Модальная логика

с.н.с. Е. Е. Золин
(годовой курс, 2019–2020)

Содержание

1 Преобразования моделей Крипке

Мы установим, что всякая выполнимая модальная формула выполнима в некоторой точке некоторой конечной модели с точными оценками максимальной длины цепей и максимальной степени ветвления вершин, и более того, в модели определенной структуры (дерево). Для этого мы опишем преобразования (интересные сами по себе) модели Крипке, сохраняющие истинность данной нам модальной формулы в данной точке, так что в результате применения этих преобразований мы получим модель с требуемыми свойствами.

Чтобы упростить доказательства по индукции, будем считать, что синтаксис модальных формул задан следующей грамматикой:

$$\bot \ \mid \ p_i \ \mid \ (A \to B) \ \mid \ \Diamond A.$$

Тем самым остальные связки: $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Box$ — будем считать известными сокращениями.

1.1 Уменьшение глубины модели

Определение 1.1. *Модальная глубина* $d(A)$ формулы A определяется по индукции:

$$d(\bot) = 0, \quad d(p_i) = 0, \quad d(A \to B) = \max\{d(A), d(B)\}, \quad d(\Diamond A) = 1 + d(A).$$

Покажем, что для истинности $M, x \models A$ достаточно «изучить» лишь точки модели M, которых можно достичь за $\leqslant d(A)$ шагов из точки x.

Определение 1.2. Пусть $M = (W, R, V)$ — модель. *Конусом* с вершиной x глубины n называем модель $M_x^n = (W', R', V')$, где W' есть множество точек, достижимых из x за не более чем n шагов:

$$W' \ = \ \{y \in W \ \mid \ \exists k \colon 0 \leqslant k \leqslant n, \, \exists x_0, \ldots, x_k \colon \ x_0 = x, \ x_k = y, \ x_i \, R \, x_{i+1} \text{ для всех } 0 \leqslant i < k\};$$

отношение: $R' = R|_{W'} = R \cap (W' \times W')$; оценка: $V'(p) = V(p) \cap W'$. Определение оценки V' можно переписать так: для каждой точки $y \in W'$ и каждой переменной p имеем: $M', y \models p \Leftrightarrow M, y \models p$.

Покажем, что истинность в точке x формул глубины $\leqslant n$ сохраняется при переходе от M к M_x^n.

Лемма 1.3 (О конусах глубины n)**.** *Для всякой формулы A глубины $d(A) \leqslant n$, всякой модели M и всякой точки x имеем: $M, x \models A \Leftrightarrow M_x^n, x \models A$.*

Доказательство. Индукция по построению формулы A. Для переменных утверждение верно по построению оценки V'. Для булевых связок $\bot, \to$ индуктивный переход тривиален. Осталось разобрать случай модальности; удобнее будет рассуждать для $A = \Diamond B$. Очевидно, $d(B) \leqslant n-1$. С одной стороны:

$$M, x \models \Diamond B \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \colon \ x \, R \, y \ \& \ M, y \models B \quad \overset{\text{П.И.}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists y \colon \ x \, R \, y \ \& \ M_y^{n-1}, y \models B.$$

Последний шаг — по предположению индукции. С другой стороны,

$$M_x^n, x \models \Diamond B \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \colon \ x \, R' \, y \ \& \ M_x^n, y \models B \quad \overset{\text{П.И.}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists y \colon \ x \, R \, y \ \& \ (M_x^n)_y^{n-1}, y \models B.$$

В последней эквивалентности, помимо использования предположения индукции (П.И.), мы заменили $x \, R \, y$ на $x \, R' \, y$, поскольку точка x R-видит и R'-видит одни и те же точки (проверьте).

Остается заметить, что $M_y^{n-1} = (M_x^n)_y^{n-1}$. Иными словами, если взять точки, видимые из x за $\leqslant n$ шагов, и среди них выбрать точки, видимые из y за $\leqslant (n-1)$ шагов, то учитывая, что $x \, R \, y$, мы получим в точности точки, видимые в исходной модели из точки y за $\leqslant (n-1)$ шагов; проверьте это. $\Box$

Обозначим через $M_x = (W', R', V')$ *подмодель* модели M, *порожденную точкой* x (или конус с вершиной x). В ней W' есть множество точек, достижимых из x за какое-то конечное число шагов:

$$W' \ = \ \{y \in W \ \mid \ \exists n \geqslant 0 \ \exists x_0, \ldots, x_n \colon \ x_0 = x, \ x_n = y, \ x_i \, R \, x_{i+1} \text{ для всех } 0 \leqslant i < n\};$$

отношение: $R' = R|_{W'} = R \cap (W' \times W')$; оценка: $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Теорема 1.4 (О конусах)**.** $M, x \models A \Longleftrightarrow M_x, x \models A,$ *для любой модальной формулы A.*

Доказательство. Пусть $d(A) = n$. Применяя Лемму о конусах к модели M, имеем $M, x \models A \Leftrightarrow M_x^n, x \models A$. Применяя Лемму о конусах к модели M_x, имеем $M_x, x \models A \Leftrightarrow (M_x)_x^n, x \models A$. Остается заметить, что $M_x^n = (M_x)_x^n$; другими словами, если взять точки, достижимые из x за произвольное конечное число шагов, и из них выбрать точки, достижимые из x за не более чем n шагов, то получатся в точности точки, видимые (в исходной модели) из x за не более чем n шагов. $\Box$

1.2 Развертка модели в дерево

Определение 1.5. Модель $M = (W, R, V)$ называется (ориентированным) *деревом* с *корнем* x, если в каждую точку $y \in W$ ведет, и притом единственный ориентированный путь из точки x.

Пусть $M = (W, R, V)$ — произвольная модель, $x_0 \in W$. Построим модель $M' = (W', R', V')$, являющуюся деревом с корнем α_0 и такую, что в M, x_0 и M', α_0 истинны одни и те же модальные формулы.

Путь (ориентированный, конечный) из точки x_0 в модели M — это конечная последовательность $\alpha = (x_0, \dots, x_n)$ точек $x_i \in W$, где $n \geqslant 0$, в которой $x_i \, R \, x_{i+1}$ для всех $0 \leqslant i < n$.

Строим *развертку* $M' = (W', R', V')$ модели M следующим образом:

- $W' = \{\alpha \mid \alpha \text{ есть путь из точки } x_0\}$;
- для любых $\alpha, \beta \in W'$ полагаем: $\alpha \, R' \, \beta \;\leftrightharpoons\; \beta$ продолжает α на один элемент, то есть $\alpha = (x_0, \dots, x_n)$ и $\beta = (x_0, \dots, x_n, y)$; очевидно, $x_n \, R \, y$;
- обозначим через $e(\alpha)$ конец пути α, то есть если $\alpha = (x_0, \dots, x_n)$, то $e(\alpha) = x_n$;
- оценка: $M', \alpha \models p \leftrightharpoons M, e(\alpha) \models p$. Иными словами, $V'(p) = \{\alpha \in W' \mid e(\alpha) \in V(p)\}$.

Лемма 1.6 (О развертке)**.** $M', \alpha \models A \iff M, e(\alpha) \models A$, *для любой формулы* A.

Доказательство. Индукция по A. Шаг $A = \Diamond B$. Пусть $\alpha = (x_0, \dots, x_n)$, тем самым $e(\alpha) = x_n$.

$M', \alpha \models \Diamond B \iff \exists \beta\colon \alpha \, R' \, \beta$ и $M', \beta \models B$. Последнее равносильно тому, что $\exists y \in W\colon x_n \, R \, y$ и для последовательности $\beta = (x_0, \dots, x_n, y)$ имеет место $M', \beta \models B$.

По предположению индукции, $M', \beta \models B$ равносильно $M, e(\beta) \models B$, то есть $M, y \models B$.

Получили: $\exists y\colon x_n \, R \, y$ и $M, y \models B$. Это и означает $M, x_n \models \Diamond B$, то есть $M, e(\alpha) \models A$. $\square$

Как следствие, получаем теоремы:

Теорема 1.7. *Всякая выполнимая модальная формула выполнима в корне некоторого дерева.*

1.3 Уменьшение ветвления модели

Мы говорим, что модель $M = (W, R, V)$ имеет *ветвление* $\leqslant m$, если каждая точка видит $\leqslant m$ точек, то есть $|R(x)| \leqslant m$ для всех $x \in W$. Обозначим через $\flat(A)$ число символов $\Box$, входящих в формулу A.

Лемма 1.8 (О ветвлении)**.** *Всякая выполнимая формула* A *выполнима в модели ветвления* $\leqslant \flat(A)$.

Доказательство. Индукция по модальной глубине $n = d(A)$ формулы A.

Пусть $M, x \models A$. Поскольку всякую модель можно, пользуясь леммой 1.6, преобразовать в дерево, а у получившегося дерева, пользуясь леммой 1.3, обрезать ветви до глубины $d(A)$, и оба преобразования сохраняют истинность формулы A в точке x, то без ограничения общности можем считать, что модель M уже является деревом глубины $\leqslant d(A)$ с корнем x.

Формула A представляет собой булеву комбинацию некоторых переменных $p_1, \dots, p_r$ и формул, начинающихся с $\Box$; последних $\leqslant \flat(A)$. Перепишем A в виде эквивалентной ей (в логике высказываний) ДНФ (дизъюнктивной нормальной форме), то есть представим в виде $A = D_1 \vee \ldots \vee D_s$, где каждая D_t есть конъюнкция формул вида p, $\neg q$, $\Box B$, $\neg \Box E$, (или, что равносильно, вида $\Diamond C$), где $p, q \in \mathsf{Var}(A)$, а B, E — формулы глубины $< d(A)$.

Поскольку $M, x \models D_1 \vee \ldots \vee D_s$, то существует t такое, что $M, x \models D_t$.

Таким образом, $M, x \models \bigwedge_{i \in I} p_i \;\wedge\; \bigwedge_{j \in J} \neg q_j \;\wedge\; \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_k \wedge \Diamond C_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond C_\ell$, где $\ell \leqslant \flat(A)$.

Значит, $\exists y_1, \dots, y_\ell$ такие, что $x \, R \, y_i$ и $M, y_i \models C_i$. Кроме того, $M, y_i \models B_j$ для всех j.

Преобразуем модель M в модель M', выкинув из нее точки $y \in R(x)$, не принадлежащие $\{y_1, \dots, y_\ell\}$, вместе с порожденными ими подмоделями. Получится модель, у которой в точке x ветвление $\leqslant \flat(A)$.

Обозначим $A_i = C_i \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_k$, где $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Имеем $M', y_i \models A_i$. Очевидно, $d(A_i) < d(A)$. Применим предположение индукции для точек y_i и формул A_i: подмодель, порожденную каждой точкой y_i, можем заменить на модель M'_i, тоже порожденную точкой y_i, имеющую ветвление $\leqslant \flat(A)$ (даже $< \flat(A)$), такую что по-прежнему $M'_i, y_i \models A_i$.

После такой замены модель M' превратится в модель M'', у которой во всех точках ветвление $\leqslant \flat(A)$, а также из точки x по-прежнему достижимы точки $y_1, \dots, y_\ell$, такие что $M'', y_i \models A_i$. Оценка же переменных в точке x не поменялась. Значит, $M'', x \models D_t$ и тем самым $M'', x \models A$. $\square$

1.4 Полнота относительно конечных моделей и разрешимость

Теорема 1.9. *Всякая выполнимая модальная формула A выполнима в корне некоторого дерева глубины $\leqslant d(A)$ и ширины $\leqslant \flat(A)$.*

Напомним, через $\mathsf{Logic}(\mathbb{K})$ мы обозначаем логику класса шкал $\mathbb{K}$, то есть множество модальных формул, общезначимых на всех шкалах из класса $\mathbb{K}$.

Теорема 1.10. Logic(*все шкалы*) $=$ Logic(*иррефлексивные шкалы*) $=$ Logic(*шкалы конечного ветвления*) $=$ Logic(*деревья*) $=$ Logic(*конечные шкалы*) $=$ Logic(*конечные иррефлексивные деревья*).

Доказательство. Если формула A общезначима (на всех шкалах), то она общезначима и на шкалах указанного вида. Если же A не общезначима, то формула $\neg A$ выполнима (в некоторой точке некоторой модели). Тогда с помощью описанных выше преобразований мы можем превратить данную модель в модель указанного вида, в которой по-прежнему будет выполнима формула $\neg A$. Тем самым формула A не общезначима на классе шкал указанного вида. □

Какова логика из предыдущей теоремы, в частности, как ее аксиоматизировать, мы увидим далее.

Теорема 1.11. *Проблема выполнимости модальных формул разрешима.*

Доказательство. По доказанным трем леммам, формула A выполнима тогда и только тогда, когда она выполнима в корне некоторого дерева глубины $\leqslant d(A) =: n$ и ветвления $\leqslant \flat(A) =: m$. Количество точек в такой модели $\leqslant 1 + m + m^2 + \ldots + m^n = f(m, n)$.

Таким образом, алгоритм проверки выполнимости формулы A таков: нужно перебирать всевозможные модели, имеющие $|W| \leqslant f(m, n)$ точек, с оценкой лишь переменных из $\mathsf{Var}(A)$. Таких моделей (попарно неизморфных) лишь конечное число.[1] Если в какой-то из этих моделей в некоторой точке формула A оказалась истинна, то выдаем ответ «да, формула A выполнима». Если же во всех этих моделях формула A ложна, то по доказанным нами результатам A ложна вообще в любой модели, иначе бы ее отрицание было истинно в некоторой модели размера $\leqslant f(m, n)$; поэтому в этом случае мы выдаем ответ «нет, формула A не выполнима». □

Теорема 1.12. *Проблема общезначимости модальных формул разрешима*

Доказательство. Формула A общезначима $\Leftrightarrow$ формула $\neg A$ не является выполнимой. Алгоритм же проверки выполнимости модальных формул существует. □

Таким образом, мы уже знаем, что логика из теоремы 1.10 разрешима.

Примечание. Полный перебор конечных моделей размера $\leqslant f(m, n)$ — чрезвычайно неэффективный алгоритм для проверки выполнимости модальной формулы. Для него, очевидно, требуется даже размер памяти, экспоненциальный (а время — двойная экспонента) от длины $|A|$ записи формулы A. На самом же деле, существует алгоритм проверки выполнимости формулы A, требующий размер памяти, полиномиальный от $|A|$, и даже этот полином не более 2 степени. Как говорят, эта проблема лежит в классе алгоритмических проблем PSpace. Более того, проблема выполнимости модальных формул в некотором смысле является самой сложной среди всех алгоритмических проблем, решаемых с использованием полиномиальной памяти. Как говорят, эта проблема является PSpace-трудной. Принадлежность к классу PSpace плюс ее PSpace-трудность вместе называется так: проблема выполнимости модальных формул является PSpace-полной.

[1] Для определенности, можно перебирать модели, носитель которых имеет вид $W = \{1, \ldots, N\}$, где $N \leqslant f(m, n)$.

2 Выводимость из гипотез и следование из гипотез

Напомним аксиомы и правила вывода **логики K** (назовем это исчисление И1):

- **Аксиомы:**

  – аксиомы исчисления высказываний: 1) $p \to (q \to p)$, и так далее, N) $p \vee \neg p$;

  – $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ — *аксиома дистрибутивности* или *нормальности.*

- **Правила вывода:** $(\mathsf{MP})\ \dfrac{A \quad A \to B}{B}$, $\quad (\mathsf{Nec})\ \dfrac{A}{\Box A}$, $\quad (\mathsf{Sub})\ \dfrac{A}{\sigma(A)}$.

Часто берут не индивидуальные аксиомы, а *схемы аксиом*, и соответственно, удаляют правило подстановки (Sub). То есть рассматривают следующее исчисление (назовем его И2):

- **Аксиомы:**

  – схемы аксиом исчисления высказываний: 1) $A \to (B \to A)$, и так далее; N) $A \vee \neg A$;

  – $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ — схема *аксиомы дистрибутивности* или *нормальности.*

- **Правила вывода:** $(\mathsf{MP})\ \dfrac{A \quad A \to B}{B}$, $\quad (\mathsf{Nec})\ \dfrac{A}{\Box A}$.

Формула A называется *выводимой* (или *доказуемой*) в некотором исчислении И (или является *теоремой* исчисления И), обозначение $\vdash_{\text{И}} A$, если существует *вывод* формулы A в исчислении И, то есть конечная последовательность формул $C_1, \ldots, C_n$, оканчивающаяся формулой $C_n = A$ и такая, что каждая формула C_i является либо аксиомой исчисления И, либо получено по одному из правил вывода исчисления И из некоторых предыдущих (в этом выводе) формул. Два исчисления называются *эквивалентными*, если в них выводимы одни и те же формулы.

Теорема 2.1. *Исчисления* И1 *и* И2 *эквивалентны.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $C_1, \ldots, C_n$ — вывод формулы A в И2. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — использованные в нем аксиомы И2. Поскольку в И2 аксиомы — это *схемы*, то каждая β_i есть подстановочный пример некоторой аксиомы α_i исчисления И1. Тогда $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, C_1, \ldots, C_n$ — вывод формулы A в И1. Действительно, формулы β_i, которые И2-выводе обосновывались как «β_i есть аксиома», в построенном И1-выводе обосновываются так: «β_i получена по правилу (Sub) из формулы α_i».

($\Rightarrow$) Пусть — вывод формулы A в И1. Индукцией по длине вывода $C_1, \ldots, C_n$ формулы A в И1 покажем, что A выводима в И2.

База: если A — это аксиома исчисления И1, то она же — аксиома исчисления И2.

Шаг: пусть A получена по правилу (MP) или (Nec) из предыдущих формул. По предположению индукции, для них уже есть вывод(ы) в И2. Применение к этому выводу (выводам), соответственно, правила (MP) или (Nec) дает вывод формулы A в И2.

Шаг: пусть A получена по правилу (Sub), а именно, подстановкой σ из формулы C_i, где $i < n$. Возьмем вывод $D_1, \ldots, D_s$ формулы C_i в И2; где $D_s = C_i$. Тогда $\sigma(D_1), \ldots, \sigma(D_s)$ — тоже вывод в И2 (формулы $\sigma(D_s) = \sigma(C_i) = A$). Действительно, если D_i — подстановочный пример некоторой схемы аксиом, то $\sigma(D_i)$ — тоже; если D_i получена из E и $E \to D_i$ по (MP), то и $\sigma(D_i)$ получается из $\sigma(E)$ и $\sigma(E \to D_i)$ по (MP); если D_i получена из E по (Nec), то и $\sigma(D_i)$ получается из $\sigma(E)$ по (Nec). $\Box$

Через $\mathbf{K}$ обозначаем множество всех формул, выводимых в приведенных выше исчислениях.

Определение 2.2. *Нормальная логика* — это множество формул $L \subseteq \mathsf{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замнутое относительно правил вывода (MP), (Nec), (Sub).

Таким образом, $\mathbf{K}$ — это наименьшая нормальная логика.

Наименьшую нормальную логику, содержащую логику L и множество формул Γ, обозначают $L \oplus \Gamma$.

Определение 2.3. Логику L называют *конечно аксиоматизируемой*, если $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ для некоторого конечного множества формул Γ. Очевидно, в этом случае логику L можно аксиоматизировать всего одной формулой (конъюнкцией формул из Γ).

Теорема 2.4 (Критерий Тарского конечной аксиоматизируемости)**.** *Нормальная логика L конечно аксиоматизируема $\Longleftrightarrow$ она не представима в виде объединения строго возрастающей башни логик; то есть не существует башни логик $\mathbf{K} = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \ldots$, такой что $L = \bigcup_{n \geqslant 0} L_n$.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, где Γ — конечное. Допустим $L = \bigcup_{n \geqslant 0} L_n$ для некоторой башни логик $\mathbf{K} = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \ldots$ Каждая формула из Γ лежит в некотором L_n. Взяв наибольшую из таких логик L_n, получим $\Gamma \subseteq L_n$, а значит и $L \subseteq L_n$. Однако $L_n \subsetneq L_{n+1} \subseteq L$, противоречие.

$(\Leftarrow)$ Предположим логика $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ не конечно аксиоматизируема. Рассмотрим пересчет множества $\Gamma = \{B_0, B_1, \ldots\}$. Мы построим башню логик. Положим $L_0 = \mathbf{K}$. Для каждого $n \geqslant 0$ пусть A_n — первая формула в указанном пересчете множества Γ, не принадлежащая L_n; такая формула найдется, иначе L была бы конечно аксиоматизируемой, а именно, совпала бы с L_n. Полагаем $L_{n+1} = L_n \oplus A_n$.

С одной стороны, $L_n \subseteq L$ для каждого n, а значит $\bigcup_{n \geqslant 0} L_n \subseteq L$.

С другой стороны, $\Gamma \subseteq \bigcup_{n \geqslant 0} L_n$, поскольку мы бесконечное число раз выбирали из Γ формулу с наименьшим номером, еще не попавшую в очередную логику L_n. Значит, $L \subseteq \bigcup_{n \geqslant 0} L_n$. Получили равенство $L = \bigcup_{n \geqslant 0} L_n$. □

2.1 Теорема о корректности

Мы собираемся доказать теорему о корректности логики $\mathbf{K}$: всякая формула, выводимая в $\mathbf{K}$, общезначима. (Верно и обратное — это теорема о полноте, она будет доказана позже.) Но попутно мы хотим доказать большее, поэтому доказательство теоремы о корректности мы разобьем на мелкие утверждения, и каждое утверждение докажем для своего «наиболее частного» типа структур; из этого утверждение будет следовать и для структур «более общего» типа.

Определение 2.5. Введем следующие обозначения:

$\mathsf{Theory}(M, x)$	$=$	$\{A \in \mathsf{Fm} \mid M, x \models A\}$	— теория отмеченной модели (M, x).
$\mathsf{Theory}(M)$	$=$	$\{A \in \mathsf{Fm} \mid M \models A\}$	— теория модели M.
$\mathsf{Logic}(F, x)$	$=$	$\{A \in \mathsf{Fm} \mid F, x \models A\}$	— логика отмеченной шкалы (F, x).
$\mathsf{Logic}(F)$	$=$	$\{A \in \mathsf{Fm} \mid F \models A\}$	— логика шкалы F.

Лемма 2.6. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *Множество* $\mathsf{Theory}(M, x)$ *содержит все аксиомы логики* $\mathbf{K}$.
б) *Множество* $\mathsf{Theory}(M, x)$ *замкнуто по правилу* (MP).
в) *Множество* $\mathsf{Theory}(M)$ *замкнуто по правилу* (Nec).
г) *Множество* $\mathsf{Logic}(F, x)$ *замкнуто по правилу* (Sub).

Доказательство. **б)** Если $M, x \models A$ и $M, x \models A \to B$, то $M, x \models B$ по семантике связки $\to$.

а) Истинность тавтологий в (M, x) проверяется элементарно. Проверим аксиому дистрибутивности: если $M, x \models \Box(p \to q)$ и $M, x \models \Box p$, то $M, x \models \Box q$, ибо для каждой точки y, такой что $x\,R\,y$, имеем $M, y \models p \to q$ и $M, y \models p$, а значит $M, y \models q$

в) Если $M \models A$, то очевидно $M \models \Box A$, ибо $\forall x\ \forall y \in R(x)\ M, y \models A$.

г) Пусть $F, x \models A$ и σ — подстановка. Докажем $F, x \models \sigma(A)$. Для этого возьмем любую модель $M = (F, V)$ и докажем $M, x \models \sigma(A)$. Подстановка σ переводит каждую переменную p_i в некоторую формулу $\sigma(p_i) = C_i$. Зададим на F оценку V' (и тем самым получим модель $M' = (F, V')$) так, чтобы переменная p_i была истинна там, где в модели M истинна формула C_i. Формально: $V'(p_i) = V(C_i)$, или подробнее: $M', y \models p_i \leftrightharpoons M, y \models \sigma(p_i)$.

Утверждение. $M', y \models B \leftrightharpoons M, y \models \sigma(B)$, для каждой формулы B.

Доказательство — индукцией по построению формулы B: база очевидна, шаги тривиальны.

Поскольку $M', x \models A$, ибо $F, x \models A$, то по утверждению получаем $M, x \models \sigma(A)$. □

Определение 2.7. *Теория*[2] — это множество формул $T \subseteq \mathsf{Fm}$, содержащее $\mathbf{K}$ и замкнутое по (MP). Теория называется *нормальной*, если она замкнута по (Nec). *Логика* — это теория, замкнутая по (Sub). Логика называется *нормальной*, если она замкнута по (Nec).

Теорема 2.8 (Корректность)**.** *Справедливы следующие утверждения.*
а) *Теория отмеченной модели* $\mathsf{Theory}(M,x)$ *— это теория.*
б) *Теория модели* $\mathsf{Theory}(M)$ *— это нормальная теория.*
в) *Логика отмеченной шкалы* $\mathsf{Logic}(F,x)$ *— это логика.*
г) *Логика шкалы* $\mathsf{Logic}(F)$ *— это нормальная логика.*
д) *Если* $\vdash_{\mathbf{K}} A$, *то* $\models A$ *(всякая выводимая в* $\mathbf{K}$ *формула общезначима).*

Доказательство. Получается из Леммы 2.6 по «принципу обобщения»:

$$\textit{если доказано}\ \ \forall x\,(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)),\ \ \textit{то}\ \ \forall x\,\Phi(x)\ \ \Rightarrow\ \ \forall x\,\Psi(x).$$

Например, $\mathsf{Theory}(M)$ замкнуто по (MP): поскольку для любого x доказано, что из $M,x \models A, A \to B$ следует $M,x \models B$, то по принципу обобщения получаем: если $M \models A, A \to B$, то $M \models B$. □

Следствие 2.9. *Справедливы следующие утверждения.*
а) *Теория всякого класса отмеченных моделей — это теория.*
б) *Теория всякого класса моделей — это нормальная теория.*
в) *Логика всякого класса отмеченных шкал — это логика.*
г) *Логика всякого класса шкал — это нормальная логика.*

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы по принципу обобщения. Можно сказать и иначе. Например, теория всякого класса моделей — это пересечение теорий всех моделей, входящих в данный класс. При пересечении сохраняются свойства «содержать $\mathbf{K}$» и «быть замкнутым относительно указанных правил вывода». □

2.2 Локальная и глобальная выводимость из гипотез

Пусть L — нормальная логика, $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$ — некоторое множество формул, $A \in \mathsf{Fm}$ — формула.

Определение 2.10. Из множества гипотез Γ *локально выводима* формула A в логике L, если существует вывод из множества $L \cup \Gamma$ формулы A по правилу (MP). Обозначение: $\Gamma \vdash_L A$.

Определение 2.11. Из множества гипотез Γ *глобально выводима* формула A в логике L, если существует вывод из множества $L \cup \Gamma$ формулы A по правилам (MP) и (Nec). Обозначение: $\Gamma \vdash^*_L A$.

Очевидно, из $\Gamma \vdash_L A$ следует $\Gamma \vdash^*_L A$. Кроме того, при пустом Γ имеем: $\vdash_L A \iff \vdash^*_L A$.

Рассматривать выводимость в логике L формулы A из гипотез Γ по всем *трем* правилам вывода смысла не имеет, так как это будет означать выводимость формулы A в логике $L \oplus \Gamma$.

Задача 2.12. Если[3] $\Gamma \vdash^*_L B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$, то $\Gamma \vdash^*_L \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$.

Установим несколько свойств двух отношений выводимости, включая взаимосвязь между ними.

Лемма 2.13 (**Компактность** выводимости)**.**
а) *Если* $\Gamma \vdash_L A$, *то существует конечное* $\Gamma' \subseteq \Gamma$, *такое что* $\Gamma' \vdash_L A$.
б) *Если* $\Gamma \vdash^*_L A$, *то существует конечное* $\Gamma' \subseteq \Gamma$, *такое что* $\Gamma' \vdash^*_L A$.

Теорема 2.14 (О **дедукции** для $\vdash_L$)**.** $\Gamma, B \vdash_L A \quad\iff\quad \Gamma \vdash_L B \to A.$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Из гипотезы B и выводимой из Γ формулы $B \to A$ выводится A по (MP).

($\Rightarrow$) Доказательство проводится, как для классического исчисления высказываний. В нем лишь использовалось, что рассматриваемое исчисление содержит две аксиомы для импликации:

---
[2] Всюду надо добавлять слово ‘модальная’: модальная теория, модальная логика. Мы будем его опускать.
[3] См. также задачу 4.2 из конспекта 2014–2015 года.

$$(\mathrm{A1})\ p \to (q \to p) \quad \text{и} \quad (\mathrm{A2})\ [p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)],$$

а также что исчисление имеет лишь правило (MP). Приведем это доказательство здесь.

Индукция по длине вывода $\Gamma, B \vdash_L A$.

База: $A \in L \cup \Gamma$. Тогда из A и аксиомы $A \to (B \to A)$ по (MP) получаем требуемое: $\Gamma \vdash_L B \to A$.

Шаг (MP)**.** Пусть формула A получена из предыдущих формул D и $(D \to A)$ рассматриваемого вывода по правилу (MP). По предположению индукции
$\Gamma \vdash_L (B \to D)$ и $\Gamma \vdash_L B \to (D \to A)$.
Используя аксиому (A2) и дважды правило (MP), выводим $\Gamma \vdash_L B \to A$. $\square$

Для глобальной выводимости теорема о дедукции формулируется сложнее.

Теорема 2.15 (**О дедукции** для $\vdash^*_L$)**.** $\Gamma, B \vdash^*_L A \iff \exists n \geqslant 0\ \ \Gamma \vdash^*_L B \wedge \Box B \wedge \ldots \wedge \Box^n B \to A.$

Примечание: число n зависит от A, B, Γ. Даже при $\Gamma = \varnothing$ число n может не быть вычислимой функцией от A, B. Это не случайно: существуют логики, для которых $\vdash_L$ разрешимо, а $\vdash^*_L$ неразрешимо.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\Gamma \vdash^*_L B \wedge \Box B \wedge \ldots \wedge \Box^n B \to A$. Очевидно $\Gamma, B \vdash^*_L \Box B, \ldots, \Box^n B$. Образуя из этих формул конъюнкцию, а затем применяя (MP), получаем требуемое: $\Gamma, B \vdash^*_L A$.

($\Rightarrow$) Индукция по выводу $\Gamma, B \vdash^*_L A$.

База: $A \in L \cup \Gamma$. Из A и аксиомы $A \to (B \to A)$ по (MP) получаем: $\Gamma \vdash^*_L B \to A$ (то есть $n = 0$).

Шаг (MP)**.** Пусть формула A получена из предыдущих формул D и $(D \to A)$ рассматриваемого вывода по правилу (MP). По предположению индукции
$\Gamma \vdash^*_L B \wedge \Box B \wedge \ldots \wedge \Box^k B \to D$ и $\Gamma \vdash^*_L B \wedge \Box B \wedge \ldots \wedge \Box^\ell B \to (D \to A)$.
Взяв $n = \max\{k, \ell\}$, и обозначая $E = B \wedge \Box B \wedge \ldots \wedge \Box^n B$, получаем:
$\Gamma \vdash^*_L E \to D$ и $\Gamma \vdash^*_L E \to (D \to A)$.
Используя аксиому (A2) и дважды правило (MP), выводим $\Gamma \vdash^*_L E \to A$.

Шаг (Nec)**.** Пусть A получена из формулы D рассматриваемого вывода по правилу (Nec), тем самым $A = \Box D$. По предположению индукции
$\Gamma \vdash^*_L B \wedge \Box B \wedge \ldots \wedge \Box^n B \to D$. Используя задачу 2.12 и учитывая $\Box D = A$, получаем:
$\Gamma \vdash^*_L \Box B \wedge \Box^2 B \wedge \ldots \wedge \Box^{n+1} B \to A$ (недостающий конъюнкт B легко добавить).

Из доказательства видно, что n есть число применений правила (Nec) в выводе $\Gamma, B \vdash^*_L A$. $\square$

Задача 2.16. а) Пусть $L \supseteq \mathbf{K4}$, где логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$. Тогда теорема о дедукции для $\vdash^*_L$ упрощается: $\Gamma, B \vdash^*_L A \iff \Gamma \vdash_L B \wedge \Box B \to A$.

б) Пусть $L \supseteq \mathbf{S4}$, где логика $\mathbf{S4} = \mathbf{K4} \oplus \Box p \to p$. Тогда теорема о дедукции для $\vdash^*_L$ становится еще проще: $\Gamma, B \vdash^*_L A \iff \Gamma \vdash_L \Box B \to A$.

В качестве первого следствия получим сводимость глобальной выводимости к локальной. Обозначим $\Box^*\Gamma := \{\Box^n B \mid n \geqslant 0,\ B \in \Gamma\}$. Удобно также обозначить $\Box^{\leqslant n} B := B \wedge \Box B \wedge \ldots \wedge \Box^n B$.

Теорема 2.17 (**Сводимость** $\vdash^*_L$ **к** $\vdash_L$)**.** $\boxed{\Gamma \vdash^*_L A \iff \Box^*\Gamma \vdash_L A}$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\Box^*\Gamma \vdash_L A$. По компактности (лемма 2.13(а)) A выводима из конечного числа посылок: $\Box^{n_1} B_1, \ldots, \Box^{n_s} B_s \vdash_L A$, где $n_i \geqslant 0$, $B_i \in \Gamma$. Очевидно $\Gamma \vdash^*_L \Box^{n_i} B_i$. Значит, $\Gamma \vdash^*_L A$.

($\Rightarrow$) Пусть $\Gamma \vdash^*_L A$. По компактности (лемма 2.13(б)) формула A выводима из конечного числа посылок: $B_1, \ldots, B_s \vdash^*_L A$, для некоторых $B_i \in \Gamma$. По теореме о дедукции для глобальной выводимости (теорема 2.15), примененной s раз, имеем: $\vdash^*_L \Box^{\leqslant n_1} B_1 \wedge \ldots \wedge \Box^{\leqslant n_s} B_s \to A$, для некоторых $n_i \geqslant 0$. Здесь $\vdash^*_L$ можно заменить на $\vdash_L$. По простой части ($\Leftarrow$) теоремы о дедукции для локальной выводимости (теорема 2.14), а также попутно устраняя конъюнкции, соединяющие гипотезы, получаем:
$\{\Box^j B_i \mid 0 \leqslant j \leqslant n_i, 1 \leqslant i \leqslant s\} \vdash_L A$. Следовательно, $\Box^*\Gamma \vdash_L A$. $\square$

Для $L \supseteq \mathbf{K4}$ получаем: $\Gamma \vdash^*_L A \iff \Gamma, \Box\Gamma \vdash_L A$. Для $L \supseteq \mathbf{S4}$ получаем: $\Gamma \vdash^*_L A \iff \Box\Gamma \vdash_L A$.

Далее получим обратную сводимость — локальной выводимости к глобальной. Здесь нам потребуется переменная, не входящая в Γ и A. Поскольку переменных бесконечное число, то всегда можно в Γ, A переименовать переменные так, чтобы в Var осталась хотя бы одна неиспользованная переменная.

Удобно обозначить $p \to \Gamma := \{p \to B \mid B \in \Gamma\}$.

Теорема 2.18 (**Сводимость $\vdash_L$ к $\vDash^*_L$**). *Пусть $p \notin \mathsf{Var}(\Gamma, A)$. Тогда:* $\boxed{\Gamma \vdash_L A \quad\Longleftrightarrow\quad p \to \Gamma \vDash^*_L p \to A}$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $p \to \Gamma \vDash^*_L p \to A$. По компактности $p \to B_1, \dots, p \to B_n \vDash^*_L p \to A$ для некоторых $B_i \in \Gamma$. Подставим[4] в данный вывод вместо p формулу $C := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$. При этом формулы B_i и A не изменятся, так как p в них не входит. Получаем: $C \to B_1, \dots, C \to B_n \vDash^*_L C \to A$. Но импликации $C \to B_i$ — тавтологии, они принадлежат L. Значит, $\vDash^*_L C \to A$, то есть $\vdash_L C \to A$. Тем самым $B_1, \dots, B_n \vdash_L A$ и следовательно $\Gamma \vdash_L A$.

($\Rightarrow$) (Здесь неважно, что переменная p не входит в Γ и A.) Пусть $\Gamma \vdash_L A$. По компактности $B_1, \dots, B_n \vdash_L A$ для некоторых $B_i \in \Gamma$. Очевидно, $p, p \to B_1, \dots, p \to B_n \vdash_L A$. По теореме 2.14 о дедукции $p \to B_1, \dots, p \to B_n \vdash_L p \to A$. Значит, $p \to \Gamma \vdash_L p \to A$ и тем более $p \to \Gamma \vDash^*_L p \to A$. $\square$

Докажем, что выводимость формулы A в логике $L \oplus \Gamma$ (то есть принадлежность $A \in L \oplus \Gamma$) означает в точности выводимость формулы A из множества всех подстановочных примеров формул из Γ.

Лемма 2.19 (Сводимость $\oplus$ к $\vDash^*_L$). $L \oplus \Gamma \vdash A \quad\Longleftrightarrow\quad \Gamma^* \vDash^*_L A$.
Здесь $\Gamma^* \;=\; \{\,\sigma(B) \;\mid\; B \in \Gamma,\ \sigma$ — произвольная подстановка$\,\}$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Очевидно $\Gamma^* \subseteq (L \oplus \Gamma)$. Поэтому если $\Gamma^* \vDash^*_L A$, то и значит $A \in (L \oplus \Gamma)$.

($\Rightarrow$) Аналогично доказательству теоремы 2.1 (об эквивалентности двух исчислений для логики **K**) можно доказать, что если $L \oplus \Gamma \vdash A$, то существует вывод формулы A из теорем логики L и *схем аксиом* Γ, то есть всевозможных подстановочных примеров формул из Γ, с помощью правил (MP) и (Nec). Это и означает $\Gamma^* \vDash^*_L A$. $\square$

Следующая теорема дает явную аксиоматику для пересечения двух нормальных логик. Заметим предварительно, что если две логики заданы множествами своих аксиом, то без ограничения общности всегда можно добиться (путем переименования переменных) того, чтобы у данных множеств аксиом не было общих переменных.

Теорема 2.20 (Аксиоматика пересечения нормальных логик).
Пусть $L_1 = L \oplus \Gamma$, $L_2 = L \oplus \Delta$, где $\mathsf{Var}(\Gamma) \cap \mathsf{Var}(\Delta) = \varnothing$. Тогда

$$L_1 \cap L_2 \;=\; L \,\oplus\, \{\,\Box^m A \vee \Box^n B \;\mid\; m, n \geqslant 0,\;\; A \in \Gamma,\;\; B \in \Delta\,\}.$$

Доказательство. Обозначим логику в правой части $L \oplus \Sigma$. Надо доказать: $L_1 \cap L_2 = L \oplus \Sigma$.
($\supseteq$) Если $A \in \Gamma$, $B \in \Delta$, то $\Box^m A \in L_1$, $\Box^n B \in L_2$, поэтому $\Box^m A \vee \Box^n B \in L_1 \cap L_2$ и $L_1 \cap L_2 \supseteq L'$.

($\subseteq$) Пусть $C \in L_1$. По лемме 2.19 имеем $\Gamma^* \vDash^*_L C$ и $\Delta^* \vDash^*_L C$. Тогда $\Box^*\Gamma^* \vdash_L C$ и $\Box^*\Delta^* \vdash_L C$ по теореме 2.17 о сводимости. По компактности и теореме о дедукции получаем:

$$\begin{aligned} &\vdash_L \Box^{m_1}\sigma_1(A_1) \wedge \ldots \wedge \Box^{m_k}\sigma_k(A_k) \to C,\\ &\vdash_L \Box^{n_1}\tau_1(B_1) \;\;\wedge \ldots \wedge \Box^{n_\ell}\tau_\ell(B_\ell) \;\;\to C, \end{aligned}$$

для некоторых чисел $m_i, n_j \geqslant 0$, формул $A_i \in \Gamma$, $B_j \in \Delta$ и подстановок σ_i, τ_j.

Взяв конъюнкцию этих двух формул и преобразовав (в логике высказываний) ее эквивалентным образом, получаем: $\vdash_L D_1 \wedge \ldots \wedge D_s \to C$, причем каждая формула D_t имеет вид $\Box^m\sigma(A) \vee \Box^n\tau(B)$, где $m, n \geqslant 0$, $A \in \Gamma$, $B \in \Delta$, и σ, τ — некоторые подстановки. Отсюда $D_1, \dots, D_s \vdash_L C$.

Поскольку $\mathsf{Var}(A) \cap \mathsf{Var}(B) = \varnothing$, можем «объединить» подстановки σ и τ в одну подстановку δ, и получим $\Box^m\sigma(A) \vee \Box^n\tau(B) = \delta\big(\Box^m A \vee \Box^n B\big)$. Тем самым, каждая формула D_t есть подстановочный пример некоторой аксиомы из Σ. В итоге $\Sigma^* \vdash_L C$ и тем самым $C \in (L \oplus \Sigma)$. $\square$

Обратим внимание, что в конце доказательства фигурирует локальная, а не глобальная выводимость: $\Sigma^* \vdash_L C$. Значит, вместо $L \oplus \Sigma$ можно взять $L + \Sigma$ (замыкание лишь по (MP) и (Sub)).

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для аксиоматики пересечения произвольного семейства нормальных логик $\bigcap_{i \in I} L_i$.

Замечание. Для аксиоматизации пересечения двух логик нам потребовалось бесконечно много формул, даже в случае, когда Γ и Δ конечны. Это нельзя улучшить: существуют конечно аксиоматизируемые нормальные логики L_1 и L_2, пересечение которых $L_1 \cap L_2$ не конечно аксиоматизируемо.

[4]Применение подстановки к гипотезам и формуле сохраняет выводимость: $\Gamma \vdash_L A \Rightarrow \sigma(\Gamma) \vdash_L \sigma(A)$; то же для $\vDash^*_L$.

2.3 Локальное и глобальное следование из гипотез

Введем семантические аналоги $\models_L$ и $\models^*_L$ двух понятий выводимости. В общем случае семантическое следование формулы A из множества гипотез Γ означает: для всякой структуры (некоторого типа) S если $S \models \Gamma$, то $S \models A$. Тип структур должен соответствовать тому, какие правила вывода применяются при задании соответствующего типа выводимости. Семантическим аналогом $\models_L$ понятия локальной выводимости $\vdash_L$, то есть «выводимости со правилу (MP)», будет семантическое следование на классе *отмеченных моделей*, поскольку теория отмеченной модели $\mathsf{Theory}(M, x)$ замкнута по (MP). Аналогично, семантическим аналогом $\models^*_L$ понятия глобальной выводимости $\vdash^*_L$, то есть «выводимости по правилам (MP) и (Nec)», будет семантическое следование на классе *моделей*, поскольку теория модели $\mathsf{Theory}(M)$ замкнута по (MP) и (Nec). Класс каких именно (отмеченных) моделей нужно рассматривать, указывает логика L: это будут (отмеченные) модели, основанные на шкалах F, удовлетворяющих условию $F \models L$. В этом разделе мы изучим свойства двух понятий следования $\models_L$ и $\models^*_L$. В следующем разделе мы установим связи между понятиями выводимости ($\vdash_L$ и $\vdash^*_L$) и следования ($\models_L$ и $\models^*_L$).

Как и прежде, L — нормальная логика, $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$, $A \in \mathsf{Fm}$. Модель $M = (F, V)$ будем называть *L-моделью*, если $F \models L$ (а не просто $M \models L$). Например, $\mathbf{K4}$-модели — это транзитивные модели.

Определение 2.21. Из множества гипотез Γ *локально следует* формула A над логикой L, если для каждой L-модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$. Обозначение: $\Gamma \models_L A$.

Определение 2.22. Из множества гипотез Γ *глобально следует* формула A над логикой L, если для каждой L-модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$. Обозначение: $\Gamma \models^*_L A$.

Установим для понятий следования аналоги утверждений, полученных для понятий выводимости. Очевидно, если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models^*_L A$. Кроме того, при $\Gamma = \varnothing$ эти понятия совпадают: $\models_L A \iff \models^*_L A$. Компактности в общем случае ожидать не приходится. Перейдем к теоремам о дедукции. Локальная теорема о дедукции для $\models_L$ становится тривиальной.

Теорема 2.23 (**О дедукции** для $\models_L$)**.** $\Gamma, B \models_L A \quad \iff \quad \Gamma \models_L B \to A.$

Доказательство. Следует из определения семантики связки $\to$ в отмеченной модели (M, x). □

Для глобального следования $\models^*_L$ аналог теоремы 2.15 о дедукции в общем случае, вероятно, не имеет места (но контрпримера автору не известно). Установим взаимную сводимость $\models^*_L$ и $\models_L$.

Теорема 2.24 (**Сводимость** $\models^*_L$ **к** $\models_L$)**.** $\boxed{\Gamma \models^*_L A \quad \iff \quad \Box^*\Gamma \models_L A}$

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $\Box^*\Gamma \models_L A$. Для проверки $\Gamma \models^*_L A$ возьмем любую L-модель M. Предположим $M \models \Gamma$. Тогда $M \models \Box^*\Gamma$. Чтобы доказать $M \models A$, возьмем любую точку $x \in W$. Имеем $M, x \models \Box^*\Gamma$. Ввиду $\Box^*\Gamma \models_L A$ получаем $M, x \models A$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Gamma \models^*_L A$. Для проверки $\Box^*\Gamma \models_L A$ возьмем любую L-модель $M = (F, V)$ и любую ее точку x. Предположим, $M, x \models \Box^*\Gamma$. Значит, Γ истинно во всех точках, достижимых из x за любое конечное число шагов. Рассмотрим $M' = (F', V')$ — подмодель модели M, порожденную точкой x. Тогда $M', x \models \Gamma$ и следовательно $M' \models \Gamma$. Поскольку общезначимость модальных формул сохраняется при переходе к порожденной подшкале, то $F' \models L$, то есть M' тоже является L-моделью. Пользуясь $\Gamma \models^*_L A$, получаем $M' \models A$. В частности, $M', x \models A$ и тем самым $M, x \models A$. □

Вопрос. Верно ли: $\Gamma \models^*_L A \Leftrightarrow \exists n\colon \Box^{\leqslant n}\Gamma \models_L A$? Хотя бы для $\Gamma = \{B\}$?

Теорема 2.25 (**Сводимость** $\models_L$ **к** $\models^*_L$)**.** *Пусть* $p \notin \mathsf{Var}(\Gamma, A)$*. Тогда:* $\boxed{\Gamma \models_L A \iff p \to \Gamma \models^*_L p \to A}$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Из $\Gamma \models_L A$ легко следует $p \to \Gamma \models_L p \to A$ (откуда вытекает и $p \to \Gamma \models^*_L p \to A$). Действительно, пусть $M, x \models p \to \Gamma$. Проверим $M, x \models p \to A$. Допустим, $M, x \models p$. Тогда $M, x \models \Gamma$. Ввиду $\Gamma \models_L A$ получаем требуемое: $M, x \models A$.

($\Leftarrow$) Идея: в утверждение $p \to \Gamma \models^*_L p \to A$ «подставим» $p := \bigwedge\Gamma$. Тогда гипотезы превратятся в тавтологии $\bigwedge\Gamma \to \Gamma$, а заключение — в $\bigwedge\Gamma \to A$, то есть в требуемое $\Gamma \models_L A$. Конечно, $\bigwedge\Gamma$ — не формула. Но мы можем аналог этой «подстановки» провести в модели — сделать переменную p истинной в точности там, где истинно Γ (так как $p \notin \mathsf{Var}(\Gamma)$, это можно сделать).

Итак, пусть $p \to \Gamma \models^*_L p \to A$. Для доказательства $\Gamma \models_L A$ возьмем любую L-модель M и ее точку x. Допустим $M, x \models \Gamma$. Переменную p оценим так: $M, y \models p \leftrightharpoons M, y \models \Gamma$; то есть $V(p) := V(\Gamma)$. Истинность формул из Γ и A не изменится (p в них не входит). При такой оценке $M \models p \to \Gamma$. Ввиду $\models^*_L$ получаем $M \models p \to A$. Поскольку $M, x \models p$ (ведь $M, x \models \Gamma$), то $M, x \models A$. $\square$

Из теоремы 2.8 о корректности вытекает следующая связь между выводимостью и следованием.

Теорема 2.26 (О корректности выводимостей из гипотез)**.**

а) $\Gamma \vdash_L A \implies \Gamma \models_L A$.

б) $\Gamma \vdash^*_L A \implies \Gamma \models^*_L A$.

В следующем разделе мы рассмотрим вопрос, когда в этих утверждениях имеет место обратная импликация. В этой ситуации логика будет называться в некотором смысле полной. Возникнет несколько понятий полноты, в зависимости от того, рассматриваем ли мы локальные понятия (пункт а) или глобальные (пункт б), а также рассматриваем ли мы лишь конечные множества гипотез Γ или произвольные, включая бесконечные (последний случай будет указываться словом 'сильная'). Кроме того, имеет смысл рассматривать понятие следования не только на классе всех L-шкал (то есть шкал F с условием $F \models L$), но и на некотором его подклассе; например, на классе всех конечных L-шкал. При этом возникают соответствующие понятия полноты логики L *относительно* некоторого класса шкал $\mathbb{F}$.

2.4 Локальная, глобальная, сильная полнота логики

Указанные в заголовке понятия возникают при сопоставлении понятий выводимости и следования.

Определение 2.27. Логика L (*локально*) *полна*,[5] если для всякой формулы A имеем: $\vdash_L A \iff \models_L A$.

В понятиях выводимости и следования можно брать конечные Γ. Сразу можно заметить, что это равносильно тому, что Γ состоит из одной формулы — конъюнкции гипотез. Оказывается, для локальных понятий выводимости и следования случай конечного Γ не дает ничего нового.

Лемма 2.28. *Для любой логики L следующие условия эквивалентны:*

а) $\vdash_L A \iff \models_L A$ *для любой формулы A;*

б) $B \vdash_L A \iff B \models_L A$ *для всяких формул A, B.*

Доказательство. (а) $\Leftarrow$ (б): достаточно взять $B = \top$.

(а) $\Rightarrow$ (б): воспользуемся теоремами 2.14 и 2.23 о дедукции для $\vdash_L$ и $\models_L$:

$B \vdash_L A \iff \vdash_L B \to A \iff \models_L B \to A \iff B \models_L A$. $\square$

Глобальные понятия выводимости и следования уже в случае конечного Γ дают новое понятие.

Определение 2.29. Логика L *глобально полна*, если $B \vdash^*_L A \iff B \models^*_L A$, для любых формул A, B.

Лемма 2.30. *Если логика глобально полна, то она и локально полна.*

Доказательство. В определении глобальной полноты можно взять $B = \top$, и учесть, что в отсутствие гипотез отношение $\vdash^*_L$ совпадает с $\vdash_L$, а отношение $\models^*_L$ совпадает с $\models_L$. $\square$

Если допустить бесконечные множества посылок Γ, приходим к двум понятиям *сильной* полноты.

Определение 2.31. Логика L называется *сильно локально полной* (СЛП), если $\Gamma \vdash_L A \Leftrightarrow \Gamma \models_L A$.

Определение 2.32. Логика L называется *сильно глобально полной* (СГП), если $\Gamma \vdash^*_L A \Leftrightarrow \Gamma \models^*_L A$.

Очевидно, что СЛП влечет локальную полноту (ЛП), а СГП влечет глобальную полноту (ГП).

[5]Всюду надо добавлять 'по Крипке', поскольку мы изучаем семантику Крипке. Но мы будем эти слова опускать.

Теорема 2.33 (СЛП = СГП). *Логика сильно локально полна $\Longleftrightarrow$ она сильно глобально полна.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Следует из сводимости $\vdash^*_L$ к $\vdash_L$ (теорема 2.17) и сводимости $\vDash^*_L$ к $\vDash_L$ (теорема 2.24):

$$\Gamma \vdash^*_L A \quad\Longleftrightarrow\quad \Box^*\Gamma \vdash_L A \quad\Longleftrightarrow\quad \Box^*\Gamma \vDash_L A \quad\Longleftrightarrow\quad \Gamma \vDash^*_L A.$$

($\Leftarrow$) Следует из обратных сводимостей. Пусть $p \notin \mathsf{Var}(\Gamma, A)$. Тогда:

$$\Gamma \vdash_L A \quad\Longleftrightarrow\quad p \to \Gamma \vdash^*_L p \to A \quad\Longleftrightarrow\quad p \to \Gamma \vDash^*_L p \to A \quad\Longleftrightarrow\quad \Gamma \vDash_L A.$$

Здесь мы считали, что найдется переменная p, не входящая в Γ и A. Если это не так, то можно поступить двумя способами: 1) расширить Var новой переменной и провести указанные выше рассуждения для расширенного языка; 2) применить к Γ и A подстановку σ, сдвигающую все переменные: $\sigma(p_i) = p_{i+1}$, при этом очевидно, что (локальная / глобальная) выводимость / следование из Γ формулы A равносильна тому же отношению между $\Gamma' = \sigma(\Gamma)$ и $A' = \sigma(A)$. $\square$

Соберем в таблицу определения всех понятий полноты и импликации или эквивалентности между ними. Как и выше, случай конечного множества Γ мы будем писать в виде $\Gamma = \{B\}$.

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{c} \vdash_L A \;\Leftrightarrow\; \vDash_L A \\ L \text{ (локально) полна} \end{array}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} \vdash^*_L A \;\Leftrightarrow\; \vDash^*_L A \\ L \text{ (локально) полна} \end{array}} \\
\Updownarrow & & \Uparrow \\
\boxed{\begin{array}{c} B \vdash_L A \;\Leftrightarrow\; B \vDash_L A \\ L \text{ (локально) полна} \end{array}} & \Longleftarrow & \boxed{\begin{array}{c} B \vdash^*_L A \;\Leftrightarrow\; B \vDash^*_L A \\ L \text{ глобально полна} \end{array}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\begin{array}{c} \Gamma \vdash_L A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vDash_L A \\ L \text{ сильно локально полна} \end{array}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} \Gamma \vdash^*_L A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vDash^*_L A \\ L \text{ сильно глобально полна} \end{array}}
\end{array}$$

Скливая на схеме эквивалентные понятия, мы в итоге имеем всего три понятия полноты:

$$\boxed{\text{сильная полнота}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\text{глобальная полнота}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\text{(локальная) полнота}}$$

Для расширений логики $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$ понятия ЛП и ГП склеиваются.

Лемма 2.34. *Пусть $L \supseteq \mathbf{K4}$. Тогда:* $\quad$ *L локально полна $\Longleftrightarrow$ L глобально полна.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Лемма 2.30. ($\Rightarrow$) Используем сводимость глобальных понятий к локальным:

$$\begin{array}{ccccc}
B \vdash^*_L A & \Longleftrightarrow & \Box^* B \vdash_L A & \Longleftrightarrow & B \wedge \Box B \vdash_L A, \\
 & & & & \Updownarrow \text{(ЛП)} \\
B \vDash^*_L A & \Longleftrightarrow & \Box^* B \vDash_L A & \Longleftrightarrow & B \wedge \Box B \vDash_L A.
\end{array}$$

Мы воспользовались тем, что $\vdash_L \Box B \to \Box^i p$ и $\vDash_L \Box B \to \Box^i B$, для всех $i > 0$; см. задачу 2.16(a). $\square$

Задача 2.35. Пусть $L \vdash \Box p \wedge \Box^2 p \wedge \ldots \Box^n p \to \Box^{n+1} p$ для некоторого $n \geqslant 1$ (формула *n-транзитивности*; при $n = 1$ это аксиома транзитивности). Тогда: $\quad$ *L локально полна $\Longleftrightarrow$ L глобально полна.*

Еще раз выпишем определения локальных понятий полноты логики:

- L – локально полна, если: $B \vdash_L A \Leftrightarrow B \vDash_L A$, $\quad$ для любых формул $A, B \in \mathsf{Fm}$;
- L – сильно локально полна, если: $\Gamma \vdash_L A \Leftrightarrow \Gamma \vDash_L A$, $\quad$ для любых $A \in \mathsf{Fm}$ и $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$.

Лемма 2.36. *Если в определениях локальных понятий полноты вместо A написать $\bot$, то получатся определения, эквивалентные прежним.*

Доказательство. Новые понятия (с $A = \bot$) являются частными случаями старых. Докажем, что старые понятия следуют из новых. Докажем для СЛП; для ЛП аналогично.

Пусть $\Gamma \vdash_L \bot \Leftrightarrow \Gamma \vDash_L \bot$ для любого $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$. Тогда для любых $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$ и $A \in \mathsf{Fm}$ имеем:

$$
\begin{array}{ccccc}
\Gamma \vdash_L A & \iff & \Gamma \vdash_L \neg A \to \bot & \iff & \Gamma, \neg A \vdash_L \bot \\
 & & & & \Updownarrow \\
\Gamma \models_L A & \iff & \Gamma \models_L \neg A \to \bot & \iff & \Gamma, \neg A \models_L \bot
\end{array}
$$

Мы использовали теоремы о дедукции. □

Предыдущая лемма позволяет прочитать определения локальных понятий полноты в терминах непротиворечивости и выполнимости формул или множеств формул. Множество формул Γ называется:

- *L-непротиворечивым*,[6] если $\Gamma \nvdash_L \bot$;
- *L-выполнимым*, если $\Gamma \not\models_L \bot$, то есть существует L-модель M и точка x, такие что $M, x \models \Gamma$.

Применяя это к $\Gamma = \{B\}$, определяем аналогичные понятия для формулы B.

Следствие 2.37. *Для всякой нормальной логики L верны эквивалентности:*
а) *L локально полна $\iff$ всякая L-непротиворечивая формула L-выполнима.*
б) *L сильно локально полна $\iff$ всякое L-непротиворечивое множество формул L-выполнимо.*

Вопрос. Верны ли аналогичные результаты (с $A = \bot$) для глобальных понятий полноты?

2.5 Локальная, глобальная, сильная полнота относительно класса шкал

Введенные ранее понятия полноты (разных видов) логики L являются понятиями полноты отн. класса *всех* L-шкал, то есть шкал F с условием $F \models L$. Естественно рассматривать полноту и отн. других классов L-шкал. Сначала введем (различные варианты) понятия следования над данным классом шкал $\mathbb{F}$.

Для краткости будем говорить, что $M = (F, V)$ есть $\mathbb{F}$-*модель*, если $F \in \mathbb{F}$.

Определение 2.38. Из множества гипотез Γ *локально следует* формула A над классом шкал $\mathbb{F}$, если для каждой $\mathbb{F}$-модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$. Обозначение: $\Gamma \models_{\mathbb{F}} A$.

Определение 2.39. Из множества гипотез Γ *глобально следует* формула A над классом шкал $\mathbb{F}$, если для каждой $\mathbb{F}$-модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$. Обозначение: $\Gamma \models^*_{\mathbb{F}} A$.

Теорема о дедукции для $\models_{\mathbb{F}}$ остается без изменений: $\Gamma, B \models_{\mathbb{F}} A \iff \Gamma \models_{\mathbb{F}} B \to A$.

Для теоремы о сводимости $\models^*_{\mathbb{F}}$ к $\models_{\mathbb{F}}$ нужно дополнительное условие на класс шкал $\mathbb{F}$.

Теорема 2.40 (Сводимость $\models^*_{\mathbb{F}}$ к $\models_{\mathbb{F}}$)**.** *Пусть класс шкал $\mathbb{F}$ замкнут относительно взятия подшкалы, порожденной точкой. Тогда:* $\boxed{\Gamma \models^*_{\mathbb{F}} A \quad \iff \quad \Box^*\Gamma \models_{\mathbb{F}} A}$.

Доказательство. Переносится доказательство теоремы 2.24; в нем при обосновании импликации ($\Rightarrow$) потребовалось перейти от исходной шкалы к подшкале, порожденной одной точкой. □

Для обоснования обратной сводимости $\models_{\mathbb{F}}$ к $\models^*_{\mathbb{F}}$ дополнительных условий на класс шкал не требуется.

Теорема 2.41 (**Сводимость $\models_{\mathbb{F}}$ к $\models^*_{\mathbb{F}}$**)**.** *Пусть $p \notin \mathsf{Var}(\Gamma, A)$. Тогда:* $\boxed{\Gamma \models_{\mathbb{F}} A \iff p \to \Gamma \models^*_{\mathbb{F}} p \to A}$.

Определения (различных типов) полноты логики L отн. класса шкал $\mathbb{F}$ получаются из обычных определений полноты заменой $\models_L$ и $\models^*_L$ на $\models_{\mathbb{F}}$ и $\models^*_{\mathbb{F}}$. Дадим определение лишь для случая СЛП.

Определение 2.42. Логика L *сильно локально полна* отн. класса шкал $\mathbb{F}$, если $\Gamma \vdash_L A \Leftrightarrow \Gamma \models_{\mathbb{F}} A$.

Покажем, что логика может быть полна (в любом смысле) только отн. класса $\mathbb{F} \subseteq \mathsf{Frames}(L)$.

Лемма 2.43. *Если логика L полна (в любом смысле) отн. класса шкал $\mathbb{F}$, то $\mathbb{F} \models L$.*

[6] Привычное определение: множество формул Γ называется *L-непротиворечивым*, если не существует конечного подмножества $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$, такого что $\vdash_L \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$. **Упражнение.** Докажите равносильность двух определений.

Доказательство. Если в определении любого из понятий полноты L отн. $\mathbb{F}$ взять пустое множество посылок Γ, то получится эквивалентность: $\vdash_L A \Leftrightarrow \models_{\mathbb{F}} A$, либо: $\vdash^*_L A \Leftrightarrow \models^*_{\mathbb{F}} A$, что одно и то же. Но левая часть эквивалентности означает $A \in L$, а правая $\mathbb{F} \models A$. Таким образом, $\mathbb{F} \models L$. $\square$

Лемма 2.44. *Если логика L полна (в любом смысле) отн. $\mathbb{F}$, то она полна (в том же смысле).*

Доказательство. Докажем лишь для СЛП. В силу теоремы корректности и включения $\mathbb{F} \subseteq \mathsf{Frames}(L)$ имеем импликации: $\Gamma \vdash_L A \Rightarrow \Gamma \models_L A \Rightarrow \Gamma \models_{\mathbb{F}} A$. СЛП-полнота L отн. $\mathbb{F}$ означает импликацию из последнего утверждения в первое. Она дает эквивалентность трех утверждений, то есть СЛП-полноту L. $\square$

Аналогично можно доказать: если L полна (в любом смысле) отн. класса $\mathbb{F}$, и $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}' \subseteq \mathsf{Frames}(L)$, то L полна (в том же смысле) отн. $\mathbb{F}'$.

Ранее мы доказали, что понятия СЛП и СГП совпадают. Следующая теорема показывает, что это верно над любым классом шкал $\mathbb{F}$, замкнутым относительно взятия подшкалы, порожденной точкой. Это позволяет в будущем говорить о *сильной полноте относительно класса шкал* $\mathbb{F}$.

Теорема 2.45 (СЛП = СГП)**.** *Пусть L — нормальная логика, класс шкал $\mathbb{F} \models L$ замкнут относительно взятия подшкалы, порожденной точкой. Тогда: L — СЛП отн. $\mathbb{F}$ $\Leftrightarrow$ L — СГП отн. $\mathbb{F}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.33. Нужна лишь сводимость друг к другу локальных и глобальных понятий (выводимости и следования). $\square$

2.6 Локальная, глобальная, сильная полнота относительно конечных шкал.

Особый интерес представляют понятия полноты относительно класса конечных шкал; им можно дать аббревиатуры ПОКШ, ГПОКШ, СПОКШ. ПОКШ еще называют *финитной аппроксимируемостью* логики. Поскольку класс всех конечных L-шкал непременно замкнут относительно взятия подшкалы, порожденной одной точкой, то получаем такое следствие из теоремы 2.45.

Лемма 2.46. *Логика сильно локально полна относительно (класса всех своих) конечных шкал $\Longleftrightarrow$ она сильно глобально полна относительно (класса всех своих) конечных шкал.*

В аббревиатурах: СЛПОКШ = СГПОКШ. Это свойство и будем называть СПОКШ.

Ниже мы увидим, что СПОКШ — довольно редкое свойство логик. Имеем систему понятий:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{L \text{ сильно полна}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ глобально полна}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ полна}} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{L - \text{СПОКШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L - \text{ГПОКШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L - \text{ПОКШ (Ф.А.)}}
\end{array}$$

Полнота (локальная или глобальная) относительно конечных шкал дает разрешимость соответствующих отношений выводимости (или, что то же самое, следования) между формулами:

Теорема 2.47 (Харроп)**.** *Пусть L — конечно аксиоматизируемая логика.*

а) *Если L — ПОКШ (то есть Ф.А.), то она разрешима. Иначе говоря, отношение локальной выводимости формул $B \vdash_L A$ разрешимо.*

б) *Если L — ГПОКШ (то есть глобально Ф.А.), то она глобально разрешима. Это означает, что отношение глобальной выводимости формул $B \vdash^*_L A$ разрешимо.*

Доказательство. Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \varphi$ для некоторой модальной формулы φ.

а) Чтобы проверить $B \vdash_L A$, запускаем параллельно два алгоритма. Один алгоритм строит всевозможные выводы из гипотезы B в логике L (по правилу лишь (MP)). Если этот процесс найдет вывод формулы формулы A, то выдаем «Да». Второй алгоритм строит всевозможные конечные модели M (например, с носителем вида $\{1, \ldots, n\}$), для каждой проверяет, является ли она L-моделью, то есть $F \models \varphi$, и если это так, то проверяет, верно ли, что в некоторой точке x имеем $M, x \models B$, но $M, x \not\models A$. Если такое обнаружено, то выдаем «Нет».

Свойство ПОКШ логики L гарантирует, что если первый процесс никогда не выдаст ответ (то есть формула A не выводима локально из B в логике L), то непременно ответ будет дан вторым процессом (то есть найдется конечная L-шкала, свидетельствующая, что B не следует локально A над L).

б) Аналогично, но первый алгоритм строит выводы по правилам (MP) и (Nec), а второй — проверяет, верно ли, что $M \models B$, но $M \not\models A$, то есть A опровергается хотя бы в одной точке модели M. $\square$

2.7 Сильная полнота и модально компактные классы шкал

Множество формул Γ называется *выполнимым в классе шкал* $\mathbb{F}$, или коротко $\mathbb{F}$-*выполнимым*, если существует модель $M = (F, V)$, где $F \in \mathbb{F}$, и точка $x \in W$, такие что $M, x \models \Gamma$. Легко видеть, что в терминах локального следования это можно равносильно переписать так: $\Gamma \not\models_{\mathbb{F}} \bot$.

Определение 2.48. Класс шкал $\mathbb{F}$ (*модально*) *компактен*, если для всякого множества формул Γ имеем: если каждое его конечное подмножество $\mathbb{F}$-выполнимо, то и все множество $\mathbb{F}$-выполнимо.

В терминах следования это переписывается так: $\forall \Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$ $(\Gamma \models_{\mathbb{F}} \bot \Rightarrow \exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$: $\Delta \models_{\mathbb{F}} \bot)$.

Теорема 2.49 (Связь сильной полноты и компактности)**.** *Логика L сильно локально полна относительно класса шкал $\mathbb{F}$ $\iff$ L полна относительно $\mathbb{F}$ и класс $\mathbb{F}$ модально компактен.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть L — СЛП отн. $\mathbb{F}$. Докажем, что $\mathbb{F}$ компактен. Пусть $\Gamma \models_{\mathbb{F}} \bot$. Ввиду СЛП получаем $\Gamma \vdash_L \bot$. Значит, $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$: $\Delta \vdash_L \bot$. По корректности заключаем $\Delta \models_{\mathbb{F}} \bot$.

($\Leftarrow$) Надо доказать: $\Gamma \models_{\mathbb{F}} A \Rightarrow \Gamma \vdash_L A$. Пусть $\Gamma \models_{\mathbb{F}} A$. Тогда $\Gamma, \neg A \models_L \bot$. Так как $\mathbb{F}$ компактен, $\exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$: $\Delta, \neg A \models_{\mathbb{F}} \bot$. Ввиду полноты L отн. $\mathbb{F}$ имеем $\Delta, \neg A \vdash_L \bot$, то есть $\Delta \vdash_L A$. Значит, $\Gamma \vdash_L A$. $\square$

Вопрос. Верна ли аналогичная связь для глобальных понятий? *Логика L сильно глобально полна относительно класса шкал $\mathbb{F}$ $\iff$ логика L глобально полна относительно $\mathbb{F}$ и класс $\mathbb{F}$ глобально компактный*? Этот вопрос связан с вопросом, сформулированным после Следствия 2.37.

Здесь: класс шкал $\mathbb{F}$ (*модально*) *глобально компактен*, если для всякого множества формул Γ имеем: если каждое его конечное подмножество глобально $\mathbb{F}$-выполнимо, то и все множество глобально $\mathbb{F}$-выполнимо. Множество формул Γ называется *глобально* $\mathbb{F}$-*выполнимым*, если существует такая модель $M = (F, V)$ со шкалой $F \in \mathbb{F}$, что $M \models \Gamma$.

Сформулируем глобальную компактность класса $\mathbb{F}$ в терминах глобального следования так: $\Gamma \models^*_{\mathbb{F}} \bot \implies \exists$ конечное $\Delta \subseteq \Gamma$: $\Delta \models^*_{\mathbb{F}} \bot$. Итак, вопрос: следует ли аналогичное для $\Gamma \models^*_{\mathbb{F}} A$?

Лемма 2.50. *Класс всех конечных шкал не является модально компактным.*

Доказательство. Докажем про множество формул $\Gamma = \{\neg\Box(p_i \leftrightarrow p_j) \mid i \neq j, i, j \geqslant 0\}$ два утверждения.

1) *Множество Γ не выполнимо ни в какой конечной шкале.* Действительно, пусть $M = (W, R, V)$ — конечная модель, $x \in W$. Обозначим $X_i = V(p_i) \cap R(x)$. Поскольку $X_i \subseteq R(x)$ и $R(x)$ конечное, найдутся такие $i \neq j$, что $X_i = X_j$. Это значит, что $M, x \models \Box(p_i \leftrightarrow p_j)$. Тем самым $M, x \not\models \Gamma$.

2) *Каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в некоторой конечной шкале.* Действительно, достаточно взять модель M с точкой x, имеющей достаточное количество подмножеств в $R(x)$, чтобы сделать попарно разными множества $X_i = V(p_i) \cap R(x)$, где переменная p_i входит в Δ. Иными словами, если $\mathsf{Var}(\Delta) \subseteq \{p_1, \ldots, p_m\}$ и обозначить $n := |R(x)|$, то достаточно взять такую шкалу, чтобы было $m \leqslant 2^n$. Тогда в точке x окажутся истинными все формулы $\neg\Box(p_i \leftrightarrow p_j)$, входящие в Δ. $\square$

Очевидно, в приведенном выше доказательстве можно было рассматривать и класс конечных шкал с любым «разумным» дополнительным условием: рефлексивность, симметричность, транзитивность и т.д. Даже для конечных шкал с отношением эквивалентности R справедлива доказанная лемма.

Теорема 2.51. *Логика* **K** *не является СПОКШ (сильно полной относительно класса конечных шкал). Аналогично, «традиционные» логики* **KT**, **K4**, **K5**, **S4**, **S5** *и т.д. не являются СПОКШ.*

Позже (теорема 4.16) мы увидим, что СПОКШ являются лишь табличные логики (и только они).

Вопрос. Можно ли было в лемме обойтись конечным множеством переменных? Пустым множеством переменных? Это можно переформулировать так: является ли замкнутый фрагмент логики **K** сильно полным? (определение очевидно: надо брать квантор по множествам замкнутых формул $\Gamma \cup \{A\}$).

Класс конечных **GL**-шкал тоже не модально компактный. Достаточно ли для доказательства этого факта лишь замкнутых модальных формул?

Класс *всех* **GL**-шкал — тоже не модально компактный! Так как логика **GL** не является сильно полной. Достаточно ли для доказательства этого факта лишь замкнутых модальных формул?

3 Каноническая модель

Наша цель — для данной непротиворечивой нормальной логики L построить модель, в которой каждая теорема $A \in L$ истинна, а каждая не-теорема $A \notin L$ опровергается в некоторой точке.[7]

В произвольной модели $M = (W, R, V)$ с каждой точкой $x \in W$ можно связать совокупность формул, истинных в этой точке: $T = \mathsf{Theory}(M, x)$. Она является теорией, причем непротиворечивой ($\bot \notin T$) и (синтаксически) полной: для каждой формулы A либо $A \in T$, либо $\neg A \in T$. Кроме того, если мы рассматриваем L-модель, то есть если $F \models L$, то дополнительно имеем $T \supseteq L$. Если имеется две точки $x, x' \in W$, связанные отношением R, то есть $x\, R\, x'$, то их теории T и T' связаны следующим образом: для каждой формулы A, если $\Box A \in T$, то $A \in T'$. Эквивалентно, для каждой формулы B, если $B \in x'$, то $\Diamond B \in x$. Мы построим модель из всевозможных теорий, обладающих перечисленными выше свойствами, причем свяжем их отношением, в точности соответствующим указанному условию.

Пусть L — непротиворечивая *нормальная логика* (множество формул, содержащее логику **K** и замкнутое относительно правил вывода (MP), (Nec), (Sub)). Более того, замкнутость относительно Sub нам не потребуется, то есть конструкция применима ко всякой *нормальной теории* L. Напомним, *теория* — это множество формул T, содержащее **K** и замнутое по (MP).

Определение 3.1. Теория T называется (*синтаксически*) *непротиворечивой*, если не существует формулы A, такой что $A \in T$ и $\neg A \in T$; (*синтаксически*) *полной*, если для каждой формулы A либо $A \in T$ или $\neg A \in T$. Будем T называть *L-п.н.т.*, если T — непротиворечивая полная теория, содержащая L.

Непротиворечивость теории равносильна условию $\bot \notin T$, а также условию $T \neq \mathsf{Fm}$.

Определение 3.2. *Каноническая модель* логики L — это $M_L = (W_L, R_L, V_L)$, где

- $W_L = \{\, x \mid x$ есть L-п.н.т.$\,\}$,
- $x\, R_L\, y \;\leftrightharpoons\; \forall A\; (\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in x)$,
- $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x$.

Мы докажем: $\mathsf{Theory}(M_L) = L$. Для этого нам понадобятся вспомогательные факты.

Обозначим[8] через $T + A$ наименьшую теорию, содержащую теорию T и формулу A.

Лемма 3.3. *Наименьшая теория, содержащая теорию T и формулу A, вычисляется по формуле:*

$$T + A \;=\; \{B \mid (A \to B) \in T\}.$$

Доказательство. С одной стороны, множество в правой части равенства содержит A, T и замкнуто по (MP) (ввиду соответствующей тавтологии). С другой стороны, всякая теория, содержащая A и T, непременно должна содержать и каждую формулу B, такую что $(A \to B) \in T$. □

Лемма 3.4. *Если теория T непротиворечива, то теория $T + A$ или $T + \neg A$ непротиворечива.*

Доказательство. Если бы $\bot$ принадлежала обоим теориям, то $(A \to \bot) \in T$ и $(\neg A \to \bot) \in T$, откуда по известной тавтологии и правилу (MP) получили бы $\bot \in T$. □

Лемма 3.5 (Линденбаума)**.** *Всякая непротиворечивая теория содержится в некоторой полной непротиворечивой теории.*

---

[7] В конспекте 2014–2015 года, раздел 5, уже была приведена конструкция канонической модели. Там в качестве точек канонической модели брались максимальные L-непротиворечивые множества формул (L-м.н.м.). Здесь мы пойдем иначе — в качестве точек канонической модели будут выступать (синтаксически) полные (синтаксически) непротиворечивые теории, содержащие логику L (мы их называем L-п.н.т.). Все доказательства будут проведены в терминах теорий. Этот подход равносилен прежнему: множество формул есть L-м.н.м. $\Leftrightarrow$ оно есть L-п.н.т., как мы докажем в лемме 3.9.

На лекции в 2019 г. доказательство было устроено так: сначала мы доказали равносильность двух подходов (лемму 3.9), а затем фактически последовали старому доказательству из конспекта 2014–2015 года, раздел 5.

[8] Есть другая традиция обозначений (например, в книге Чагрова и Захарьящева «Modal logic»): $L\{A\}$ означает добавление к логике (или теории) L формулы A и замыканию по (MP) (получается теория); $L + A$ — замыкание по (MP) и (Sub) (получается логика); $L \oplus A$ — замыкание по (MP), (Sub), (Nec) (получается нормальная логика). Здесь же мы используем обозначение $T + A$ для замыкания лишь по (MP), но применяем его не только для логик, а для теорий T.

Доказательство. Пусть теория T_0 непротиворечива. Перенумеруем все формулы: $\mathsf{Fm} = \{A_0, A_1, \ldots\}$. Построим башню непротиворечивых теорий:

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n + A_n, & \text{если получается непротиворечивая теория,} \\ T_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что их объединение: $T := \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ — полная непротиворечивая теория.

1) T — теория: если $A, A \to B \in T$, то для некоторых m, n имеем $A \in T_m$ и $(A \to B) \in T_n$. Взяв максимум $k = \max(m, n)$, получаем $A, A \to B \in T_k$, откуда $B \in T_k$ (ибо T_k — теория) и $B \in T$.

2) T — непротиворечива: если бы $\bot \in T$, то $\bot \in T_n$ для некоторого n, чего не может быть.

3) T — полна: допустим $A_n \notin T$ и $\neg A_n \notin T$. Будем считать $A_m = \neg A_n$. Формулы A_n и A_m не попали в T, поскольку теории $T_n + A_n$ и $T_m + A_m$ противоречивы. Взяв $k = \max(m, n)$, мы заключаем, что обе теории $T_k + A_n$ и $T_k + \neg A_n$ противоречивы, что невозможно по лемме 3.4. $\square$

Лемма 3.6 (О п.н.т.)**.** *Пусть T — полная непротиворечивая теория. Тогда:*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \neg A \in T & \iff & A \notin T \\ (2) & (A \wedge B) \in T & \iff & A \in T \text{ и } B \in T \\ (3) & (A \vee B) \in T & \iff & A \in T \text{ или } B \in T \\ (4) & (A \to B) \in T & \iff & (A \in T \Rightarrow B \in T) \end{array}$$

Доказательство. (1) по определению. Остальные пункты доказываются однотипно. Например, пусть $(A \wedge B) \in T$. Допустим, $A \notin T$ и $B \notin T$. Ввиду полноты $\neg A, \neg B \in T$. Но ввиду тавтологии $(A \vee B) \to (\neg A \to (\neg B \to \bot))$, принадлежащей T, по правилу (MP) заключаем $\bot \in T$. $\square$

Лемма 3.7 (О канонической модели)**.** $M_L, x \models A \iff A \in x,$ *для всех $x \in W_L$ и формул A.*

Доказательство. Индукция по построению формулы A. База индукции верна по построению оценки. Шаги про булевы связки следуют из леммы 3.6. Остается шаг модальности: $x \models \Box A \Leftrightarrow \Box A \in x$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\Box A \in x$. Чтобы проверить $x \models \Box A$, возьмем любой y, такой что $x\, R_L\, y$. По построению R_L имеем $A \in y$. По предположению индукции $y \models A$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Box A \notin x$. Рассмотрим множество формул $\sharp x = \{B \mid \Box B \in x\}$.

Утверждение. *Множество $\sharp x$ — непротиворечивая теория, содержащая логику L.*

▷ 1) Докажем $L \subseteq \sharp x$. Если $C \in L$, то по нормальности L имеем $\Box C \in L \subseteq x$, а значит, $C \in \sharp x$.

2) Докажем, что $\sharp x$ замкнут по (MP). Если $C, C \to D \in \sharp x$, то $\Box C, \Box(C \to D) \in x$. Поскольку $\mathbf{K} \subseteq L \subseteq x$, имеем $\Box(C \to D) \to (\Box C \to \Box D) \in x$. По (MP) заключаем $\Box D \in x$ и тем самым $D \in \sharp x$.

3) Докажем, что $\bot \notin \sharp x$. В противном случае $\Box \bot \in x$. Но поскольку $\Box \bot \to \Box A$ — теорема логики $\mathbf{K}$, а значит, принадлежит x, то по (MP) мы получили бы $\Box A \in x$, что не так по предположению. ◁

Рассмотрим теорию $Y = \sharp x + \{\neg A\}$. Она содержит L. Если мы докажем, что она непротиворечива, то по лемме Линденбаума она содержится в некоторой L-п.н.т. $y \in W_L$. Тогда мы будем иметь: $x\, R_L\, y$ и $\neg A \in y$, значит $A \notin y$, и по предположению индукции $y \not\models A$. Этого и влечет требуемое: $x \not\models \Box A$.

Допустим $\bot \in Y$. По определению $+$ это значит $(\neg A \to \bot) \in \sharp x$. Ввиду тавтологии $(\neg A \to \bot) \to A$, принадлежащей $\sharp x$, по (MP) заключаем $A \in \sharp x$, то есть $\Box A \in x$, что не так по предположению. $\square$

Предыдущую лемму можно переформулировать так: $\mathsf{Theory}(M_L, x) = x$.

Теорема 3.8. $M_L \models A \iff L \vdash A,$ *для любой формулы A. Иначе говоря,* $\mathsf{Theory}(M_L) = L$.

Доказательство. Если $L \vdash A$, то есть $A \in L$, то для каждого $x \in W_L$ ввиду $L \subseteq x$ имеем $A \in x$. Тогда $M_L, x \models A$. Поскольку это доказано для всех $x \in W_L$, то $M_L \models A$.

Если же $L \nvdash A$, то есть $A \notin L$, то теория $L + \neg A$ (синтаксически) непротиворечива. Действительно, если бы $\bot \in (L + \neg A)$, то по определению $+$ мы имели бы $(\neg A \to \bot) \in L$, что влечет $A \in L$. Кроме того, эта теория содержит L. Тогда по лемме Линденбаума эта теория содержится в некоторой полной теории $x \in W_L$. Отсюда заключаем $M_L, x \models \neg A$ и тем самым $M_L \not\models A$. $\square$

Следующая лемма показывает, что два способа построения канонической модели равносильны.

Напомним, что множество формул Γ называется *L-непротиворечивым*, если $\Gamma \nvdash_L \bot$. Это равносильно более привычному определению: если не существует таких формул $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$, что $\vdash_L \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ (докажите равносильность этих определений). Множество формул Γ называется *максимальным L-непротиворечивым* (кратко: L-м.н.м.), если оно L-непротиворечиво и максимально (по $\subseteq$) среди L-непротиворечивых множеств.

Мы воспользуемся леммой (доказательство см. в конспекте 2014–2015 года, лемма 5.1):
если Γ L-непротиворечиво и $A \in \mathsf{Fm}$, то $\Gamma \cup \{A\}$ или $\Gamma \cup \{\neg A\}$ L-непротиворечиво.

Лемма 3.9. *Произвольное множество формул есть L-м.н.м $\iff$ оно есть L-п.н.т.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть Γ — L-м.н.м.

1) Γ синтаксически непротиворечиво: если бы $A, \neg A \in \Gamma$, то очевидно $\Gamma \vdash_L \bot$.

2) Γ синтаксически полно. Если бы $A \notin \Gamma$ и $\neg A \in \Gamma$, то одно из множеств $\Gamma \cup \{A\}$ или $\Gamma \cup \{\neg A\}$ будет L-непротиворечивым строгим расширением множества Γ, что противоречит его максимальности.

3) $L \subseteq \Gamma$. Если бы нашлась $A \in L$, такая что $A \notin \Gamma$, то $\neg A \in \Gamma$, но тогда множество Γ оказалось бы L-противоречивым, поскольку $\neg A \vdash_L \bot$ и тем самым $\Gamma \vdash_L \bot$.

4) Множество Γ замкнуто по (MP). Пусть $A, A \to B \in \Gamma$. Если бы $B \notin \Gamma$, то $\neg B \in \Gamma$. Тогда $\Gamma \vdash_L \bot$, поскольку $A, A \to B, \neg B \vdash_L \bot$.

($\Leftarrow$) Пусть T — L-п.н.т. Поскольку $T \supseteq L$ и T замкнуто по (MP), то всякая формула, локально выводимая из T в логике L принадлежит T: если $T \vdash_L A$, то $A \in T$.

1) Множество T — L-непротиворечиво. Если бы $T \vdash_L \bot$, то $\bot \in T$.

2) Множество T максимально среди L-непротиворечивых множеств. Допустим, $\Gamma \supsetneq T$. Тогда существует формула $A \in \Gamma$, такая что $A \notin T$. Значит, $\neg A \in T \subseteq \Gamma$. Поскольку $A, \neg A \vdash_L \bot$, заключаем $\Gamma \vdash_L \bot$, то есть Γ не является L-непротиворечивым. $\square$

3.1 Канонические логики и их сильная полнота

По теореме 3.8 всякая непротиворечивая нормальная логика L полна относительно своей канонической модели M_L. Если окажется, что F_L есть L-шкала, то L окажется полной по Крипке (относительно своей канонической шкалы). Но мы покажем большее — логика L окажется даже сильно полной.

Определение 3.10. Нормальная непротиворечивая логика L называется *канонической*, если $F_L \models L$.

Теорема 3.11. *Всякая каноническая логика сильно полна.*
Более того, она сильно полна относительно своей канонической шкалы.

Доказательство. Пусть $F_L \models L$. По теореме корректности, если $\Gamma \vdash_L A$, то $\Gamma \underset{L}{\models} A$. Докажем обратную импликацию. Допустим $\Gamma \nvdash_L A$. Тогда множество $\Gamma \cup \{\neg A\}$ является L-непротиворечивым: если бы $\Gamma, \neg A \vdash_L \bot$, то по теореме о дедукции $\Gamma \vdash_L (\neg A \to \bot)$, а значит, $\Gamma \vdash_L A$. По лемме Линденбаума $\Gamma \cup \{\neg A\}$ содержится в некотором L-м.н.м. $x \in W_L$. Тогда $M_L, x \models \Gamma$ и $M_L, x \not\models A$. Поскольку M_L является L-моделью (ввиду каноничности логики L), мы заключаем, что $\Gamma \underset{L}{\not\models} A$. $\square$

3.2 Выполнимость непротиворечивых (нормальных) теорий

Как мы знаем, верны следующие утверждения.

- Теория всякой отмеченной модели $\mathsf{Theory}(M, x)$ является теорией (причем полной).
- Теория всякого класса отмеченных моделей является теорией.
- Теория всякой модели $\mathsf{Theory}(M)$ является нормальной теорией.
- Теория всякого класса моделей является нормальной теорией.

Кроме того, если в этих утверждениях модели были L-моделями (то есть в их шкале была общезначима логика L), то получающиеся теории содержат L. Здесь мы докажем, что во всех четырех случаях верно и обратное утверждение, если логика L каноническая.

Теорема 3.12. *Пусть теория T (синтаксически) непротиворечива.*

а) *Тогда T есть теория некоторого класса отмеченных моделей.*

б) *Если T (синтаксически) полна, то T есть теория некоторой отмеченной модели.*

в) *Если T нормальна, то она есть теория некоторой модели.*

Доказательство. Удобно доказывать в другом порядке.

б) Пусть T — полная непротиворечивая теория. Тогда она — точка модели $M_{\mathbf{K}}$, ее можно обозначить более привычно $x := T$. Имеем: $T = \mathsf{Theory}(M_{\mathbf{K}}, x)$.

а) Пусть T — непротиворечивая теория. По лемме Линденбаума она содержится в некоторых полных непротиворечивых теориях, то есть в некоторых точках модели $M_{\mathbf{K}}$. Обозначим $X = \{x \in W_{\mathbf{K}} \mid T \subseteq x\}$. Мы утверждаем, что T является теорией всех этих точек (другими словами, теория соответствующих отмеченных моделей), то есть $T = \mathsf{Theory}(\{(M_{\mathbf{K}}, x) \mid T \subseteq x\})$.

Включение $\supseteq$ очевидно. Обратно, пусть $A \notin T$. Тогда теория $T + \neg A$ непротиворечива. По лемме Линденбаума она содержится в некотором $x \in W_{\mathbf{K}}$. Тогда $M_{\mathbf{K}}, x \not\models A$ и значит $A \notin \mathsf{Theory}(M_{\mathbf{K}}, x)$.

в) Нормальная теория L является теорией своей канонической модели M_L. □

Если указанные в предыдущей теореме теории содержали нормальную логику L, то в случае каноничности логики L в заключении теорем можно вместо «модель» всюду написать L-модель.

Теорема 3.13. *Пусть L — каноническая логика, теория $T \supseteq L$ (синтаксически) непротиворечива.*

а) *Тогда T есть теория некоторого класса отмеченных L-моделей.*

б) *Если T (синтаксически) полна, то T есть теория некоторой отмеченной L-модели.*

в) *Если T нормальна, то она есть теория некоторой L-модели.*

Доказательство. Ввиду каноничности логики L ее каноническая модель M_L является L-моделью.

б) Такая теория T является точкой модели M_L; теория этой точки есть в точности T.

а) Такая T будет теорией множества всех точек x модели M_L, таких что $T \subseteq x$. Доказательство — как в предыдущей теореме 3.12.

в) Имеем $T = \mathsf{Theory}(M_T)$. Из нормальности теории T вытекает,[9] что ее каноническая модель M_T — порожденная подмодель модели M_L. Поскольку общезначимость формул сохраняется при переходе к порожденной подмодели, мы заключаем, что M_T — тоже L-модель. □

[9]Доказательство см. в конспекте 2014–2015, лемма 5.9. Хотя там речь шла о нормальных *логиках*, те же рассуждения проходят и для нормальных теорий, как собственно и вся конструкция канонической модели. Для нормальных теорий доказательство было дано в конспекте 2016–2017, лемма 6.10.

4 Конечные шкалы Крипке

Существует область логики предикатов — «Теория конечных моделей», изучающая выразительные возможности логики первого порядка и ее расширений (обобщенными кванторами, бесконечными конъюнкциями, транзитивным замыканием, неподвижными точками и т.п.) на конечных моделях. Там доказываются критерии аксиоматизируемости классов конечных моделей, изучаются игры, позволяющие доказывать аналоги классических результатов в обход компактности (которой в случае конечных моделей нет), изучаются вопросы вычислительной сложности (что становится возможным благодаря конечности изучаемых моделей).

В модальной логике тоже можно выделить аналогичную область. Поскольку основной акцент при изучении модальных *логик* ставится на шкалах (какова логика того или иного класса шкал, какие классы шкал модально определимы и т.д.), то здесь аналогом можно считать «Теорию конечных шкал». Один из результатов, относящихся к этой области, уже изложен в конспекте 2018–2019: это модальные формулы Янкова–Файна и доказательство, с их помощью, критерия определимости классов конечных транзитивных шкал (аналога теоремы Гольдблатта–Томасона).

В этом разделе мы установим, что логика одной конечной шкалы конечно аксиоматизируема. Мы оставим неотвеченным вопрос, можно ли эту конечную аксиоматику получить эффективно по данной шкале. Известен положительный ответ на этот вопрос для транзитивных шкал (результат Скворцова), но в данных конспектах он не разбирается (пока). Имеется еще ряд известных результатов, которые пока не разбираются в этих конспектах, например: *Две конечные шкалы Крипке, каждая из которых порождена одной точкой, имеют одну и ту же модальную логику* $\Leftrightarrow$ *они изоморфны.* Ряд других вопросов, ответ на который нам неизвестен (хотя может быть они решены) перечислен в конце раздела.

4.1 Табличные логики

В этом разделе мы докажем, что (нормальная) модальная логика всякой конечной шкалы Крипке конечно аксиоматизируема; то есть для любой конечной шкалы $F = (W, R)$ существует формула A, такая что $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$. Сначала идут несколько вспомогательных параграфов.

4.1.1 Модально различимые модели

Модель $M = (W, R, V)$ называется *модально различимой*, если любые две различные ее точки различимы некоторой модальной формулой: $\forall x \neq y \in W\ \exists A \in \mathsf{ML}$: $M, x \models A$ и $M, y \not\models A$.

Лемма 4.1. *Пусть M — модально различимая модель, $x_1, \dots, x_n \in W$ — попарно различные точки. Тогда существуют модальные формулы $A_1, \dots, A_n$, такие что $M, x_i \models A_j \Leftrightarrow i = j$.*

Доказательство. Ввиду модальной различимости, для каждых $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ существует такая формула B_{ij}, что $x_i \models B_{ij}$ и $x_j \not\models B_{ij}$. (Можно даже считать, что $B_{ji} = \neg B_{ij}$, хотя далее это не так важно.) Докажем, что формулы $A_i := \bigwedge_{j \neq i} B_{ij}$ — искомые. С одной стороны, $x_i \models B_{ij}$ для всех $j \neq i$, а потому $x_i \models A_i$. С другой стороны, для каждого $j \neq i$ имеем $x_i \not\models A_j$, поскольку $x_i \not\models B_{ji}$. $\square$

Пусть M — модель Крипке, A — формула. Будем писать $M \models A^*$, если в M истинны все подстановочные примеры формулы A; то есть если $M \models A^\sigma$ для всех подстановок σ.

Лемма 4.2. *Пусть*[10] *$M = (F, V)$ — конечная модально различимая модель, A — любая модальная формула. Тогда если $M \models A^*$, то $F \models A$.*

Доказательство. Пусть $F = (W, R)$, где $|W| = n$. По лемме 4.1 каждую точку $x \in W$ задает некоторая формула E_x, то есть $M, y \models E_x \Leftrightarrow y = x$, для $\forall y \in W$. Тогда всякое подмножество $X \subseteq W$ задает формула $E_X = \bigvee_{x \in X} E_x$, то есть $M, y \models E_X \Leftrightarrow y \in X$, для $\forall y \in W$.

Пусть $M \models A^*$. Чтобы доказать $F \models A$, рассмотрим любую оценку U на шкале F, обозначим модель $N = (F, U)$, и докажем $N \models A$. Для каждой переменной p из формулы A возьмем формулу D_p, задающую множество точек $U(p)$, в которых истинна эта переменная в модели N, то есть $D_p := E_{U(p)}$. Рассмотрим подстановку σ вместо переменных $p \in \mathsf{Var}(A)$ формул D_p.

[10] Это утверждение уже доказывалось в конспекте 2014–2015, см. доказательство Теоремы 8.5.

Легко доказать (индукцией по построению формулы), что $N, x \models B \Leftrightarrow M, x \models B^\sigma$, для всякой формулы B. По условию, $M \models A^*$. В частности, $M \models A^\sigma$. Тогда $N \models A$, что и требовалось. $\square$

Модальную формулу A будем называть[11] *стабильной*, если для каждой (не обязательно конечной) модально различимой модели $M = (F, V)$ из $M \models A^*$ следует $F \models A$.

Лемма 4.3. *Если формула стабильна и общезначима хотя бы на одной шкале,*[12] *то она каноническая.*

Доказательство. Пусть $F \models A$. Тогда логика $L = \mathbf{K} \oplus A$ непротиворечива, ибо $F \models L$. Ее каноническая модель $M_L = (F_L, V_L)$ модально различима.[13] Кроме того, $M_L \models A^*$, поскольку $M_L \models L$ и логика L замкнута относительно правила подстановки, а значит $L \vdash A^*$. Ввиду стабильности формулы A получаем $F_L \models A$, что и означает каноничность формулы A. $\square$

4.1.2 Формулы, ограничивающие высоту и ширину шкалы

Говорим, что шкала $F = (W, R)$ имеет *высоту* $< n$, если не существует цепи вида $x_1 \, R \, x_2 \, R \ldots R \, x_n$ из *попарно различных* точек. Шкала F имеет *ширину* $< n$, если $|R(x)| < n$ для каждой точки $x \in W$.

Рассмотрим элементарные конъюнкции $C_i := p_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg p_j$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$, и формулы:

$$\begin{aligned} \mathsf{Height}^{<n} &:= \neg\big[\, C_1 \wedge \Diamond(C_2 \wedge \Diamond(C_3 \wedge \ldots \Diamond C_n))\,\big] \\ \mathsf{Width}^{<n} &:= \neg\big[\, \Diamond C_1 \wedge \Diamond C_2 \wedge \ldots \wedge \Diamond C_n \,\big] \end{aligned}$$

Лемма 4.4. а) $F \models \mathsf{Height}^{<n} \iff$ *шкала F имеет высоту $< n$,*
б) $F \models \mathsf{Width}^{<n} \iff$ *шкала F имеет ширину $< n$.*

Доказательство. Упражнение. $\square$

Лемма 4.5. *Формула* $\mathsf{Height}^{<n}$ *— стабильная. Следовательно, она каноническая.*

Доказательство. Пусть $A = \mathsf{Height}^{<n}$, модель $M = (F, V)$ — модально различимая. Допустим $F \not\models A$. По лемме 4.4(а), в F имеется цепь $x_1 \, R \ldots R \, x_n$ из n попарно различных точек. По лемме 4.1, имеются такие формулы $D_1, \ldots, D_n$, что $M, x_i \models D_j \Leftrightarrow i \neq j$. Значит, $M, x_i \models D_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg D_j$. То есть $M, x_i \models (C_i)^\sigma$, где подстановка $\sigma = [D_1, \ldots, D_n / p_1, \ldots, p_n]$. Тогда $M, x_1 \models \neg A^\sigma$. Значит, $M \not\models A^*$. $\square$

Лемма 4.6. *Формула* $\mathsf{Width}^{<n}$ *— стабильная. Следовательно, она каноническая.*

Доказательство. Пусть $A = \mathsf{Width}^{<n}$, модель $M = (F, V)$ — модально различимая. Допустим $F \not\models A$. По лемме 4.4(б), в F имеется такая точка x и n попарно различных точек $y_1, \ldots, y_n$, что $x \, R \, y_i$. По лемме 4.1, имеются такие формулы $D_1, \ldots, D_n$, что $M, y_i \models D_j \Leftrightarrow i \neq j$. Значит, $M, y_i \models D_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg D_j$. То есть $M, y_i \models (C_i)^\sigma$, где подстановка $\sigma = [D_1, \ldots, D_n / p_1, \ldots, p_n]$. Тогда $x \models \neg A^\sigma$. Значит, $M \not\models A^*$. $\square$

4.1.3 Критерий табличности модальной логики

Определение 4.7. Нормальная логика L называется *табличной* (tabular), если она есть логика $L = \mathsf{Logic}(F)$ некоторой конечной шкалы F.

Из определения следует, что табличная логика полна по Крипке. Кроме того, она *разрешима*:[14] чтобы по формуле A узнать, что $L \vdash A$, достаточно проверить $F \models A$, где F — конечная шкала.

Обозначим формулу: $\mathsf{Tab}_n := \mathsf{Height}^{<n} \wedge \mathsf{Width}^{<n}$. Следующая теорема — **критерий табличности**.

[11] Не занят ли этот термин?

[12] Условие «формула A общезначима хотя бы на одной шкале» равносильно условию $A \in \mathbf{Triv} \cup \mathbf{Ver}$.

[13] Доказательство этого тривиального факта см. в конспекте 2016–2017 года, Лемма 6.11.

[14] Для знакомых с классами вычислительной сложности: *Проблема выполнимости формул для табличной логики является* NP*-полной.* Действительно, с одной стороны, она содержит в качестве частного случая проблему выполнимости формул логики высказываний. С другой стороны, чтобы проверить, что формула A выполнима на данной шкале F, достаточно угадать оценку переменных, входящих в A — а это «подсказка» (или, как говорят, сертификат) полиномиального, даже линейного размера от длины формулы $|A|$ (так как размер шкалы $|W|$ в этом случае считается константой), — и убедиться, что формула A истинна в какой-то из точек получившейся конечной модели.

Теорема 4.8. *Для любой непротиворечивой нормальной логики L верна эквивалентность:*

$$\textit{логика } L \textit{ таблична} \quad \Longleftrightarrow \quad L \vdash \mathsf{Tab}_n \textit{ для некоторого } n \geqslant 2.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $L = \mathsf{Logic}(F)$ для шкалы F из $|W| < n$ точек, то у шкалы F и высота, и ширина $\leqslant n$, а тогда $F \models \mathsf{Tab}_n$ по лемме 4.4. Тем самым, $L \vdash \mathsf{Tab}_n$.

($\Leftarrow$) Пусть $L \vdash \mathsf{Tab}_n$. Формула Tab_n каноническая по леммам 4.5 и 4.6, поэтому $F_L \models \mathsf{Tab}_n$. По лемме 4.4 шкала F_L имеет высоту $< n$ и ширину $< n$. Тогда всякая ее подшкала, порожденная точкой, имеет размер $|W| < 1 + n + n^2 + \ldots + n^{n-1} =: f(n)$. Существует лишь конечное количество попарно неизоморфных шкал такого размера. Возьмем из них по одному представителю; получим конечный класс конечных шкал $\mathbb{K}$.

Утверждение. *Логика L полна относительно класса шкал $\mathbb{K}$:* $\quad L \vdash A \;\Leftrightarrow\; \mathbb{K} \models A.$

$\triangleright$ ($\Rightarrow$) Пусть $L \vdash A$. Тогда $L \vdash A^*$, а значит, $M_L \models A^*$. Тогда в каждой подмодели $M = (F, V)$ модели M_L, порожденной одной точкой, тоже имеем $M \models A^*$. Поскольку M_L модально различима, M — тоже. Кроме того, M конечна. По лемме 4.2 заключаем $F \models A$.

($\Leftarrow$) Если $L \nvdash A$, то A опровергается в некоторой точке x канонической модели M_L, а значит, и в ее подмодели $M = (F, V)$, порожденной точкой x. Значит, A опровергается на некоторой шкале из $\mathbb{K}$. $\triangleleft$

Итак, L есть логика несвязной суммы шкал из $\mathbb{K}$, то есть конечной шкалы. Значит, L таблична. $\square$

При доказательстве этой теоремы было установлено следующее утверждение общего характера: *Если логика полна относительно некоторого класса конечных модально различимых моделей, то она полна относительно класса (конечных) шкал, на которых основаны эти модели.*

4.1.4 Конечная аксиоматизируемость табличных логик

Расширением нормальной логики L называется произвольная нормальная логика $L' \supseteq L$.

Лемма 4.9. *Всякая табличная логика L имеет конечное число расширений и все они табличны.*

Доказательство. По критерию табличности $\exists n$: $L \vdash \mathsf{Tab}_n$. Рассмотрим любое расширение $L' \supseteq L$. Тогда $L' \vdash \mathsf{Tab}_n$. По критерию табличности L' — тоже табличная.

Более того, в доказательстве критерия табличности было установлено, что если $L' \vdash \mathsf{Tab}_n$, то L' — логика некоторого класса конечных шкал размера $< f(n)$. Существует лишь конечное число попарно неизоморфных шкал такого размера. Из них можно составить лишь конечное число классов шкал, имеющих различные логики. Соответственно, логик таких классов шкал тоже конечное число. $\square$

Лемма 4.10. *Если $L \subsetneq L'$ и между L и L' нет логик, то L' конечно аксиоматизируема над L.*

Доказательство. Достаточно взять любую формулу $A \in (L' \setminus L)$. Мы утверждаем, что $L \oplus A = L'$. Включение $\subseteq$ очевидно. Если бы оно было строгим, то мы получили бы $L \subsetneq (L \oplus A) \subsetneq L'$. $\square$

Теорема 4.11 (McKay). *Всякая табличная логика — конечно аксиоматизируема.* Иначе говоря:
Логика любой конечной шкалы F аксиоматизируется одной формулой A: $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$.

Доказательство. Пусть L — табличная логика. Тогда $L \supseteq L_0 := \mathbf{K} \oplus \mathsf{Tab}_n$ для некоторого n. По лемме 4.9 логика L_0 имеет лишь конечное число расширений. В частности, логику L_0 и L соединяет *конечная* цепочка логик $L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \ldots \subsetneq L_s = L$, в которой между соседними логиками нет промежуточных. Логика L_0 конечно аксиоматизируема. По лемме 4.10 каждая L_{i+1} конечно аксиоматизируема над L_i. Следовательно, логика L — конечно аксиоматизируемая. $\square$

Похоже, ответ на следующий вопрос неизвестен:

Вопрос. *Существует ли алгоритм, который по конечной шкале F строит модальную формулу A, аксиоматизирующую логику этой шкалы:* $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$.

Однако, для случая транзитивных шкал ответ положительный (Д.П.Скворцов). Аналогично, положительный ответ для конечных интуиционистских шкал Крипке и интуиционистских пропозициональных формул. Для доказательства используются формулы Янкова.

4.1.5 Еще о стабильных и канонических модальных формулах

Задача 4.12. Докажите, что $F \models \mathsf{Alt}_n \iff$ шкала F имеет ширину $\leqslant n$, где формула:

$$\mathsf{Alt}_n \ = \ \Box p_0 \ \vee \ \Box(p_0 \to p_1) \ \vee \ \Box(p_0 \wedge p_1 \to p_2) \ \vee \ldots \vee \ \Box(p_0 \wedge \ldots \wedge p_{n-1} \to p_n).$$

Лемма 4.13. *Формулы Alt_n — стабильная (и, следовательно, каноническая).*

Доказательство. Пусть $A = \mathsf{Alt}_n$, модель $M = (F, V)$ — модально различимая. Перепишем формулу $\neg A$ в эквивалентном виде, используя $\Diamond$; попутно заменим в ней p_i на $\neg q_i$:

$$\neg\mathsf{Alt}_n : \quad \Diamond q_0 \wedge \Diamond(\neg q_0 \wedge q_1) \wedge \Diamond(\neg q_0 \wedge \neg q_1 \wedge q_2) \wedge \ldots \wedge \Diamond(\neg q_0 \wedge \ldots \wedge \neg q_{n-1} \wedge q_n).$$

Допустим $F \not\models A$. По Задаче 4.12, в F имеется точка x и попарно различные точки $y_0, \ldots, y_n$, такие что $x\, R\, y_i$. По лемме 4.1, существуют такие формулы $D_0, \ldots, D_n$, что $M, y_i \models D_j \Leftrightarrow i \neq j$. Значит, $M, y_i \models D_i \wedge \bigwedge_{j<i} \neg D_j$. То есть $M, y_i \models (\neg q_0 \wedge \ldots \wedge \neg q_{i-1} \wedge q_i)^\sigma$, где подстановка $\sigma = [D_0, \ldots, D_n / q_0, \ldots, q_n]$. Тогда $x \models \neg A^\sigma$. Значит, $M \not\models A^*$. ☐

Рассмотрим также формулу n-транзитивности: $\mathsf{Trans}_n \ = \ \Box p \wedge \ldots \wedge \Box^n p \to \Box^{n+1} p$, где $n \geqslant 1$.

Задача 4.14. а) $F \models \mathsf{Trans}_n \iff R^{n+1} \subseteq R^{\leqslant n} \iff R^* \subseteq R^{\leqslant n}$. Здесь $R^{\leqslant n} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.
б) Формула Trans_n каноническая.
в) Является ли эта формула стабильной? Например, при $n = 1$: формула $\Box p \to \Box\Box p$ каноническая?

В доказательстве критерия табличности (теорема 4.8) достаточно было работать с такой формулой T_n, которая, во-первых, является канонической, а во-вторых, если $F, x \models T_n$, то порожденная точкой x подшкала имеет размер, оцениваемый сверху некоторым числом $f(n)$, зависящим от n. Следовательно, мы можем заменить в критерии табличности формулы $\mathsf{Height}^{<n}$ и $\mathsf{Width}^{<n}$ на формулы Trans_n и Alt_n, соответственно, и получить следующий результат.

Теорема 4.15. *Нормальная логика L таблична $\iff L \vdash \mathsf{Alt}_n \wedge \mathsf{Trans}_n$ для некоторого n.*

Очевидно, невыполнимые формулы тоже стабильны по тривиальной причине (в определении посылка будет заведомо ложна). Замкнутые формулы тоже стабильны (для их стабильности даже не нужно требование, чтобы модель M была модально различимой).

Вопрос. а) Какие еще формулы стабильны? б) А если в определении сузить класс моделей, например, до моделей конечного ветвления, или модально насыщенных? в) Рассмотренные серии модальных формул соответствовали на шкалах условию первого порядка, имеющему вид $\forall^*$, то есть $\forall \vec{x}\, \Phi(\vec{x})$, где Φ — бескванторная. Будут ли стабильны все формулы такого типа? г) Вообще, является ли свойство «быть стабильной» зависящим лишь от того, какой класс шкал задает модальная формула, или всё же от записи самой модальной формулы?

4.2 Связь табличности и сильной полноты относительно конечных шкал

Теорема 4.16 (Золин,[15] 2019)**.** *Пусть L — нормальная модальная логика. Тогда:*

$$L \text{ сильно полна относительно конечных шкал (СПОКШ)} \iff L \text{ таблична.}$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $L = \mathsf{Logic}(F)$ для некоторой конечной шкалы F. По лемме 4.17 (ниже) класс $\{F\}$ модально компактен. Тогда по теореме 2.49 логика L сильно (локально) полна отн. $\{F\}$.

Кроме того, рассмотрим класс конечных шкал $\mathbb{F}$, состоящий из шкалы F и всех ее подшкал, порожденных одной точкой. Логика L сильно (локально) полна относительно $\mathbb{F}$, и $\mathbb{F}$ замкнут отн. взятия подшкалы, порожденной точкой. По лемме 2.45, логика L сильно *глобально* полна отн. $\mathbb{F}$.

[15] Аналогичная теорема (Dziobiak, 1980) известна для суперинтуиционистских пропозициональных логик. Точнее, она упомянута, без доказательства, в книге Одинцов С.П., Сперанский С.О., Дробышевич С.А. «Введение в неклассические логики» (2014). Еее доказательство лектору неизвестно; более того, и такой формулировки найти не удалось в статьях Dziobiak; в его работах 1980-х годов речь идет о (наследственно) структурно полных логиках или, более общо, отношениях следования (выводимости), и доказательства ведутся в терминах конечных матриц и их логик. Лектору удалось (осенью 2019 года) получить аналог этого результата для произвольных (!) модальных логик, а не только для расширений **S4**, для которых его следовало бы ожидать, зная о существовании результата для расширений Int.

($\Rightarrow$) Пусть L сильно полна относительно класса всех конечных L-шкал $\mathbb{F}$. По леммам 4.18 и 4.19 (ниже), найдется такое n, что у каждой шкалы из класса $\mathbb{F}$ и ширина, и высота $< n$ (определение ширины и высоты шкалы см. в разделе 4.1.2). Тогда на $\mathbb{F}$ общезначима, а значит, и принадлежит L, формула $\mathsf{Height}^{<n} \wedge \mathsf{Width}^{<n}$, то есть Tab_n. По критерию табличности (теорема 4.8) логика L таблична. $\square$

Мы называем шкалу F модально компактной, если класс $\{F\}$ таков.

Лемма 4.17. *Всякая конечная шкала модально компактна.*

Доказательство. Пусть $F = (W, R)$, где $W = \{a_1, \dots, a_s\}$. Пусть $\Gamma = \{A_0, A_1, \dots\}$ — бесконечное множество модальных формул, такое что каждое его конечное подмножество выполнимо в шкале F, то есть истинно в некоторой отмеченной модели (M, a) над шкалой F. Надо доказать, что всё множество Γ выполнимо в шкале F.

Способ 1. (Используем компактность логики предикатов.) Класс всех отмеченных моделей (M, a) со шкалой F — аксиоматизируем, то есть задается некоторым (даже конечным) множеством формул первого порядка в подходящей сигнатуре: $\Sigma = \{c_0, \dots, c_s; R, =; P_0, P_1, \dots\}$. Здесь c_i — константы, R — двуместный предикатный символ, P_i — одноместные предикатные символы. Формулы таковы: каждая точка есть одна из c_i; точки c_i попарно различны; ребра между c_i в точности таковы, как в шкале F.

Поскольку он аксиоматизируем, он *компактен* для языка первого порядка. Посмотрим (с помощью стандартного перевода) на модальные формулы A_i из Γ как на формулы с одной свободной переменной $A_i^*(x)$ в сигнатуре Σ. Пусть каждое конечное множество этих формул выполнимо в рассматриваемом классе первопорядковых структур. Тогда и всё множество формул первого порядка $A_i^*(x)$ выполнимо в рассматриваемом классе первопорядковых структур. Это и означает, что множество модальных формул Γ выполнимо в шкале F.

Способ 2. Приведем непосредственное доказательство. Пусть F — конечная шкала, $\Gamma = \{A_0, A_1, \dots\}$ — бесконечое множество модальных формул. Пусть каждое конечное подмножество множества Γ, в частности, каждое множество $\Delta_n = \{A_0, \dots, A_n\}$ выполнимо в F, то есть $M_n, x_n \models \Delta_n$ для некоторой модели $M_n = (F, V_n)$ и точки $x_n \in W$. Заметим, что если $n' > n$, то $M_{n'}, x_{n'} \models \Delta_n$.

Стабилизируем точку x_n. Бесконечная последовательность $(x_n)_{n\geqslant 0}$, состоит из точек конечного множества W. Значит, найдется точка $a \in W$, встречающаяся в этой последовательности бесконечно много раз. Выберем из $(M_n, x_n)_{n\geqslant 0}$ подпоследовательность, в которой все $x_n = a$. Чтобы не усложнять обозначения, без ограничения общности будем считать, что наша последовательность именно такова. Итак, имеем последовательность отмеченных моделей $(M_n, a)_{n\geqslant 0}$ со шкалой F, таких что $M_n, a \models \Delta_n$.

Стабилизируем оценку переменной p_0. Бесконечная последовательность оценок $V_n(p_0) \subseteq W$ переменной p_0 состоит из конечного числа элементов (подмножеств W). Значит, в ней существует подпоследовательность $V_n^0 := V_{k_n}$, где $0 \leqslant k_0 < k_1 < \dots$, такая что оценка переменной p_0 постоянна; обозначим ее $V(p_0) := V_n^0(p_0)$, и модель $M_n^0 = (F, V_n^0)$. По-прежнему $M_n^0, a \models \Delta_n$.

Стабилизируем оценку переменной p_i. Пусть уже построена последовательность оценок $(V_n^{i-1})_{n\geqslant 0}$, постоянная на переменных p_j для всех $j < i$. Выбираем ее подпоследовательность V_n^i, постоянную на переменной p_i; обозначаем оценку $V(p_i) := V_n^i(p_i)$ и модель $M_n^i = (F, V_n^i)$. Снова $M_n^i, a \models \Delta_n$.

Построение окончательной модели. Мы задали оценку $V(p_i)$ для всех переменных p_i. Таким образом, мы получили модель $M = (F, V)$. Утверждаем, что $M, a \models \Gamma$. Действительно, возьмем произвольную формулу $A_n \in \Gamma$. Пусть $\mathsf{Var}(A_n) \subseteq \{p_0, \dots, p_i\}$. На переменных $p_0, \dots, p_i$ оценка V совпадает с V_n^i. Для нее по построению $M_n^i, a \models A_n$. Поэтому $M, a \models A_n$. $\square$

Вопрос. Будет ли верна предыдущая лемма, если множество переменных Var несчетно?

Лемма 4.18 (О ширине шкал в компактных классах)**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — модально компактный класс конечных шкал. Тогда $\exists n$, такое что все шкалы из $\mathbb{F}$ имеют ширину $< n$.*

Доказательство. Допустим, для каждого $n \geqslant 1$ в классе $\mathbb{F}$ найдется шкала $F_n = (W_n, R_n)$ и точка $x_n \in W_n$, такие что $|R_n(x_n)| \geqslant n$. Перенесем доказательство леммы 2.50 на наш класс шкал $\mathbb{F}$.

Докажем про множество формул $\Gamma = \{\neg\Box(p_i \leftrightarrow p_j) \mid i \neq j, i, j \geqslant 0\}$ следующие два утверждения.

1) *Множество формул* Γ *не выполнимо в классе шкал* $\mathbb{F}$. Действительно, пусть $M = (W, R, V)$ — конечная модель, где $F \in \mathbb{F}$, и $x \in W$. Обозначим $X_i = V(p_i) \cap R(x)$. Поскольку $X_i \subseteq R(x)$ и $R(x)$ конечное, найдутся такие $i \neq j$, что $X_i = X_j$. Это значит, что $M, x \models \Box(p_i \leftrightarrow p_j)$. Тем самым $M, x \not\models \Gamma$.

2) *Каждое конечное подмножество* $\Delta \subseteq \Gamma$ *выполнимо в некоторой конечной шкале из* $\mathbb{F}$. Действительно, если $\mathsf{Var}(\Delta) \subseteq \{p_1, \ldots, p_m\}$, то возьмем шкалу F_n с таким номером, что $m \leqslant 2^n$. Поскольку $|R_n(x_n)| \geqslant n$, найдутся попарно различные подмножества $X_1, \ldots, X_m \subseteq R_n(x_n)$. Возьмем в качестве оценки переменных $p_1, \ldots, p_m$ именно эти множества: $V(p_i) := X_i$. Обозначим модель $M = (F_n, V)$. Тогда $M, x_n \models \neg\Box(p_i \leftrightarrow p_j)$ для всех $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Тем самым $M, x_n \models \Delta$. □

Лемма 4.19 (О высоте шкал в компактных классах)**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *— модально компактный класс конечных шкал. Тогда* $\exists n$, *такое что все шкалы из* $\mathbb{F}$ *имеют высоту* $< n$.

Доказательство. Допустим, для каждого $n \geqslant 1$ в классе $\mathbb{F}$ найдется шкала $F_n = (W_n, R_n)$, содержащая цепь из (нам удобнее взять) $(n+1)$ попарно различных точек $x_0 \, R_n \, x_1 \, R \ldots R x_n$.

Введем формулы $A_n \;=\; C_0 \wedge \Diamond(C_1 \wedge (C_2 \wedge \ldots \Diamond C_n))$, где $C_k = \bigwedge_{i \leqslant k} \neg p_i \;\wedge\; \bigwedge_{i > k} p_i$, то есть

$$
\begin{array}{rcr}
C_0 & = & p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n, \\
C_1 & = & \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n, \\
C_2 & = & \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge p_n, \\
C_n & = & \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n.
\end{array}
$$

Докажем про множество формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots\}$ следующие два утверждения.

1) *Множество* Γ *не выполнимо в классе шкал* $\mathbb{F}$. Действительно, формулы C_i попарно несовместны. Поэтому если $M, x \models \Gamma$, то из точки x ведут цепи всевозможных длин n из попарно различных точек. Это влечет бесконечность модели M.

2) *Каждое конечное подмножество* $\Delta \subseteq \Gamma$ *выполнимо в некоторой конечной шкале из* $\mathbb{F}$. Достаточно это доказать для множества вида $\Delta_n = \{A_1, \ldots, A_n\}$ (ибо всякое конечное множество содержится в некотором Δ_n). Возьмем шкалу F_n; в ней есть цепь $x_0 \, R_n \, x_1 \, R \ldots R x_n$ из попарно различных точек. Оценим переменные $p_1, \ldots, p_n$ так, чтобы $M, x_i \models C_i$. В итоге получаем $M, x \models A_k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$. □

Вопрос. Можно ли заменить в критерии табличности формулу $\mathsf{Height}^{<n}$ на $\neg A_n$, где A_n — из доказательства последней леммы? Если формула A_n выполнима в точке шкалы, то из этой точки идет цепь из $n+1$ попарно различных точек. Значит, если $F, x \models \neg A_n$, то все пути из точки x имеют длину $\leqslant n$. Осталось выяснить, является ли формула $\neg A_n$ стабильной, или (достаточно) канонической.

И вообще, если $C_1, \ldots, C_n$ — попарно несовместные элементарные конъюнкции, то формулы A_n, построенные из них, как в последней лемме, будут стабильными?

Вопрос, оставшийся без ответа: разрешима ли проблема: «*По конечной шкале* F *построить формулу* A, *аксиоматизирующую логику этой шкалы:* $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$»?

Для сравнения — известные результаты о неразрешимости:

1. (Чагров) Неразрешима проблема: «*Для фиксированной табличной логики* L *по модальной формуле* A *выяснить* $\mathbf{K} \oplus A = L$».

   Иными словами, для каждой фиксированной конечной шкалы F неразрешима проблема:

   «*По формуле* A *проверить, что* $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$».

   Как следствие, неразрешима проблема:

   «*По конечной шкале* F *и формуле* A *проверить* $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$».

2. Неразрешима проблема: «*По формулам* A *и* B *узнать, что* $\mathbf{K} \oplus A = \mathbf{K} \oplus B$».

   Значит, даже если бы мы ответили на неотвеченный выше вопрос, то есть научились по конечной шкале F строить аксиому ее логики $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus B$, это не противоречило бы тому, что несуществует алгоритма, проверяющего по формуле A, что $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$.

3. (Чагров) Неразрешима проблема: «*По формуле* A *узнать, что логика* $\mathbf{K} \oplus A$ *таблична*».
   То есть по формуле A узнать, существует ли конечная шкала F, такая что $\mathsf{Logic}(F) = \mathbf{K} \oplus A$

5 Максимальные нормальные модальные логики

5.1 Аксиоматика одноточечных шкал

Введем логики $\mathbf{Triv} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \leftrightarrow p)$ и $\mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus \Box p \leftrightarrow \bot = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$.

Лемма 5.1. *Логика одноточечной рефлексивной шкалы* $F_\circ = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ *равна* $\mathbf{Triv}$.

Доказательство. Докажем эквивалентность следующих трех утверждений, для любой формулы A:

(1) при стирании всех символов $\Box$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Triv} \vdash A$;
(3) $F_\circ \models A$.

(1) ⇒ (2) Для всякой формулы C обозначим через C' формулу, полученную из C стиранием всех $\Box$. Очевидно, $\mathbf{Triv} \vdash \Box B \leftrightarrow B$ для любой формулы B. Индукцией по построению формулы C легко доказать, что $\mathbf{Triv} \vdash C' \leftrightarrow C$.

Итак, $\mathbf{Triv} \vdash A' \leftrightarrow A$. По условию, A' — тавтология, значит, $\mathbf{Triv} \vdash A'$. Отсюда $\mathbf{Triv} \vdash A$.

(2) ⇒ (3) Следует из того, что $F_\circ \models \Box p \leftrightarrow p$.

(3) ⇒ (1) Допустим A' — не тавтология, то есть существует означивание переменных $i\colon \mathsf{Var} \to \{0, 1\}$, такое что $i(A') = 0$. Построим оценку переменных на шкале $F_\circ$ так: $e \models p \Leftrightarrow i(p) = 1$, для каждой $p \in \mathsf{Var}$. Полученную модель обозначим $M = (F_\circ, V)$. Значение $V(B)$ любой формулы B в модели M равно либо $\{e\}$, либо $\varnothing$. Пользуясь этим, легко показать, что $M, e \models B \Leftrightarrow i(B') = 1$, для любой модальной формулы B. В частности, ввиду $i(A') = 0$, имеем $M, e \not\models A$. Тем самым $F_\circ \not\models A$. □

Лемма 5.2. *Логика одноточечной иррефлексивной шкалы* $F_\bullet = (\{e\}, \varnothing)$ *равна* $\mathbf{Ver}$.

Доказательство. Аналогично, опираясь на эквивалентность следующих трех утверждений:

(1) при замене всех (внешних) символов $\Box$ на $\top$ формула A превращается в тавтологию;
(2) $\mathbf{Ver} \vdash A$;
(3) $F_\bullet \models A$. □

Упражнение 5.3. Докажите, что логики $\mathbf{Triv}$ и $\mathbf{Ver}$ полны по Посту. Напомним, что логика L называется *полной по Посту*, если всякое ее собственное расширение (то есть надмножество, являющееся нормальной логикой) противоречиво, то есть совпадает с множеством всех формул Fm.

5.2 Об истинности подстановочных примеров модальной формулы

Результат применения подстановки $\sigma\colon \mathsf{Var} \to \mathsf{Fm}$ к формуле A обозначаем A^σ. Напомним, что определяется он индуктивно по построению формулы:

$$(\neg A)^\sigma = \neg A^\sigma, \quad (A \wedge B)^\sigma = A^\sigma \wedge B^\sigma, \quad (\Box A)^\sigma = \Box A^\sigma.$$

Если $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, то ее (*модально*) *определимый вариант* — это модель $M^\sigma = (W, R, V^\sigma)$, где $V^\sigma(p) := V(p^\sigma)$ для каждой переменной $p \in \mathsf{Var}$; то есть $M^\sigma, x \models p \Leftrightarrow M, x \models A^\sigma$.

Утверждение. $M^\sigma, x \models A \quad\Leftrightarrow\quad M, x \models A^\sigma$. (*индукцией по построению формулы*)

Мы пишем $M \models A^*$, если $M \models A^\sigma$ для всех подстановок σ. Напомним полезный факт:

Лемма 5.4. *Если* $M = (F, V)$ *— конечная модально различимая*[16] *модель, и* $M \models A^*$*, то* $F \models A$.

Доказательство. 1) Для всяких $x \neq y \in W$ найдется формула A_{xy}, такая что $M, x \models A_{xy}$ и $M, y \not\models A_{xy}$.
2) Каждая точка $x \in W$ модально определима в модели M: положив $B_x = \bigwedge_{y \neq x} A_{xy}$, имеем $x \models B_x$ и для каждого $y \neq x$ имеем $y \not\models B_x$, ибо $y \not\models A_{xy}$. То есть $V(B_x) = \{x\}$.
3) Каждое подмножество $X \subseteq W$ модально определимо в модели M: обозначив $C_X := \bigvee_{x \in X} B_x$, будем иметь: $V(C_X) = \bigcup_{x \in X} V(B_x) = X$.

[16]Модель M *модально различима*, если $\forall x \neq y\ \exists B\colon M, x \models B$ и $M, y \not\models B$. См. консп. 2014–2015 г, док-во теоремы 8.5.

4) Пусть $M \models A^*$. Чтобы доказать, что $F \models A$, возьмем произвольную модель $M' = (F, V')$. Согласно (3), для каждой переменной p множество $V'(p)$ задается (в модели M) некоторой формулой D_p. Значит, M' является определимым вариантом модели M. А именно, рассмотрев подстановку $\sigma(p) = D_p$ для всех переменных $p \in \mathsf{Var}$, мы имеем $V'(p) = V(D_p) = V(p^\sigma) = V^\sigma(p)$. Значит, $M' = M^\sigma$. Поскольку $M \models A^*$, имеем $M \models A^\sigma$. Отсюда $M^\sigma \models A$, что и требовалось. $\square$

Упражнение. Пусть M — модально различимая модель, в которой каждая подмодель, порожденная одной точкой, конечна. Тогда если $M \models A^*$, то $F \models A$.

Например, это верно для любой модели над шкалой $(\mathbb{N}, \gtrdot)$. Здесь $m \gtrdot n \;\leftrightharpoons\; m = n + 1$.

5.3 Теорема Макинсона

Теорема 5.5 (Слабая теорема Макинсона[17]). *Логика всякой шкалы содержится в* **Ver** *или* **Triv**.

Доказательство. Пусть $L = \mathsf{Logic}(F)$. Если шкала F содержит «тупик» $x \in W\colon R(x) = \varnothing$, то одноточечная иррефлексивная шкала $(\{x\}, \varnothing)$ является порожденной подшкалой F; и тогда $L \subseteq \mathbf{Ver}$. Если же у каждой точки из F есть последователь: $\forall x \exists y\, (xRy)$, то отображение шкалы F на одноточечную рефлексивную шкалу $(\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$ является сюръективным p-морфизмом, и тогда $L \subseteq \mathbf{Triv}$. $\square$

Теорема 5.6 (Теорема Макинсона,[18] 1966).
Всякая непротиворечивая нормальная логика содержится в **Ver** *или* **Triv**.

Доказательство. Построим для рассматриваемой логики L каноническую модель M_L. Известно, что $L = \mathsf{Theory}(M_L)$. По приводимой ниже Лемме 5.7, логика L содержится в **Ver** или **Triv**. $\square$

Лемма 5.7. *Пусть модель M такова, что ее теория $L := \mathsf{Theory}(M)$ — не только нормальная теория, а нормальная логика (т.е. замкнута по правилу* Sub*). Тогда L содержится в* **Ver** *или* **Triv**.

Доказательство. Обозначим модель $M = (W, R, V)$ и шкалу $F = (W, R)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. В шкале F есть «тупик» x: $R(x) = \varnothing$. Тогда пусть M_x — подмодель модели M, порожденная точкой x. Тогда если $L \vdash A$, то $L \vdash A^*$, $M \models A^*$, $M_x \models A^*$. Модель M_x — конечная модально различимая. Тогда по лемме 5.4 формула A общезначима на ее шкале $(\{x\}, \varnothing)$, то есть $A \in \mathbf{Ver}$.

Случай 2. В шкале F у каждой точки есть последователь: $\forall x \exists y\, (xRy)$. Рассмотрим одноточечную рефлексивную шкалу $F' = (\{e\}, \{\langle e, e\rangle\})$. Очевидно, функция $h\colon W \to \{e\}$ является сюръективным p-морфизмом *шкал* $F \twoheadrightarrow F'$.

Пусть $L \vdash A$. Докажем $F' \models A$ (то есть $A \in \mathbf{Triv}$). Возьмем любую модель $M' = (F', V')$ и докажем $M' \models A$. Заметим: $V'(p)$ есть либо $\{e\}$, либо $\varnothing$. Построим модель $M^\sigma = (W, R, V^\sigma)$, где

$$\sigma(p) = \begin{cases} \top, & \text{если } V'(p) = \{e\}, \\ \bot, & \text{если } V'(p) = \varnothing. \end{cases} \qquad \text{Очевидно:} \quad V^\sigma(p) = \begin{cases} W, & \text{если } V'(p) = \{e\}, \\ \varnothing, & \text{если } V'(p) = \varnothing. \end{cases}$$

Поэтому h является сюръективным p-морфизмом *моделей* $M^\sigma \twoheadrightarrow M'$. Теперь имеем:

$$L \vdash A \implies L \vdash A^\sigma \iff M \models A^\sigma \iff M^\sigma \models A \implies M' \models A. \qquad \square$$

Заметим, что в доказательстве леммы 5.7 в обоих случаях нам потребовались лишь подстановки $\sigma\colon \mathsf{Var} \to \{\top, \bot\}$ (в случае 1 это явно не было видно, но поскольку F_x одноточечна, то всевозможные оценки переменных на шкале F_x можно воспроизводить уже такими оценками). Поэтому теорему Макинсона можно усилить так: *Всякая непротиворечивая нормальная теория, замкнутая относительно подстановок в формулу констант $\top$ и $\bot$ вместо всех переменных, содержится в* **Ver** *или* **Triv**.

Итак, противоречивая логика Fm имеет ровно два непосредственных предшественника: **Ver** и **Triv**.

Как мы увидим в разделе 6.1, никакого аналога теоремы Макинсона 5.6 для бимодальных логик (а тем более, для логик с $n > 2$ модальностями) не существует. (А теоремы 5.5?)

[17] Слабая теорема приводится лишь для сравнения; она не будет использоваться.

[18] В статье Макинсона она доказывается, используя алгебры. В книге Чагрова и Захарьящева для ее доказательства используются обобщенные шкалы (general frames). Здесь мы даем доказательство, не использующее никаких понятий, кроме обычной семантики Крипке, включая модально определимые варианты моделей Крипке. Опытный глаз, конечно, разглядит обобщенные шкалы в понятии «всевозможные определимые варианты данной модели M».

Следствие 5.8. *Проблема «по формуле A выяснить, является ли логика $\mathbf{K} \oplus A$ непротиворечивой» разрешима. Более того, она* coNP*-полна.*

Доказательство. Если обозначить $L = \mathbf{K} \oplus A$, то по теореме Макинсона L непротиворечива $\Leftrightarrow$ $L \subseteq \mathbf{Triv}$ или $L \subseteq \mathbf{Ver}$ $\Leftrightarrow$ $A \in \mathbf{Triv}$ или $A \in \mathbf{Ver}$. Каждое из последних условий проверяется алгоритмически. Например, для проверки условия $A \in \mathbf{Triv}$, достаточно в формуле A стереть все $\Box$ и проверить, что получилась тавтология. Последняя проблема coNP-полна. $\Box$

Следствие 5.9. *Всякая непротиворечивая нормальная логика L общезначима на некоторой шкале; более того, на некоторой конечной (и даже одноточечной) шкале.*

Следствие 5.10. *Всякая непротиворечивая нормальная логика L содержится в некоторой полной непротиворечивой по Крипке логике; среди таких логик имеется наименьшая; она задает тот же класс шкал, что и логика L.*

Доказательство. Искомой логикой будет $L' = \mathsf{Logic}(\mathsf{Frames}(L))$. По Следствию 5.9, логика L общезначима на некоторой шкале, поэтому $\mathsf{Frames}(L) \neq \varnothing$. Значит, логика L' непротиворечива.

Покажем, что $L \subseteq L'$. Если $A \in L$, то $\mathsf{Frames}(L) \models A$, тем самым $A \in \mathsf{Logic}(\mathsf{Frames}(L)) = L'$.

Покажем, что $\mathsf{Frames}(L) = \mathsf{Frames}(L')$. Включение $\supseteq$ следует из включения $L \subseteq L'$. Обратно, если $F \in \mathsf{Frames}(L)$, то $L' = \mathsf{Logic}(\mathsf{Frames}(L)) \subseteq \mathsf{Logic}(F)$, то есть $F \models L'$ и тем самым $F \in \mathsf{Frames}(L')$.

Докажем, что L' — наименьшее полное расширение логики L. Пусть L'' — полна и $L \subseteq L''$; докажем, что $L' \subseteq L''$. Имеем $L'' = \mathsf{Logic}(\mathbb{F})$ для некоторого класса шкал $\mathbb{F}$. Тогда $\mathbb{F} \models L''$ и тем более $\mathbb{F} \models L$, то есть $\mathbb{F} \subseteq \mathsf{Frames}(L)$, а тогда $L'' = \mathsf{Logic}(\mathbb{F}) \supseteq \mathsf{Logic}(\mathsf{Frames}(L)) = L'$. $\Box$

Наименьшую полную по Крипке логику, содержащую L, называют *пополнением* (*по Крипке*) логики L (обозначим его $[L]$). Таким образом, если L непротиворечива, то $[L]$ — тоже. Как мы увидим позже, уже для бимодальных логик возможна ситуация, когда у непротиворечивой нормальной логики L пополнение противоречиво: $[L] = \mathsf{Fm}$. Связано это с тем, что бывают непротиворечивые бимодальные логики L, не имеющие шкал: $\mathsf{Frames}(L) = \varnothing$. Тем самым, такие логики не полны по Крипке. Но даже для полных бимодальных логик аналога теоремы Макинсона нет, как показывает следующая задача.

Задача. Постройте все 4 одноточечные бимодальные шкалы. Придумайте пример бимодальной шкалы (W, R, S), логика которой не содержится ни в одной из логик указанных одноточечных шкал.

Сформулируем первый пример так называемого *расщепления* семейства всех нормальных логик.

Задача. Всякая нормальная логика L либо содержится в $\mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus \Box\bot$, либо содержит $\mathbf{KD} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$.

Верно ли аналогичное утверждение для логики $\mathbf{Triv}$ вместо $\mathbf{Ver}$?

Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для логики $\mathbf{Triv}$ в классе расширений $\mathbf{K4}$.

6 Полимодальные логики

Полимодальные формулы строятся из переменных, булевых связок и модальностей $\Box_i$, $i \in I$. Для простоты будем рассматривать n-модальный язык, то есть $I = \{1, \dots, n\}$. Множество всех n-модальных формул обозначим Fm_n.

Определение 6.1. *Полимодальная нормальная логика* — это множество формул $L \subseteq \mathsf{Fm}_n$, содержащее тавтологии, аксиомы дистрибутивности $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$ для всех $i \leqslant n$ и замкнутое относительно правил modus ponens, правила подстановки и правил $A \vdash \Box_i A$ для всех $i \leqslant n$. Логика L называется *непротиворечивой*, если $L \neq \mathsf{Fm}_n$.

Наименьшая n-модальная нормальная логика обозначается $\mathbf{K}_n$.

Семантика Крипке обобщается на n-модальный язык очевидным образом. В частности, *n-шкала* (или просто *шкала*) имеет вид $F = (W, R_1, \dots, R_n)$, где $R_i \subseteq W \times W$. *Логика шкалы* $\mathsf{Logic}(F)$ (и логика класса шкал) определяется как и прежде; легко доказать, что она есть нормальная модальная логика.

6.1 Неполная по Крипке бимодальная логика

Здесь мы покажем, что для бимодальных логик теорема Макинсона 5.6, и даже ее следствия 5.9 и 5.10 не верны. (Также неверно и следствие 5.8 — проблема непротиворечивости бимодальных логик неразрешима, однако мы это не будем здесь обсуждать.)

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 6.2. *Существует непротиворечивая бимодальная нормальная логика L, не общезначимая ни на какой шкале.*

Из этого результата легко вытекают следующие следствия:

Следствие 6.3.

(a) *Существут неполные по Крипке непротиворечивые нормальные полимодальные логики.*

(b) *Не каждая непротиворечивая нормальная полимодальная логика содержится в некоторой непротиворечивой полной по Крипке логике.*

(c) *Нет никакого аналога теоремы Макинсона для n-модальных логик при $n \geqslant 2$. Более точно, не существует такого семества n-шкал $(F_j)_{i \in J}$, что всякая непротиворечивая нормальная n-модальная логика L содержится в логике некоторой из шкал F_j.*

Пример неполной логики будем формулировать в бимодальном языке, модальности которой обозначим для удобства $\Box$ и $\boxminus$ (это оправдано тем, что ввиду рассматриваемых ниже аксиом данные модальности будут интерпретироваться взаимно обратными отношениями).

Логика Томасона L — это расширение бимодальной логики $\mathbf{K}_2$ (в языке с $\Box$ и $\boxminus$) следующими аксиомами:

$p \to \Box\diamondminus p$	— временны́е аксиомы
$p \to \boxminus\Diamond p$	— временны́е аксиомы
$\boxminus(\boxminus p \to p) \to \boxminus p$	— аксиома логики Гёделя-Лёба для $\boxminus$
$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	— аксиома МакКинси.

Выясним (напомним), какие свойства бимодальных шкал $F = (W, R, S)$ выражают данные аксиомы.

Лемма 6.4. *Пусть $F = (W, R_1, R_2)$. Тогда $F \models p \to \Box_1\Diamond_2 p \iff R_1^{-1} \subseteq R_2$.*

Следствие 6.5. *Пусть $F = (W, R, S)$. Тогда $F \models (p \to \Box\diamondminus p) \wedge (p \to \boxminus\Diamond p) \iff S = R^{-1}$.*

7 Характеристические формулы конечных шкал

7.1 p-морфизм (или модальный морфизм)

См. конспект 2014–2015, раздел 2.3.
Основное свойство. *Если* $F \twoheadrightarrow F'$, *то* $F \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F'$.

Лемма 7.1. *Биективный p-морфизм шкал есть изоморфизм шкал.*

Доказательство. Пусть p-морфизм шкал $h\colon F \twoheadrightarrow F'$ является биекцией. Докажем, что $F \cong F'$, а точнее, h — изоморфизм шкал, то есть $x\,R\,y \Leftrightarrow h(x)\,R'\,h(y)$. Если $x\,R\,y$, то $h(x)\,R'\,h(y)$, по условию (forth). Обратно, пусть $h(x)\,R'\,h(y)$. По условию (back), существует такой z, что $x\,R\,z$ и $h(z) = h(y)$. Поскольку h — инъекция, получаем $z = y$. Таким образом, $x\,R\,y$. □

7.2 Порожденная подшкала и подмодель

См. конспект 2014–2015, раздел 2.2.
Основное свойство. *Если* $F' \hookrightarrow F$, *то* $F \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F'$.
Конусом (с корнем a) будем называть шкалу F, порожденную точкой a, то есть $F = F_a$.

7.3 Субредукция шкал

Ключевую роль в дальнейших результатах играет понятие субредукции, обобщающее два понятия — p-морфизма и порожденной подшкалы.

Определение 7.2. Говорим, что шкала F получается *субредукцией*[19] из шкалы G (пишем: $G \rightarrowtail F$), если F является p-морфным образом некоторой порожденной подшкалы шкалы G. То есть существует такая $G' \hookrightarrow G$, что $G' \twoheadrightarrow F$. Собственно *субредукцией* шкалы G на шкалу F называют частичный (то есть не обязательно всюду определенный) сюръективный p-морфизм h из G на F.

Упражнение 7.3. Дайте определение *частичного p-морфизма* h из шкалы G в шкалу F (и аналогично для моделей), добавив в обычное определение p-морфизма, где требуется, условие «функция h на данном элементе определена». Докажите, что область определения частичного p-морфизма является порожденной подшкалой шкалы G: $\mathsf{Dom}(h) \hookrightarrow G$.

Установите следующую связь с понятием бисимуляции: h — *частичный p-морфизм из модели* M *в модель* $M' \Leftrightarrow h$ *есть бисимуляция между* M *и* M'*, являющаяся сюръективной (частичной) функцией.*

Теорема 7.4. *Если* $G \rightarrowtail F$, *то* $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$.

Доказательство. Если $G' \hookrightarrow G$ и $G' \twoheadrightarrow F$, то $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} G' \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$. □

Лемма 7.5. *Пусть* F *и* G *— конечные шкалы.*
1) *Если* $G \rightarrowtail F$, *то* $|G| \geqslant |F|$.
2) *Если* $G \rightarrowtail F$ *и* $|G| = |F|$, *то* $G \cong F$.
3) *Если* $G \rightarrowtail F$ *и* $F \rightarrowtail G$, *то* $G \cong F$.

Доказательство. 1) Если $G' \hookrightarrow G$ и $G' \twoheadrightarrow F$, то $|G| \geqslant |G'| \geqslant |F|$.

2) Если $G' \hookrightarrow G$ и $G' \twoheadrightarrow F$, то имеем $|G| \geqslant |G'| \geqslant |F| = |G|$. Отсюда $|G| = |G'| = |F|$. Тогда $G' = G$. Поэтому $G \twoheadrightarrow F$, то есть существует сюръективный p-морфизм $h\colon G \twoheadrightarrow F$. Поскольку F и G — конечные шкалы одного размера, то h — биекция. Тогда h — изоморфизм шкал, по лемме 7.1.

3) По пункту 1) имеем $|G| \geqslant |F| \geqslant |G|$. Значит $|G| = |F|$. Тогда по пункту 2) заключаем $G \cong F$. □

[19] В английской литературе говорят: «G subreduces to F», а также «F is a subreduct of G».

7.4 Характеристическая формула конечного конуса

Пусть $F = (W, R)$ — конечная шкала. Обозначим $R^{\leqslant d} = R^0 \cup R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^d$, где $R^0 = \{\langle e, e\rangle \mid e \in W\}$. Поскольку шкала F конечна, существует такое $d \geqslant 1$, что $R^* = R^{\leqslant d}$. Наименьшее такое d назовем *глубиной* шкалы F и обозначим $\mathsf{depth}(F)$.

Упражнение. Глубина шкалы F — это наименьшее $d \geqslant 1$, такое что $F \models \Box^{\leqslant d} p \to \Box^{d+1} p$.

Обозначим $\Box^{\leqslant d} A \;:=\; A \wedge \Box A \wedge \Box^2 A \wedge \ldots \wedge \Box^d A$.

Очевидно, что если M — модель глубины $\leqslant d$, порожденная точкой a, то $M, a \models \Box^{\leqslant d} A \Leftrightarrow M \models A$.

Пусть теперь $F = (W, R)$ — конечный ***конус*** с корнем a, $W = \{a_0, \ldots, a_n\}$, где $a_0 = a$.

Введем переменные $p_0, \ldots, p_n$. Фиксируем любое число $d \geqslant 1$. Обозначим формулу

$$\boxed{E_F^d \;:=\; p_0 \wedge \Box^{\leqslant d} \bigwedge \Gamma_F}$$

где Γ_F — множество следующих формул:

- $p_0 \vee \ldots \vee p_n$;
- $\neg(p_i \wedge p_j)$ для всех $i \neq j$;
- $p_i \to \Diamond p_j$ для каждой пары точек $\langle a_i, a_j\rangle \in R$;
- $p_i \to \neg\Diamond p_j$ для каждой пары точек $\langle a_i, a_j\rangle \notin R$.

Определение 7.6. *Характеристической формулой*[20] глубины d конечного конуса F назовем формулу

$$\chi^d(F) \;\;:=\;\; \neg E_F^d \;\;=\;\; \Big(\Box^{\leqslant d} \bigwedge \Gamma_F \;\to\; \neg p_0\Big).$$

Заметим, что формулы E_F^d и $\chi^d(F)$ имеют модальную глубину $d+1$.

Очевидно, что при любом $d \geqslant 1$ формула E_F^d выполнима на шкале F — достаточно задать оценку переменных $V(p_i) = \{a_i\}$. Следовательно, справедлива следующая

Лемма 7.7. $F \not\models \chi^d(F)$, *для всякого* $d \geqslant 1$.

Следующая теорема показывает, на каких шкалах формула $\chi^d(F)$ (при подходящем d) не является общезначимой; это ключевой результат, касающийся характеристических формул.

[20] Может показаться странным, что мы закрепили термин «характеристическая» не за формулой E_F^d (вроде как описывающей шкалу F), а за ее отрицанием. Но дальнейшее покажет, что именно отрицание, то есть формула $\chi^d(F)$ играет важную роль, в частности, с помощью таких формул аксиоматизируются нужные нам логики. Более того, изначально Янков (для интуиционистских шкал Крипке) ввел формулы, соответствующие именно $\chi^d(F)$; поскольку для интуиционистской формулы (в отличие от модальной) не-общезначимость ее на шкале не означает выполнимость отрицания, то там более педантично подходят к выбору правильной формулы. В литературе, однако, можно встретить термин «модальные формулы Янкова – Файна», ссылающийся на аналог формул E_F^d. Однако это и исторически некорректно, и технически для формулировки дальнейших результатов неудобно. Некоторое отличие выписанных выше формул состоит в том, что формулы Янкова (и их аналоги, введенные Файном, де Йонгом, Раутенбергом) давались для (рефлексивных) транзитивных шкал, в которых из корня видны все точки конуса, поэтому необходимости в параметре d не было. Здесь мы получим некоторые результаты для произвольных шкал (где параметр d требуется), а далее разовьем глубже теорию для транзитивных шкал, в которых параметр d пропадет. Кроме того, существенное отличие также в том, что в интуиционистском случае, для которого писал формулы Янков, в языке нет «доступа» к отношению достижимости R, поэтому там приходилось вводить переменные не для точек, а для подмножеств p_X, где $X \subseteq W$ и X замкнуто по R (в модальном случае — для всех $X \subseteq W$). Такого рода формулы мы будем изучать далее, когда перейдем к транзитивному случаю.

Теорема 7.8 (О характеристических формулах конечных конусов)**.** *Пусть $F = (W, R)$ — конечный конус с корнем a, G — произвольная конечная*[21] *шкала, $d = \mathsf{depth}(G)$. Пусть $\chi^d(F)$ — характеристическая формула глубины*[22] *d конуса F. Тогда следующие условия равносильны:*

$$\textbf{(1)}\ G \rightarrowtail F, \qquad \textbf{(2)}\ G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F, \qquad \textbf{(3)}\ G \not\models \chi^d(F).$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Доказано в теореме 7.4.

(2) $\Rightarrow$ (3) Если бы $G \models \chi^d(F)$, то ввиду $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$ мы имели бы $F \models \chi^d(F)$, что не так по лемме 7.7.

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть $G \not\models \chi^d(F)$. Значит, в некоторой точке $b \in G$ имеем $G, b \not\models \chi^d(F)$. Возьмем порожденную ею подшкалу: $G' := G_b = (W', R')$. Тогда $G', b \not\models \chi^d(F)$. Значит, найдется модель $M' = (W', R', V')$, в которой $M', b \not\models \chi^d(F)$, то есть $M', b \models p_0$ и $M', b \models \Box^{\leqslant d} \bigwedge \Gamma_F$. Последнее влечет $M' \models \Gamma_F$, поскольку $d \geqslant \mathsf{depth}(G')$ и значит $W' = (R')^{\leqslant d}(b)$.

Зададим отображение $h\colon W' \to W$, для всякой точки $c \in W'$ и $0 \leqslant i \leqslant n$ положив

$$h(c) := a_i \quad \leftrightharpoons \quad M', c \models p_i.$$

Осталось доказать, что $h\colon G' \twoheadrightarrow F$ — сюръективный p-морфизм шкал (а значит, $G \rightarrowtail F$).

h — **всюду определенная функция.** Поскольку $M' \models p_0 \vee \ldots \vee p_n$ и $M' \models \neg(p_i \wedge p_j)$ для всех $i \neq j$, то для каждой точки $c \in W'$ существует единственное i, такое что $M', c \models p_i$.

h **сюръективна.** Проверим сюръективность h. Точка $a = a_0$ имеет прообраз: $h(b) = a_0$, поскольку $M', b \models p_0$. Найдем прообраз точки a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Шкала F порождена точкой a_0, поэтому из нее в точку a_i ведет цепь: $a_0 = a_{i_0} \, R \, a_{i_1} \, R \ldots R \, a_{i_m} = a_i$. Значит, в Γ_F имеются формулы $p_{i_k} \to \Diamond p_{i_{k+1}}$ для $0 \leqslant k < m$. Все они истинны в модели M'; кроме того, $M', b \models p_{i_0}$. Значит, в M' тоже есть цепь $b = c_0 \, R' \, c_1 \, R' \, \ldots \, R' \, c_m$, такая что $M', c_k \models p_{i_k}$ для $0 \leqslant k \leqslant m$. Тем самым прообразом точки $a_i = a_{i_m}$ является точка c_m: $h(c_m) = a_i$.

h **удовлетворяет условию** (back)**.** Пусть $h(c) = a_i$ и $a_i \, R \, a_j$. Тогда в Γ_F есть формула $p_i \to \Diamond p_j$. Тем самым она истинна в точке c. Но $M', c \models p_i$, значит, $M', c \models \Diamond p_j$. Поэтому найдется $e \in W'$: $c \, R' \, e$ и $M', e \models p_j$, то есть $h(e) = a_j$.

h **удовлетворяет условию** (forth)**.** Пусть $c \, R' \, e$. Обозначим $a_i = h(c)$ и $a_j = h(e)$. Это означает $M', c \models p_i$ и $M', e \models p_j$, тем самым $M', c \models \Diamond p_j$. Утверждается, что $a_i \, R \, a_j$. Если бы $\langle a_i, a_j \rangle \notin R$, то в Γ_F была бы формула $p_i \to \neg\Diamond p_j$. Тогда она была бы истинна в M', в частности, в точке c, что не так по сказанному выше: $M', c \models p_i \wedge \Diamond p_j$. $\square$

Доказанная теорема имеет ряд полезных следствий (продолжаем нумерацию пунктов из леммы 7.5).

Лемма 7.9. *Пусть F и G — конечные конусы.*

4) *Если $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$, то $|G| \geqslant |F|$.*

(то есть логика меньшего конуса не может содержаться в логике большего конуса)

5) *Если $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$ и $|G| = |F|$, то $G \cong F$.*

(то есть включение логик двух конечных конусов одного размера влечет их изоморфизм)

6) *Если $F \equiv_{\mathsf{ML}} G$, то $G \cong F$.*

(то есть модально эквивалентные конечные конусы изоморфны)

7) *Если $\mathsf{Logic}(G) \subsetneq \mathsf{Logic}(F)$, то $|G| > |F|$.*

(то есть строгое включение логик конечных конусов влечет строгое уменьшение размера)

8) *Если $|G| = |F|$, но $G \not\cong F$, то логики $\mathsf{Logic}(F)$ и $\mathsf{Logic}(G)$ не сравнимы по $\subseteq$*

(то есть логики неизоморфных конечных конусов одной мощности не содержатся друг в друге)

Доказательство. Пункты (4), (5), (6) следуют из леммы 7.5, ибо $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$ равносильно $G \rightarrowtail F$.

(7) Ввиду $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$ имеем $|G| \geqslant |F|$. Если бы $|G| = |F|$, то $G \cong F$ по (2'), и тогда бы $G \equiv_{\mathsf{ML}} F$.

(8) Если бы $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$, то по (2') получили бы $G \cong F$. Аналогично невозможно и $F \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} G$. $\square$

Пункт (6) важен сам по себе, сформулируем его в виде теоремы:

[21] Более общо: G — произвольная шкала конечной глубины: $d = \mathsf{depth}(G) < \infty$.

[22] Обратите внимание, что в качестве d берется глубина шкалы G, а не F.

Теорема 7.10 (Об изоморфизме конусов).
Если два конечных конуса F и G модально эквивалентны: $\mathsf{Logic}(F) = \mathsf{Logic}(G)$, *то они изоморфны.*[23]

Теорема 7.8 дает алгоритм проверки условия $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$ для случая, когда G — произвольная конечная шкала, а F — конечный конус. Обобщим это на случай произвольной конечной шкалы F.

Лемма 7.11. *Логика всякой шкалы равна логике всех ее порожденных точкой подшкал:*

$$\mathsf{Logic}(F) \;=\; \bigcap\nolimits_{a\in W} \mathsf{Logic}(F_a).$$

Доказательство. Если $F \models A$, то $F_a \models A$ для всех $a \in W$.

Если же $F \not\models A$, то существует точка $a \in W$, такая что $F, a \not\models A$; тогда $F_a \not\models A$. □

Лемма 7.12. *Для всяких конечных шкал F и G верна эквивалентность:*

$$G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F \quad\Longleftrightarrow\quad \textit{каждый конус в } F \textit{ является субредуктом шкалы } G, \textit{ т.е. } \forall a \in F\ G \rightarrowtail F_a.$$

Доказательство. Доказываем две импликации.
($\Leftarrow$) Пусть $G \rightarrowtail F_a$ для всех $a \in F$. Тогда $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F_a$. Значит, $\mathsf{Logic}(G) \subseteq \bigcap_{a\in F} \mathsf{Logic}(F_a) = \mathsf{Logic}(F)$.
($\Rightarrow$) Пусть $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$. Тогда $F \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F_a$ для всех $a \in F$. Значит, $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F_a$ и $G \rightarrowtail F_a$ по теореме 7.8. □

Теорема 7.13. *Для конечных шкал F, G проблема $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$ алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Чтобы проверить условие $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$, нужно для каждой порожденной точкой подшкалы F_a шкалы F найти порожденную подшкалу в G, которая бы р-морфно отображалась на F_a.

Альтернативный способ: взять $d = \mathsf{depth}(G)$ и далее для каждой точки $a \in F$ проверить выполнимость формулы $E^d_{F_a}$ в шкале G (хотя бы в какой-то ее точке). □

Следствие 7.14. *Пусть F и G — конечные шкалы. Если $G \not\sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$, то существует модальная формула A, такая что $G \models A$, $F \not\models A$, причем количество переменных $|\mathsf{Var}(A)| \leqslant |F|$, а модальная глубина $d(A) \leqslant \mathsf{depth}(G) + 1$.*

Это следствие тоже дает разрешающий алгоритм для проверки условия $G \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} F$, поскольку, как мы знаем, существует лишь конечное число модальных формул от $\leqslant k$ переменных модальной глубины $\leqslant d$. Однако число попарно неэквивалентных таких формул растет очень быстро (при увеличении d на единицу добавляется два этажа экспонент). Поэтому этот алгоритм крайне неэффективен.

Итак, если F — конечная шкала, то над ее (табличной!) логикой $\mathsf{Logic}(F)$ имеется конечное число логик; среди них есть логики конусов F' — причем F' непременно является р-морфным образом некоторой порожденной подшкалы шкалы F (значит, их можно построить эффективно по F), а также логики всевозможных несвязных сумм логик конусов (их конечное количество и их тоже можно построить эффективно). Включения между ними тоже строятся эффективно. Таким образом, семейство всех расширений табличной логики $\mathsf{Logic}(F)$ с включениями между ними строится эффективно по F.

Какова ситуация с логиками, *содержащимися* в $\mathsf{Logic}(F)$? Известны следующие результаты.

Напомним, что *непосредственным предшественником* (нормальной) логики L называется всякая нормальная логика $L' \subseteq L$, такая что строго между L' и L нет нормальных логик.

Теорема 7.15. *Всякая табличная логика имеет бесконечно много (и даже континуум) непосредственных предшественников; среди них бесконечно много табличных логик.*[24]

В частности, логики **Triv** и **Ver** имеют бесконечно много табличных предшественников.

Если же ограничиться только транзитивными логиками, то ситуация кардинально меняется.

Теорема 7.16. *Всякая транзитивная табличная логика (то есть логика некоторой конечной транзитивной шкалы) имеет лишь конечное число непосредственных предшественников (в семействе всех транзитивных логик); все они табличны; их шкалы можно построить по шкале исходной логики эффективно.*

---

[23]Этот результат упоминается как «фольклорный» в статье:
J. van Benthem “Notes on modal definability”, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 30, num. 1 (1988), 20-35.
а также в книге Chagrov, Zakharyaschev “Modal Logic”, page 55, exercise 2.6.

[24]Chagrov, Zakharyaschev. Modal Logic. Theore 10.60. See also Theorem 12.5.

Другими словами, по конечной транзитивной шкале F можно эффективно построить конечное число транзитивных шкал G_i, логики которых являются непосредственными предшественниками (в классе всех транзитивных логик) логики шкалы F, и такие, что если $L' \subseteq \mathsf{Logic}(F)$, то $L' \subseteq \mathsf{Logic}(G_i)$ для некоторого i.