Спецкурс «Модальная логика» (осень 2018): Задачи

Лектор: с.н.с. Е.Е.Золин

Задачи на «4» (надо решить задачу, имеющуюся в билете)

1. Докажите, что $\mathbf{K} \oplus \{\Diamond\top\} \;=\; \mathbf{K} \oplus \{\Box p \to \Diamond p\}$. Эта логика обозначается $\mathbf{D}$ (или иногда $\mathbf{KD}$).
2. Докажите, что если $\mathbf{K} \vdash \Box A \vee \Box B$, то $\mathbf{K} \vdash A$ или $\mathbf{K} \vdash B$.
3. Докажите, что формула $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$ задает класс шкал с условием *сильной связности*:
$$\forall x, y, z \,\big(xRy \;\&\; xRz \;\to\; yRz \;\vee\; zRy\big).$$
4. Напомним: *аксиома Лёба* $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ *общезначима на шкале* $F = (W, R) \iff$ *отношение* R *транзитивное и обратно фундированное.* Сформулируйте и докажите локальный аналог этого утверждения: *аксиома Лёба общезначима в отмеченной шкале* $(F, a) \iff \ldots$
5. *Замкнутой* называется формула, не содержащая переменных, то есть построенная из $\bot$ с помощью связок $\to$ и $\Box$. Докажите, что всякая замкнутая формула является канонической.
6. Пусть L — логика отмеченной шкалы; A — замкнутая формула. Тогда L содержит A или $\neg A$. Выведите отсюда, что логика $\mathbf{Triv} \cap \mathbf{Ver}$ не является логикой никакой отмеченной шкалы.
   Тем самым, логика *класса* отмеченных шкал не всегда является логикой некоторой отмеченной шкалы. Для сравнения: логика всякого класса шкал всегда является логикой некоторой шкалы.
7. Модальную формулу назовем *иногда глобально общезначимой* (ИГО), если она общезначима на некоторой шкале. Опишите множество всех ИГО формул. (Выясните их связь с логиками **Triv** и **Ver**.)

Задачи на «5» (решите любую из предложенных задач на выбор студента)

1. Докажите, что $\mathbf{Triv} \cap \mathbf{Ver} \;=\; \mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \leftrightarrow (p \vee \Box\bot) \,\}$. Очевидно, эта логика полна (почему?). Является ли она сильно полной? канонической?
2. Докажите, что допускает фильтрацию (а значит, полна относительно конечных шкал и разрешима) следующая (очевидно, полная по Крипке) логика: $L = \mathbf{K} \oplus \{\, \Box p \to \Box^4 p,\; \Box p \to \Box^6 p \,\}$.
3. Логики конечных шкал с неравенством. Рассмотрим шкалу $F_n = (W, \neq)$, где $W = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Обозначим ее логику $L_n = \mathsf{Logic}(F_n)$. Каковы включения между этими логиками?

   Указание. Начните с исследования того, как соотносятся логики L_2 и L_3.

4*. Докажите: всякая непротиворечивая нормальная логика общезначима хотя бы на одной шкале.

   Тем самым, каждая непротиворечивая нормальная логика L содержится в некоторой *полной* логике (например, в логике класса $\mathsf{Frames}(L)$); а значит, в логике некоторой одной шкалы $\mathsf{Logic}(F)$; последняя же, по (слабой) теореме Макинсона, содержится в **Triv** или **Ver**. Тем самым, всякая непротиворечивая нормальная логика (а не только всякая полная логика, как было доказано в лекциях) содержится в логике **Triv** или **Ver**.

5*. Модальную формулу назовем *иногда локально общезначимой* (ИЛО), если она общезначима на некоторой отмеченной шкале. Заметьте, что ИГО $\subset$ ИЛО, причем включение строгое. Докажите также, что всякая замкнутая выполнимая формула является ИЛО. Какие еще формулы, кроме перечисленных, являются ИЛО? Конечная цель — опишите множество всех ИЛО формул.

6*. Пусть $F = (W, R)$ — шкала с транзитивным отношением R. Докажите, что для произвольного отношения эквивалентности $\sim$ на W конечного индекса[1] существует его измельчение[2] $\sim'$ тоже конечного индекса, такое что *минимальное отношение*[3] $R^{\mathsf{min}}_{\sim'}$ является транзитивным.

   Очевидно, что если в этой задаче не требовать, чтобы отношение $\sim'$ было конечного индекса, то задача становится тривиальной: можно измельчить до одноточечных классов эквивалентности, так что фактор-множество будет изоморфно W, а минимальное отношение будет изоморфно R.

---

[1] Напомним: говорят, что отношение эквивалентности $\sim$ на множестве W имеет *конечный индекс*, если множество W разбито на конечное число классов $\sim$-эквивалентности.

[2] Напомним: отношение эквивалентности $\sim'$ называют *измельчением* отношения $\sim$, если из $x \sim' y$ следует $x \sim y$.

[3] Напомним: если есть отношение эквивалентности $\sim$ на W, то *минимальное отношение* $R^{\mathsf{min}}_{\sim}$ — это отношение на фактор-множестве $\widehat{W} = W/{\sim}$, задаваемое так: для любых классов эквивалентности $\alpha, \beta \in \widehat{W}$ полагаем
$$\alpha \, R^{\mathsf{min}}_{\sim} \, \beta \quad\iff\quad \exists x \in \alpha \; \exists y \in \beta \;\; x \, R \, y.$$