Спецкурс «Модальная логика» (весна 2019): Задачи

Лектор: с.н.с. Е.Е.Золин

Задачи на «4» (надо решить задачу, имеющуюся в билете)

1. Вспомните две модели M и M', у которых корни модально эквивалентны, но не бисимуляционно эквивалентны: в M из корня выходят цепи длины 1, 2, и т.д.; в M' кроме них есть бесконечная цепь. Из теории следует, что хотя бы одна из этих моделей не является модально насыщенной. Выясните, какая именно. Выясните, является ли модально насыщенной другая модель.
2. Докажите, что если $\mathbf{K} \vdash \Box A \vee \Box B$, то $\mathbf{K} \vdash A$ или $\mathbf{K} \vdash B$. Аналогично с n формулами.
3. *Замкнутой* называется формула, не содержащая переменных, то есть построенная из $\perp$ с помощью связок $\to$ и $\Box$. Докажите, что всякая замкнутая формула является канонической.
4. Пусть L — логика отмеченной шкалы; A — замкнутая формула. Тогда L содержит A или $\neg A$. Выведите отсюда, что логика $\mathbf{Triv} \cap \mathbf{Ver}$ не является логикой никакой отмеченной шкалы.
   Тем самым, логика *класса* отмеченных шкал не всегда является логикой некоторой отмеченной шкалы. Для сравнения: логика всякого класса шкал всегда является логикой некоторой шкалы.
5. Докажите: формула Собочинского $p \to \Box(\Diamond p \to p)$ означает: $\forall x, y, z\ \big(xRyRz \Rightarrow (x = y \vee y = z)\big)$.
6. Пусть $M = (W, R, V)$ — конечная модель Крипке. Докажите, что существует лишь конечное число теорий T, содержащих $\mathsf{Theory}(M)$. Оцените их количество через $n = |W|$.
7. Докажите, что формула $\Box p_1 \vee \Box(p_1 \to p_2) \vee \Box(p_1 \wedge p_2 \to p_3) \vee \ldots \vee \Box(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to p_{n+1})$ общезначима в точке a шкалы $F = (W, R) \iff$ у точки a имеется $\leqslant n$ последователей: $|R(a)| \leqslant n$
8. Фильтрация через бисимуляцию. Пусть $\widehat{M}$ — минимальная фильтрация модели $M = (W, R, V)$ через отношение бисимуляционной эквивалентности $\simeq$ (модель $\widehat{M}$ не обязательно конечна):
   $$\widehat{M} \ = \ (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V}), \quad \text{где} \quad \widehat{W} = W/\!\simeq, \quad \widehat{R} = R^{\mathsf{min}}_{\simeq}, \quad \text{оценка: } \widehat{x} \models p \leftrightharpoons x \models p.$$
   (а) Докажите, что M и $\widehat{M}$ глобально бисимуляционно эквивалентны: $M :\simeq: \widehat{M}$. Более точно, каноническое отображение $h(x) = \widehat{x}$ является сюръективным p-морфизмом из M в $\widehat{M}$. **(б)** Если $\widehat{M}$ и $\widehat{M}'$ — «минимальные фильтрации через бисимуляцию» моделей M и M', то $\widehat{M} :\simeq: \widehat{M}' \Leftrightarrow \widehat{M} \cong \widehat{M}'$, где $\cong$ — изоморфизм. **(в)** Получите следствие: $M :\simeq: M' \Leftrightarrow \widehat{M} \cong \widehat{M}'$.

Задачи на «5» (решите любую из предложенных задач на выбор студента)

1. Докажите, что формула Собочинского $p \to \Box(\Diamond p \to p)$ является канонической.
2. Логики циклов. Пусть $F_n = (W_n, R_n)$, где $n \geqslant 2$, есть n-элементный иррефлексивный цикл:
   $$W_n = \{a_1, \ldots, a_n\}, \ \ R_n = \{(a_1, a_2), \ (a_2, a_3), \ \ldots, (a_{n-1}, a_n), \ (a_n, a_1)\}.$$
   (а) Найдите все включения между логиками этих шкал $L_n = \mathsf{Logic}(F_n)$.
   (б) Найдите включения между пересечением $\bigcap_{n \geqslant 2} L_n$ и логикой $\mathsf{Logic}(\mathbb{Z}, \lessdot)$, где $i \lessdot j \leftrightharpoons i + 1 = j$.
3. Докажите, что $\mathbf{Triv} \cap \mathbf{Ver} = \mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \leftrightarrow (p \vee \Box\perp)\, \}$. Очевидно, эта логика полна (почему?). Является ли она сильно полной? канонической? (Определения см. в конспекте 2015–2016, раздел 1)
4. Логики конечных шкал с неравенством. Рассмотрим шкалу $F_n = (W, \neq)$, где $W = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Обозначим ее логику $L_n = \mathsf{Logic}(F_n)$. Каковы включения между этими логиками?
   Указание. Начните с исследования того, как соотносятся логики L_2 и L_3.
5. Для каждого (не обязательно конечного) подмножества $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, \ldots\}$ рассмотрим логику $L_\alpha = \mathbf{K} \oplus \{p \to \Box^n p \mid n \in \alpha\}$. В этом семействе счетное число или континуум попарно различных логик? Варианты задачи (решите любой): для формул $\Box p \to \Box^n \Box p$; для обратных импликаций.
6. Фильтрация через модальную эквивалентность. Пусть $\widehat{M}$ — любая фильтрация модели Крипке $M = (W, R, V)$ через отношение модальной эквивалентности $\equiv_{\mathsf{ML}}$, то есть
   $$\widehat{M} \ = \ (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V}), \quad \text{где} \quad \widehat{W} = W/\!\equiv_{\mathsf{ML}}, \quad R^{\mathsf{min}}_{\equiv_{\mathsf{ML}}} \subseteq \widehat{R} \subseteq R^{\mathsf{max}}_{\mathsf{ML}}, \quad \text{оценка: } \widehat{x} \models p \leftrightharpoons x \models p.$$
   Пусть $\widehat{M}$ конечна. Тогда M и $\widehat{M}$ глобально бисимуляционно эквивалентны: $M :\simeq: \widehat{M}$. Более точно, каноническое отображение $h(x) = \widehat{x}$ является сюръективным p-морфизмом из M в $\widehat{M}$.
   Указание. Заметьте, что модель $\widehat{M}$ — модально различима (ср. конспект 2014–2015, стр. 20–21).
7. Существует ли множество *замкнутых* формул, показывающее некомпактность класса шкал логики $\mathbf{GL}$? То есть такое множество замкнутых формул Γ, что каждое его конечное подмножество выполнимо в классе шкал $\mathsf{Frames}(\mathbf{GL})$, но всё множество Γ не выполнимо в этом классе.
   На лекциях приводился пример подобного множества формул от бесконечного числа переменных; существует и множество формул от одной переменной (см. книгу: G. Boolos, *The Logic of Provability*, 1996, p. 102).