c,b\rangle\}$;
**6)** $R_6 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,b\rangle\}$.

**Задачи на «5» (решите любую из предложенных задач на выбор студента)**

6. Решите задачу 5 для трех непересекающихся пар шкал (на выбор).
7. В задаче 4 (*выберите пункт*) ответьте: логик $\mathbf{K}_\alpha$ счетное число или континуум? а, б решены!
8. **а)** Найдите условие на шкалу $F = (W, R)$, то есть на отношение $R$, необходимое и достаточное для того, чтобы $\mathsf{Logic}(F) \subseteq \mathbf{Triv}$. **б)** Разрешимо ли это условие для конечных шкал? **в)*** Является ли это условие элементарным, то есть выразимым (быть может бесконечным) множеством замкнутых формул первого порядка в сигнатуре $\{R, =\}$? (над всеми / над конечными шкалами)
9. **а)** Пусть $\mathsf{Theory}(M)$ — не просто нормальная теория, а нормальная логика, то есть замкнута относительно правила ($\mathsf{Sub}$). Тогда $\mathsf{Theory}(M)$ содержится в $\mathbf{Triv}$ или в $\mathbf{Ver}$. **б)** Получите следствие:
Теорема Макинсона. *Всякая непротиворечивая нормальная логика содержится в* **Triv** *или в* **Ver**.
10. Выяснить включения между логиками $L_n = \mathsf{Logic}(F_n)$, а также $\bigcap_{n\geqslant 1} L_n$, для следующих шкал:
**а)** $F_n$ — рефлексивный цикл из $n$ точек (*на лекциях был иррефлексивный цикл*);
**б)** $F_n$ — симметричный иррефлексивный цикл из $n$ точек;
**в)** $F_n$ — симметричный рефлексивный цикл из $n$ точек. (*выберите любой пункт*)
11. Постройте множество замкнутых модальных формул $\Gamma$, каждое конечное подмножество которого $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в некоторой *конечной* шкале, а всё $\Gamma$ не выполнимо ни в какой *конечной* шкале.
12. Постройте множество замкнутых модальных формул $\Gamma$, каждое конечное подмножество которого $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в некоторой **GL**-шкале,[3] а всё $\Gamma$ не выполнимо ни в какой **GL**-шкале.
13. Вспомним: если модель $M = (F, V)$ модально различима и конечна, то из $M \models A^*$ (то есть истинности в $M$ всех подстановочных примеров формулы $A$) следует $F \models A$. Рассмотрим $A = (\Box p \to p)$.
**а)** Постройте конечную, но не модально различимую модель $M$, в которой $M \models A^*$, но $F \not\models A$.
**б)** Придумайте бесконечную модально различимую модель $M$, в которой $M \models A^*$, но $F \not\models A$.
14. (*) Рассмотрим модальный язык с *отрицанием отношения*, то есть с операторами $\Box$ и $[\neg]$, где семантика $[\neg]$ задается так (фактически это оператор «бокс» по отношению $\neg R = (W \times W) \setminus R$):
$$M, x \models [\neg]A \quad \leftrightharpoons \quad \forall y\, (\, \neg(xRy) \Rightarrow M, y \models A\,).$$
Через $[\neg]$ выражается «*оператор достаточности*» (называемый также “window operator”):
$$M, x \models \boxplus A \quad \leftrightharpoons \quad \forall y\, (\, M, y \models A \Rightarrow xRy\,).$$
Из определения следует: $\boxplus A \leftrightarrow [\neg]\neg A$. Выражается ли обратно $[\neg]$ через $\boxplus$?

---

[1] Напоминание: $\mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow \top)$ — логика одноточечной иррефлексивной шкалы.
[2] Напоминание: $\mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$ — логика одноточечной рефлексивной шкалы.
[3] Напомним, **GL**-шкалами являются транзитивные шкалы без бесконечно возрастающих цепей.