Модальная логика

с.н.с. Е. Е. Золин
(годовой курс, 2018–2019)

Содержание

1 Фильтрация

Фильтрация — это метод доказательства финитной аппроксимируемости (а значит, разрешимости) модальной логики посредством «коллапсирования» произвольной (бесконечной) модели в конечную.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке. Произвольное множество модальных формул $\Phi \subseteq \mathsf{Fm}$ индуцирует следующее отношение эквивалентности на множестве W: две точки $x, y \in W$ считаются эквивалентными по модулю Φ, если в них истинны одни и те же формулы из Φ:

$$x \equiv_\Phi y \qquad \leftrightharpoons \qquad \forall B \in \Phi \ \ (\ M, x \models B \quad \Leftrightarrow \quad M, y \models B\ ).$$

Когда множество Φ ясно из контекста, классы эквивалентности будем обозначать $\widehat{x} := [x]_{\equiv_\Phi}$. Если множество Φ конечно, то $\equiv_\Phi$ — отношение эквивалентности *конечного индекса*, то есть оно разбивает множество W на конечное число классов эквивалентности.

Говорят, что множество модальных формул Φ было *замкнуто относительно подформул*,[1] если для каждой формулы $B \in \Phi$ каждая ее подформула принадлежит Φ. Иначе говоря, $\mathsf{Sub}(\Phi) \subseteq \Phi$.

Мы определим фильтрацию[2] модели M через множество формул Φ как некоторую модель $\widehat{M}$, получающуся факторизацией модели M по отношению эквивалентности $\equiv_\Phi$. В модели $\widehat{M}$ множество $\widehat{W}$ и оценка $\widehat{V}$ задаются однозначно; свобода есть лишь в выборе отношения $\widehat{R}$.

Определение 1.1. Модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$ называется *фильтрацией* модели $M = (W, R, V)$ через (не обязательно конечное, но непременно замкнутое относительно подформул) множество формул[3] Φ, если

(1) $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактормножество множества W по отношению эквивалентности $\equiv_\Phi$;
(2) оценка $\widehat{V}$ определяется канонически (лишь для переменных $p \in \Phi$): $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \leftrightharpoons M, x \models p$;
(3) отношение $\widehat{R}$ должно удовлетворять следующим условиям:

(3a) $\qquad x\, R\, y \quad \Longrightarrow \quad \widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y}$,
(3b) $\qquad \widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y} \quad \Longrightarrow \quad \forall \Box B \in \Phi \,\big(\, M, x \models \Box B \ \Rightarrow \ M, y \models B\,\big)$.

Упражнение 1.2. Убедитесь, что условие (3b) сформулировано корректно, то есть правая часть не зависит от того, какие представители x и y из классов $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ были выбраны.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что условия (3a) и (3b) всегда оставляют непустой выбор для $\widehat{R}$. То есть всегда найдется отношение $\widehat{R}$, удовлетворяющее условиям (3a) и (3b).

Условия (3ab) можно переписать в виде, накладывающем на $\widehat{R}$ ограничения «снизу» и «сверху»:

$$R_\Phi^{\mathsf{min}} \quad \subseteq \quad \widehat{R} \quad \subseteq \quad R_\Phi^{\mathsf{max}}.$$

Здесь «минимальное» и «максимальное» фильтрованное отношение определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{x}\, R_\Phi^{\mathsf{min}}\, \widehat{y} \quad &\leftrightharpoons \quad \exists x' \equiv_\Phi x\ \exists y' \equiv_\Phi y : \quad x'\, R\, y' \\ \widehat{x}\, R_\Phi^{\mathsf{max}}\, \widehat{y} \quad &\leftrightharpoons \quad \forall \Box B \in \Phi \,\big(\, M, x \models \Box B \ \Rightarrow \ M, y \models B\,\big) \end{aligned}$$

Таким образом, Упражнение 2 можно переформулировать: всегда выполнено включение $R_\Phi^{\mathsf{min}} \subseteq R_\Phi^{\mathsf{max}}$.

Прежде чем доказывать утверждения про данное понятие фильтрации, мы обобщим его. Будем называть то, что было определено выше, *фильтрацией в узком смысле*, а то, что будет определено ниже, — *фильтрацией в широком смысле*. Для некоторых логик их разрешимость не удается доказать с помощью узкого понятия, но удается с помощью широкого. По-видимому, широкое понятие было впервые введено Габбаем (1972). Идея заключается в том, что мы можем разрешить факторизовать множество W по множеству формул Φ, более широкому, чем множество Γ формул, истинность которых требуется сохранить при переходе от исходной модели к фильтрованной.

Пусть $\Gamma \subseteq \Phi$ — (не обязательно конечные) множества формул, замкнутые относительно подформул.

[1] Напомним определение множества всех *подформул* формулы A — оно определяется индукцией по построению формулы A: $\mathsf{Sub}(\bot) = \{\bot\}$; $\mathsf{Sub}(p) = \{p\}$ для $p \in \mathsf{Var}$; $\mathsf{Sub}(A \to B) = \{(A \to B)\} \cup \mathsf{Sub}(A) \cup \mathsf{Sub}(B)$; $\mathsf{Sub}(\Box A) = \{\Box A\} \cup \mathsf{Sub}(A)$. Для произвольного множества формул $\Phi \subseteq \mathsf{Fm}$ определяем $\mathsf{Sub}(\Phi) = \bigcup_{A \in \Phi} \mathsf{Sub}(A)$.

[2] Более естественно было бы называть получающуся модель *результатом фильтрации*. — *Е.З.*

[3] Иногда в этом контексте множество формул Φ называют *фильтром*. Это, конечно, не имеет отношения к понятию фильтра из теории множеств (или связь всё же существует?).

Определение 1.4. Модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$ называется *фильтрацией* модели $M = (W, R, V)$ *через* множество формул Φ, *согласованной с* множеством формул $\Gamma \subseteq \Phi$, если

(1) $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ — фактормножество множества W по отношению эквивалентности Φ;
(2) оценка $\widehat{V}$ определяется канонически (лишь для переменных $p \in \Gamma$): $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \leftrightharpoons M, x \models p$;
(3) отношение $\widehat{R}$ должно удовлетворять условию: $\quad R_\Phi^{\mathsf{min}} \quad\subseteq\quad \widehat{R} \quad\subseteq\quad R_\Gamma^{\mathsf{max}}$.

Лемма 1.5 (О фильтрации)**.** *Пусть $\widehat{M}$ — фильтрация модели M через Φ, согласованная с $\Gamma \subseteq \Phi$. Тогда для всякой формулы $A \in \Gamma$ и точки $x \in W$ верна эквивалентность: $M, x \models A \Leftrightarrow \widehat{M}, \widehat{x} \models A$.*

Доказательство. Индукция по построению формулы A.Случай $A = p$ верен по построению $\widehat{V}$. Случаи $\bot$ и $\to$ очевидны. Остается случай модальности: $A = \Box B$. Мы будем опускать упоминание модели M и $\widehat{M}$ в рассуждениях. Таким образом, нам надо доказать: $x \models \Box B \Leftrightarrow \widehat{x} \models \Box B$.

($\Leftarrow$) Пусть $\widehat{x} \models \Box B$. Проверим: $x \models \Box B$. Возьмем любую точку $y \in W$, такую что $x\,R\,y$. По условию (3a) тогда $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$. Вместе с $\widehat{x} \models \Box B$ это влечет $\widehat{y} \models B$. По предположению индукции, $y \models B$, ч.т.д.

($\Rightarrow$) Пусть $x \models \Box B$. Проверим: $\widehat{x} \models \Box B$. Возьмем любую точку $\widehat{y} \in \widehat{W}$, такую что $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$. По условию (3b) из $x \models \Box B$ вытекает $y \models B$, поскольку $\Box B \in \Gamma$. По предположению индукции, $\widehat{y} \models B$, ч.т.д. $\Box$

Замечание 1.6. В этом доказательстве мы могли ссылаться на предположение индукции, так как множество формул Γ замкнуто относительно подформул. Как видим, замкнутость множества Φ относительно подформул не была использована. Более того, замкнутости множества Γ относительно подформул тоже можно было не требовать, но тогда усложнятся некоторые формулировки: вместо $\Gamma \subseteq \Phi$ нужно требовать $\mathsf{Sub}(\Gamma) \subseteq \Phi$; в определении R_Γ^{max} вместо «для всех $\Box B \in \Gamma$» надо писать «для всех $\Box B \in \mathsf{Sub}(\Gamma)$»; Лемму о фильтрации нужно доказывать не для $A \in \Gamma$, а для $A \in \mathsf{Sub}(\Gamma)$.

1.1 Фильтрация как средство доказательства разрешимости

Основное использование фильтрации — для доказательства финитной аппроксимируемости логики, которое вместе с конечной аксиоматизируемостью дает ее разрешимость. Кроме того, если для каждой формулы, невыводимой в логике, можно оценить сверху размер конечной контрмодели, то это дает верхнюю оценку вычислительной сложности логики. Всюду далее L — *нормальная* модальная логика.

Напомним, что модель $M = (F, V)$ называется *L-моделью*, если она основана на L-шкале F, то есть $F \models L$. Мы будем говорить, что логика L *допускает фильтрацию*, если всякую модель, основанную на L-шкале, можно отфильтровать в конечную модель, тоже основанную на L-шкале, сохраняя при этом истинность заранее заданного нам конечного множества модальных формул Γ (замкнутого относительно подформул; сокращенно: к.з.о.п.). Здесь слово «можно» ссылается на то, что при выборе фильтрованной модели $\widehat{M}$ у нас есть несколько «степеней свободы»: выбор к.з.о.п. множества Φ, содержащего данное множество Γ, и выбор отношения $\widehat{R}$ между R_Φ^{min} и R_Γ^{max}.

Определение 1.7. Говорим, что логика L *допускает фильтрацию* (ДФ), если

для каждого к.з.о.п. множества Γ и для всякой L-модели M
существуют к.з.о.п. множество $\Phi \supseteq \Gamma$ и некоторая L-модель $\widehat{M}$,
являющаяся фильтрацией модели M через Φ, согласованной с Γ.

Можно различать допустимость фильтрации в узком (Опр. 1.1) и широком (Опр. 1.4) смысле.

В этом определении условие фактически накладывается не на саму логику, а на класс L-шкал. Как известно, один и тот же класс шкал может быть задан разными логиками, среди которых есть наибольшая — это логика данного класса шкал. Поэтому приведенное выше определение осмысленно давать именно для полных по Крипке логик, или напрямую для класса шкал. Напомним, что логика L называется *полной* (*по Крипке*), если она есть логика некоторого класса шкал. Более подробно, если для всякой формулы A, такой что $L \nvdash A$, существует шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Кроме того, логика L называется *финитно аппроксимируемой* (или *полной относительно конечных шкал*, ПОКШ), если она есть логика некоторого класса конечных шкал. Более подробно, если для всякой формулы A, такой что $L \nvdash A$, существует конечная шкала F, такая что $F \models L$ и $F \not\models A$.

Теорема 1.8. *Пусть логика L полна по Крипке. Если L — ДФ, то она ПОКШ.*
Если кроме того логика L конечно аксиоматизируема, то она разрешима.

Доказательство. Покажем, что L — ПОКШ. Пусть $L \nvdash A$. Ввиду полноты логики L существует шкала F, такая что $F \models A$ и $F \not\models A$. Последнее означает, что существует модель $M = (F, V)$ и некоторая точка x в ней, такие что $M, x \not\models A$. Берем $\Gamma = \mathsf{Sub}(A)$ — это к.з.о.п. Поскольку L — ДФ, то для этого Γ и L-модели M существует к.з.о.п. $\Phi \supseteq \Gamma$ и L-модель $\widehat{M}$, являющаяся фильтрацией модели M через Φ, согласованной с Γ. По Лемме о фильтрации, $\widehat{M}, \widehat{x} \not\models A$. Таким образом, мы нашли конечную L-модель $\widehat{F} = (\widehat{W}, \widehat{R})$, такую что $\widehat{F} \not\models A$. $\square$

Можно заметить, что в доказательстве этой теоремы нам лишь было важно, что получающаяся в результате фильтрации модель $\widehat{M}$ является конечной L-моделью, но было не важно, что она получается факторизацией по отношению эквивалентности, задаваемому непременно множеством формул Φ; достаточно было взять любое отношение эквивалентности $\sim$ конечного индекса на W, такое что из $x \sim y$ следует $x \equiv_\Gamma y$; такое отношение $\sim$ будем называть *согласованным* с множеством Γ. Поэтому можно дать, пожалуй, самое широкое определение понятия фильтрации.[4]

Определение 1.9. Модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$ называется *фильтрацией* модели $M = (W, R, V)$, *согласованной с* к.з.о.п. множеством формул Γ, если

(1) $\widehat{W} = W/{\sim}$ — фактормножество множества W по некоторому отношению эквивалентности $\sim$ конечного индекса, согласованному с Γ;
(2) оценка $\widehat{V}$ определяется канонически (лишь для переменных $p \in \Gamma$): $\widehat{M}, \widehat{x} \models p \leftrightharpoons M, x \models p$;
(3) отношение $\widehat{R}$ должно удовлетворять условию: $R^{\mathsf{min}}_{\sim} \subseteq \widehat{R} \subseteq R^{\mathsf{max}}_{\Gamma}$.
Здесь минимальное отношение определяется так: $\widehat{x}\, R^{\mathsf{min}}_{\sim}\, \widehat{y} \leftrightharpoons \exists x' \sim x\, \exists y' \sim y\colon x' R\, y'$.

Корректность определения, Лемму о фильтрации, определение ДФ и теорему 1.8 для нового понятия фильтрации можно доказать аналогично. В последующих результатах, однако, у нас всегда отношение $\sim$ будет иметь вид $\equiv_\Phi$ для некоторого к.з.о.п. множества формул Φ, содержащего Γ. Кроме того, для некоторых более сильных результатов (не рассматриваемых в лекциях) важно именно то, что $\sim$ задается некоторым множеством формул Φ. В некоторых результатах отношение $\sim$ задается множеством формул Φ в некотором языке, расширяющем обычный модальный язык ML.

Тот факт, что логика L (точнее, класс всех шкал логики L) допускает фильтрацию, позволяет доказать разрешимость не только проблемы выводимости формул логики L, но и других алгоритмических проблем. Дадим их определения.

Определение 1.10. Пусть $\mathbb{K}$ — некоторый класс шкал.

Формула A называется (*локально*) *выполнимой* в классе $\mathbb{K}$, если существует шкала $F \in \mathbb{K}$, такая что A истинна в некоторой точке x некоторой модели $M = (F, V)$, основанной на этой шкале.

Формула A называется *глобально выполнимой* в классе $\mathbb{K}$, если существует шкала $F \in \mathbb{K}$, такая что A истинна во всех точках некоторой модели $M = (F, V)$, основанной на этой шкале.

Из формулы A *глобально следует* формула B на классе шкал $\mathbb{K}$, если для каждой шкалы $F \in \mathbb{K}$ и каждой модели $M = (F, V)$, основанной на это шкале, из $M \models A$ следует $M \models B$. Пишем: $A \models^{\mathsf{g}}_{\mathbb{K}} B$.

Очевидны следующие взаимосвязи понятий:
– формула A общезначима на классе шкал $\mathbb{K}$ $\iff$ формула $\neg A$ не выполнима в классе шкал $\mathbb{K}$;
– $\top \models^{\mathsf{g}}_{\mathbb{K}} B$ $\iff$ формула B общезначима на классе шкал $\mathbb{K}$;
– $A \models^{\mathsf{g}}_{\mathbb{K}} \bot$ $\iff$ формула A не является глобально выполнимой в классе шкал $\mathbb{K}$.

Таким образом, отношение глобального следования формул является самым общим из трех введенных понятий, т.к. оно содержит в качестве частных случаев остальные два (или, точнее, их отрицания). Поэтому разрешимость отношения глобального следования влечет разрешимость проблем локальной и глобальной выполнимости формул.

Если L — полная логика, то рассмотрев класс всех ее шкал $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(L)$, мы получим понятия локальной выполнимости, глобальной выполнимости и глобального логического следования в логике L.

[4] Оно введено (впервые?) в работе: Kikot S., Shapirovsky I., Zolin E. Filtration safe operations on frames. *Advances in Modal Logic*, vol. 10 (2014), pp. 333–352.

Теорема 1.11. *Пусть логика L полна по Крипке. Если L — ДФ и конечно аксиоматизируема, то разрешимы следующие проблемы:*
– проблема локальной выполнимости формул в логике L;
– проблема глобальной выполнимости формул в логике L;
– проблема глобального логического следования формул в логике L.

Доказательство. По вышесказанному проблемы общезначимости (или, что равносильно ввиду полноты логики L, проблемы выводимости формул в L) формул и локальной выполнимости формул (в логике L) сводятся друг к другу. Поэтому из разрешимости проблемы выводимости, доказанной в теореме 1.8, следует разрешимость проблемы локальной выполнимости. Докажем разрешимость проблемы глобального логического следования (из нее будет следовать и разрешимость проблемы глобальной выполнимости). (Не завершено.) $\square$

Следующая лемма показывает, что добавление к аксиомам логике, допускающей фильтрацию, конечного числа *замкнутых* формул (то есть не содержащих переменных) дает логику, также допускающей фильтрацию. Причина в том, что истинность замкнутой формулы в модели влечет общезначимость этой формулы в шкале.

Лемма 1.12. *Если логика L ДФ, а Σ — конечное число замкнутых формул, то логика $L' = L \oplus \Sigma$ ДФ.*

Доказательство. Возьмем любую L'-модель M и любое к.з.о.п. Γ. Сразу расширим его: $\Gamma' = \Gamma \cup \mathsf{Sub}(\Sigma)$ — это множество тоже к.з.о.п. Так как L — ДФ, то для данных Γ' и M существует L-модель $\widehat{M}$, являющаяся фильтрацией модели M через некоторое к.з.о.п. множество $\Phi \supseteq \Gamma'$. В частности, $\widehat{F} \models L$. Поскольку $M \models L'$, то $M \models \Sigma$. По лемме о фильтрации, истинность формул из Γ' при фильтрации сохранилась, значит, $\widehat{M} \models \Sigma$. Но формулы из Σ — замкнутые, поэтому $\widehat{F} \models \Sigma$. Таким образом, $\widehat{M}$ является L'-моделью. $\square$

1.2 Логики, допускающие минимальную фильтрацию

Для многих логик можно брать $\widehat{R} = R^{\mathsf{min}}_{\Phi}$ и получающаяся шкала уже будет L-шкалой.

Теорема 1.13. *Логики* $\mathbf{K}$, $\mathbf{KT} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to p)$, $\mathbf{KB} = \mathbf{K} \oplus (p \to \Box\Diamond p)$ *— ДФ. А значит, разрешимы.*

Доказательство. Как мы увидим, они ДФ даже в узком смысле (Определение 1.1). Для $\mathbf{K}$ в качестве $\widehat{R}$ можно брать любое отношение между R^{min}_{Φ} и R^{max}_{Φ}, и получится $\mathbf{K}$-шкала.

Для логики $\mathbf{KT}$, полной отн. класса рефлексивных шкал, покажем, что минимальное отношение R^{min}_{Φ} рефлексивно (если исходная модель M рефлексивна): поскольку $\forall x\ (x\, R\, x)$, то $\forall \widehat{x}\ (\widehat{x}\, R^{\mathsf{min}}_{\Phi}\, \widehat{x})$.

Для логики $\mathbf{KB}$, полной относительно класса симметричных шкал, покажем, что минимальное отношение R^{min}_{Φ} симметрично (если исходная модель M симметрична): для любых $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{W}$ если $\widehat{x}\, R^{\mathsf{min}}_{\Phi}\, \widehat{y}$, то $\exists x' \equiv_{\Phi} x$ и $\exists y' \equiv_{\Phi} y$: $x'\, R\, y'$. По симметричности отношения R имеем $y'\, R\, x'$. По определению минимального отношения $\widehat{x'}\, R^{\mathsf{min}}_{\Phi}\, \widehat{y'}$. Но $\widehat{x} = \widehat{x'}$ и $\widehat{y} = \widehat{y'}$. Таким образом, $\widehat{y}\, R^{\mathsf{min}}_{\Phi}\, \widehat{x}$. $\square$

Этот прием можно обобщить. Как мы помним, «минимальное» отношение можно строить не только на некоторой *модели Крипке* с помощью некоторого множества формул Φ и индуцируемого им отношения эквивалентности $\equiv_{\Phi}$, но и с помощью произвольного отношения эквивалентности $\sim$ на W, а значит, для построения «минимального» отношения достаточно иметь не модель, а *шкалу*. Таким образом, переход от шкалы $F = (W, R)$ к шкале $F^{\mathsf{min}}_{\sim} = (\widehat{W}, R^{\mathsf{min}}_{\sim})$, где $\widehat{W} = W/{\sim}$, является некоторым преобразованием шкал. Если при этом преобразовании сохраняется некоторое свойство α отношения достижимости R, то будем говорить, что данное свойство α *допускает минимальную фильтрацию* (или *сохраняется при минимальной фильтрации*). Это равносильно тому, чтобы говорить, что класс шкал (обладающих свойством α) допускает минимальную фильтрацию (или *замкнут относительно минимальной фильтрации*). Аналогично мы будем говорить, что модальная формула A, задающая рассматриваемый класс шкал, допускает минимальную фильтрацию (или сохраняется при минимальной фильтрации) — терминология не устоялась. Это обобщение можно резюмировать в следующей лемме.

Лемма 1.14. *Пусть логика L полна по Крипке. Если класс всех L-шкал замкнут относительно минимальной фильтрации, то логика L — ДФ (даже в узком смысле).*

Если каждая модальная формула $A \in \Sigma$ сохраняетя при минимальной фильтрации, то и класс шкал, задаваемый всем множеством формул Σ, замкнут относительно минимальной фильтрации. А следовательно, логика $L = \mathbf{K} \oplus \Sigma$, если она полна по Крипке, — ДФ.

Как мы видели выше, свойства рефлексивности и симметричности, а соответственно, и формулы $\Box p \to p$ и $p \to \Box\Diamond p$, сохраняются при минимальной фильтрации. То же можно доказать для формулы сериальности $\Box p \to \Diamond p$. По лемме 1.14, допускают фильтрацию логики, аксиоматизируемые любыми комбинациями этих формул. Итак, логики **KD**, **KDB**, **KTB** — ДФ. Обобщим этот факт.

Напомним, что формулы из нескольких последующих теорем являются частными примерами (i,j,m,n)-формул: $\Diamond^i\Box^m p \to \Box^j\Diamond^n p$. Как было доказано ранее, логики, аксиоматизируемые любыми наборами таких формул, полны по Крипке. Теперь мы изучаем, какие из них ДФ, а значит, разрешимы.

Теорема 1.15 (Gabbay,[5] 1972). *Следующие формулы сохраняются при минимальной фильтрации:*

$$\Box^m p \to \Diamond^n p, \qquad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p, \qquad \text{где } m,n \geqslant 0.$$

Следовательно, логики, аксиоматизируемые любым набором формул из этого множества, — ДФ.

Доказательство. Данные формулы соответствуют следующим условиям на отношение R (где R^0 есть равенство, $R^1 = R$, $R^{n+1} = R^n \circ R$), являющимся частными случаями (i,j,m,n)-условия:

$$(1) \quad \Box^m p \to \Diamond^n p \qquad \forall x\, \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; x\, R^n\, z)$$

$$(2) \quad \Box^m p \to \Box\Diamond^n p \qquad \forall x,y\, \big(x\, R\, y \;\Rightarrow\; \exists z\, (x\, R^m\, z \;\wedge\; y\, R^n\, z)\big)$$

Пусть шкала $F = (W,R)$ удовлетворяет условию (2); для (1) доказательство аналогично (даже проще). Пусть $\sim$ — произвольное отношение эквивалентности на W. Покажем, что шкала $F_\sim^{\mathsf{min}} = (\widehat{W}, \widehat{R})$, где $\widehat{W} = W/{\sim}$ и $\widehat{R} = R_\sim^{\mathsf{min}}$, тоже удовлетворяет условию (2). Возьмем любые $\widehat{x}\, \widehat{R}\, \widehat{y}$. Без ограничения общности $x\, R\, y$. По условию (2) существует $z \in W$ такой, что $x\, R^m\, z$ и $y\, R^n\, z$. По определению минимального отношения, отсюда вытекает:[6] $\widehat{x}\, \widehat{R}^m\, \widehat{z}$ и $\widehat{y}\, \widehat{R}^n\, \widehat{z}$. $\square$

1.3 Фильтрация для транзитивных и некоторых других хорновых логик

Теорема 1.16. *Логика* $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$ *— ДФ (даже в узком смысле).*

Доказательство. Дадим два доказательства, т.к. они применимы в других (разных) случаях. Начало построения общее: пусть Γ — к.з.о.п. множество формул и M — транзитивная модель. Полагаем $\Phi = \Gamma$, $\widehat{W} = (W/{\equiv_\Phi})$, оценка $\widehat{V}$ задается стандартно. Разница — в определении отношения $\widehat{R}$ на $\widehat{W}$.

Способ 1: *фильтрация Леммона*. Рассмотрим следующее отношение (похожее на максимальное):

$$\widehat{x}\, R^{\mathsf{Lem}}\, \widehat{y} \quad \leftrightharpoons \quad \forall \Box B \in \Phi\, \big(M, x \models \Box B \;\Rightarrow\; M, y \models B \wedge \Box B\big).$$

Осталось доказать (пользуясь транзитивностью R или даже более слабым условием: $M \models \mathbf{K4}$), что отношение R^{Lem} — тоже транзитивное и лежит между минимальным и максимальным.

- $R_\Phi^{\mathsf{min}} \subseteq R^{\mathsf{Lem}}$: пусть $\widehat{x}\, R_\Phi^{\mathsf{min}}\, \widehat{y}$; без ограничения общности[7] $x\, R\, y$; тогда если $x \models \Box B$, то очевидно $y \models B$; кроме того, ввиду $M \models \mathbf{K4}$, имеем $x \models \Box B \to \Box\Box B$, а значит, $x \models \Box\Box B$ и поэтому $y \models \Box B$.
- $R^{\mathsf{Lem}} \subseteq R_\Phi^{\mathsf{max}}$: очевидно, т.к. в определении R^{Lem} условие сильнее, чем в определении R_Φ^{max}.
- R^{Lem} транзитивно: пусть $\widehat{x}\, R^{\mathsf{Lem}}\, \widehat{y}\, R^{\mathsf{Lem}}\, \widehat{z}$; тогда если $x \models \Box B$, то $y \models B \wedge \Box B$, откуда $z \models B \wedge \Box B$.

[5] Gabbay, D. M., A general filtration method for modal logics, *Journal of Philosophical Logic*, vol. 1 (1972), pp. 29–34.

[6] Случай $m = 0$ исключением не является: если $x = z$, то $\widehat{x} = \widehat{z}$, то есть $\widehat{x}\, \widehat{R}^0\, \widehat{z}$; аналогично для $n = 0$.

[7] Докажите требуемое, не прибегая к «без ограничения общности», а используя: $\exists x' \equiv_\Phi x\; \exists y' \equiv_\Phi y\; (x'\, R\, y')$.

Способ 2: *транзитивное замыкание минимального отношения содержится в максимальном.* Положим $\widehat{R} = (R_\Phi^{\mathsf{min}})^+$, где плюс означает транзитивное замыкание. Очевидно, получившееся отношение транзитивно и содержит минимальное. Осталось доказать, что оно содержится в максимальном. Напомним следующую лемму (доказательство оставим в качестве упражнения).

Лемма 1.16.1. *Следующие условия эквивалентны (и дают определение транзитивного замыкания):*

(a) *транзитивное замыкание r^+ отношения r — это наименьшее транзитивное отношение, содержащее r; иначе говоря, это пересечение всех транзитивных отношений, содержащих r;*

(b) *транзитивное замыкание r^+ отношения r получается следующим итеративным процессом:* $r_1 = r, \quad r_{n+1} = r_n \cup (r_n \circ r_n), \quad r^+ = \bigcup_{n\geqslant 1} r_n;$

(c) $(x, y) \in r^+ \quad\Leftrightarrow\quad$ *существует цепочка из n ребер r, где $n \geqslant 1$, соединяющая x с y.*

Если обозначить $r = R_\Phi^{\mathsf{min}}$ и $s = R_\Phi^{\mathsf{max}}$, то нам требуется доказать $r^+ \subseteq s$. Это можно сделать и напрямую, используя, например, условие (c), но мы упростим себе задачу, воспользовавшись следующими достаточными условиями (доказательство нижеследующей леммы — упражнение).

Лемма 1.16.2. *Если $r \subseteq s$ и $r \circ s \subseteq s$, то $r^+ \subseteq s$.*

Нам осталось доказать включение $r \subseteq s$ (оно очевидно) и $r \circ s \subseteq s$, или в явном виде:

$$R_\Phi^{\mathsf{min}} \circ R_\Phi^{\mathsf{max}} \;\subseteq\; R_\Phi^{\mathsf{max}}.$$

Пусть $\widehat{x}\, R_\Phi^{\mathsf{min}}\, \widehat{y}\, R_\Phi^{\mathsf{max}}\, \widehat{z}$. Без ограничения общности, $x\,R\,y$. Докажем, что $\widehat{x}\, R_\Phi^{\mathsf{max}}\, \widehat{z}$; для этого возьмем произвольную формулу $\Box B \in \Phi$.

$$x \models \Box B \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}\; x \models \Box\Box B \;\overset{(2)}{\Longrightarrow}\; y \models \Box B \;\overset{(3)}{\Longrightarrow}\; z \models B.$$

Здесь (1) ввиду $M \models \mathbf{K4}$, (2) ввиду $x\,R\,y$, (3) ввиду $\widehat{y}\, R_\Phi^{\mathsf{max}}\, \widehat{z}$ и $\Box B \in \Phi$. $\Box$

Заметим, что в доказательстве предыдущей теоремы мы использовали не транзитивность отношения R, то есть условие $F \models \mathbf{K4}$, а более слабое условие, что $M \models \mathbf{K4}$. Другими словами, мы умеем фильтровать (получая при этом конечную транзитивную модель) не только транзитивные модели, но даже модели, в которых (именно при данной фиксированной оценке переменных) истинна логика $\mathbf{K4}$. Есть более глубокие результаты (здесь не рассматриваемые), где этот ньюанс играет важную роль.

Условие на отношение R называется *хорновым*, если оно задается формулой первого порядка вида

$$\forall x_1, \ldots, x_n \left(x_{i_1} R x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_s} R x_{j_s} \;\to\; x_k\, R\, x_\ell \right),$$

где допускается $s = 0$, то есть посылка может отсутствовать. Легко видеть, что существует наименьшее отношение, содержащее R и удовлетворяющее заданному хорнову условию H; оно же равно пересечению всех отношений, содержащих R и удовлетворяющих условию H. Оно называется *хорновым замыканием* отношения R; обозначим его R^H. Можно доказать (оставляем это в качестве упражнения), что R^H можно получить итеративным процессом, в котором на каждом шаге добавляются стрелки из x_k в x_ℓ при условии, что для некоторых элементов выполнена посылка $P(x_k, x_\ell, \vec{x})$ условия H:

$$R_1 = R; \qquad R_{n+1} = R_n \cup \{(a, b) \in W \times W \mid \exists \vec{c} \in W : P(a, b, \vec{c})\}; \qquad R^H = \bigcup_{n\geqslant 1} R_n.$$

Модальная формула транзитивности $\Box p \to \Box\Box p$, а также рассматриваемые ниже формулы «n-транзитивности» $\Box p \to \Box^n \Box p$, $n \geqslant 1$, евклидовости $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ задают хорновы условия на отношение R. Поэтому неудивительно, что при доказательстве ДФ соответствующих логик применяется метод, основанный на следующей идее:

хорново замыкание минимального отношения содержится в максимальном: $(R_\Phi^{\mathsf{min}})^H \subseteq R_\Gamma^{\mathsf{max}}$.

Конечно, каждый раз нужно уточнять, как строить множество формул Φ по Γ, чтобы это можно было доказать. Кроме того, на данный момент не ясны границы применимости этой идеи: имеется ряд модальных формул, задающих хорново условие на отношение R, для которых вышеуказанное утверждение-идею пока не удалось реализовать; см. гипотезу 1.21.

Теорема 1.17 (Габбай, 1972, там же.). *Логика* $\mathbf{K}\oplus(\Box p\to\Box^n\Box p)$ *— ДФ (в широком смысле), где* $n\geqslant 1$.

Доказательство. Данная модальная формула задает следующее хорново условие: $R^{n+1}\subseteq R$, назовем его *n-транзитивность* (обычная транзитивность есть 1-транзитивность). Соответственно, имеется понятие n-транзитивного замыкания $R^{[n]}$ отношения R; сформулируем лемму, дающую несколько эквивалентных определений этого понятия (доказательство оставим в качестве упражнения).

Лемма 1.17.1. *Указанные условия эквивалентны (и дают определение n-транзитивного замыкания):*

(a) *n-транзитивное замыкание $r^{[n]}$ отношения r — это наименьшее n-транзитивное отношение, содержащее r; иначе говоря, это пересечение всех n-транзитивных отношений, содержащих r;*

(b) *n-транзитивное замыкание $r^{[n]}$ отношения r получается следующим итеративным процессом:* $r_1=r,\quad r_{k+1}=r_k\cup(r_k)^{n+1},\quad r^{[n]}=\bigcup_{k\geqslant 1}r_k$;

(b') *n-транзитивное замыкание $r^{[n]}$ отношения r получается следующим итеративным процессом:* $s_1=r,\quad s_{k+1}=s_k\cup(r^n\circ s_k),\quad r^{[n]}=\bigcup_{k\geqslant 1}s_k$;

(b'') *n-транзитивное замыкание задается формулой:* $r^{[n]}=\bigcup_{k\geqslant 0}r^{kn+1}$;

(c) $(x,y)\in r^{[n]}\quad\Leftrightarrow\quad$ *существует цепочка из $(kn+1)$ ребер r, где $k\geqslant 0$, соединяющая x с y.*

Доказываем теорему. Обозначим изучаемую логику L. Пусть дано к.з.о.п. множество Γ и L-модель M (а точнее, нам понадобится лишь более слабое условие $M\models L$). Строим множество формул

$$\Phi\ =\ \Gamma\ \cup\ \mathsf{Sub}\{\,\Box^n B\mid\Box B\in\Gamma\,\}.$$

Как и прежде, строим $\widehat{M}=(\widehat{W},\widehat{R},\widehat{V})$, где $\widehat{W}=W/\!\equiv_\Phi$, оценка $\widehat{V}$ строится канонически, а в качестве отношения $\widehat{R}$ возьмем n-транзитивное замыкание минимального отношения: $\widehat{R}:=(R_\Phi^{\mathsf{min}})^H$. Очевидно, что оно n-транзитивно и содержит R_Φ^{min}. Остается доказать, что $\widehat{R}\subseteq R_\Gamma^{\mathsf{max}}$, или другими словами,

n-транзитивное замыкание минимального отношения
содержится в максимальном отношении: $(R_\Phi^{\mathsf{min}})^{[n]}\subseteq R_\Gamma^{\mathsf{max}}$.

Обозначив $r:=R_\Phi^{\mathsf{min}}$ и $s=R_\Gamma^{\mathsf{max}}$, мы должны доказать $r^{[n]}\subseteq s$. Воспользуемся следующими очевидными достаточными условиями (доказательство следующей леммы оставим в качестве упражнения).

Лемма 1.17.2. *Если* $r\subseteq s$ *и* $r^n\circ s\subseteq s$, *то* $r^{[n]}\subseteq s$.

Нам осталось доказать включение $r\subseteq s$ (оно очевидно) и $r^n\circ s\subseteq s$, или в явном виде:

$$(R_\Phi^{\mathsf{min}})^n\circ R_\Gamma^{\mathsf{max}}\ \subseteq\ R_\Gamma^{\mathsf{max}}.$$

Пусть $\widehat{x}\,(R_\Phi^{\mathsf{min}})^n\,\widehat{y}\,R_\Gamma^{\mathsf{max}}\,\widehat{z}$. Докажем $\widehat{x}\,R_\Gamma^{\mathsf{max}}\,\widehat{z}$. Условие $\widehat{x}\,(R_\Phi^{\mathsf{min}})^n\,\widehat{y}$ означает, что имеется цепь длины n:

$$\widehat{x}\,R_\Phi^{\mathsf{min}}\,\widehat{x_1}\,R_\Phi^{\mathsf{min}}\ldots R_\Phi^{\mathsf{min}}\,\widehat{x_{n-1}}\,R_\Phi^{\mathsf{min}}\,\widehat{y}. \qquad (*)$$

Следовательно, имеется R-стрелка между некоторыми представителями соседних классов в этой цепи. Но в каждом из промежуточных классов $\widehat{x_i}$, $0<i<n$, представитель, в который входит R-стрелка, может отличаться от представителя, из которого выходит R-стрелка. Без ограничения общности, символом x_i, $0<i\leqslant n$, обозначен тот представитель класса $\widehat{x_i}$, в который входит стрелка, а также $x_0:=x$. Нужно дать обозначения вторым представителям из каждого класса. Итак, условие $(*)$ означает, что существуют точки $y_i\in\widehat{x_i}$, $0\leqslant i\leqslant n$, такие что $y_{i-1}\,R\,x_i$, где $1\leqslant i\leqslant n$, а также $y_n:=y$.

Для доказательства $\widehat{x}\,R_\Gamma^{\mathsf{max}}\,\widehat{z}$ возьмем любую формулу $\Box B\in\Gamma$; заметим, что $\Box^n B\in\Phi$. Надо доказать, что если $x_0\models\Box B$, то $z\models B$. Имеем цепочку импликаций:

$$x_0\models\Box B\ \overset{(1)}{\Longrightarrow}\ y_0\models\Box B\ \overset{(2)}{\Longrightarrow}\ y_0\models\Box^n\Box B\ \overset{(3)}{\Longrightarrow}\ x_1\models\Box^{n-1}\Box B\ \overset{(4)}{\Longrightarrow}\ y_1\models\Box^{n-1}\Box B$$
$$\overset{(5)}{\Longrightarrow}\ x_2\models\Box^{n-2}\Box B\qquad\ldots\qquad x_n\models\Box B\ \overset{(6)}{\Longrightarrow}\ y\models\Box B\ \overset{(7)}{\Longrightarrow}\ z\models B.$$

Объяснения: (1) $x_0\equiv_\Phi y_0$; (2) $M\models\Box B\to\Box^n\Box B$; (3) $y_0\,R\,x_1$; (4) $x_1\equiv_\Phi y_1$ и $\Box^n B\in\Phi$; (5) $y_1\,R\,x_2$; $\ldots$; (6) $x_n\equiv_\Phi y_n$ и $y_n=y$; (7) $\widehat{y}\,R_\Gamma^{\mathsf{max}}\,\widehat{z}$. Теорема доказана. $\Box$

Понятие хорнова замыкания отношения R можно сформулировать не только для одного хорнова условия, но и для (конечного или бесконечного) семейства $\mathcal{H} = \{H_i\}_{i\in I}$ хорновых условий H_i. В этом случае хорновым замыканием $R^{\mathcal{H}}$ отношения R будет, по определению, наименьшее отношение, содержащее R и удовлетворяющее всем условиям из $\mathcal{H}$; иначе говоря, пересечение всех отношений, содержащих R и удовлетворяющих всем условиям из $\mathcal{H}$; оно существует, т.к. отношение $W \times W$ удовлетворяет данным условиям. Можно доказать (упражнение), что $R^{\mathcal{H}}$ можно получить итеративным процессом, аналогичным тому, который был предъявлен выше для одного хорнова условия.

Соответственно, имеет смысл задаваться вопросом: если каждая логика $\mathbf{K} \oplus A_i$, $i \in I$, допускает фильтрацию, и это было доказано способом «хорново замыкание минимального отношения содержится в максимальном», то будет ли непременно логика $\mathbf{K} \oplus \{A_i \mid i \in I\}$, где I — конечное, тоже допускать фильтрацию, и можно ли будет этот факт доказать тем же способом? При этом понятно, что если в каждом i-ом доказательстве мы по Γ строили к.з.о.п. множество формул $\Phi_i \supseteq \Gamma$, то теперь надо будет построить единое к.з.о.п. множество $\Phi \supseteq \Gamma$, для которого пройдёт дальнейшее доказательство. Всегда ли это работает — вопрос до конца не изучен. Следующая теорема показывает, что в случае комбинирования конечного числа аксиом из предыдущей теоремы это работает.

Теорема 1.18 (Шехтман,[8] 1998, 2004)**.** *Логика, получающаяся добавлением к* $\mathbf{K}$ *любого конечного набора аксиом вида* $\Box p \to \Box^n \Box p$*, где* $n \geqslant 1$*, — ДФ (в широком смысле).*

Доказательство. Пусть $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots\}$ — конечное множество, $L_\alpha = \mathbf{K} \oplus \{\Box p \to \Box^n \Box p \mid n \in \alpha\}$. Отношение R назовем *α-транзитивным*, если оно n-транзитивно (то есть $R^{n+1} \subseteq R$) для всех $n \in \alpha$. Следующая лемма дает эквивалентные определения *α-транзитивного замыкания* $R^{[\alpha]}$ отношения R.

Лемма 1.18.1. *Указанные условия эквивалентны (и дают определение α-транзитивного замыкания):*

(a) *α-транзитивное замыкание $R^{[\alpha]}$ отношения R — это наименьшее α-транзитивное отношение, содержащее R; иначе говоря, это пересечение всех α-транзитивных отношений, содержащих R;*

(b) *α-транзитивное замыкание $R^{[\alpha]}$ отношения R получается следующим итеративным процессом:*

$$R_1 = R, \qquad R_{k+1} = R_k \cup \bigcup\nolimits_{n\in\alpha} (R_k)^{n+1}, \qquad R^{[\alpha]} = \bigcup\nolimits_{k\geqslant 1} R_k;$$

(b') *α-транзитивное замыкание задается формулой: $R^{[\alpha]} = R \cup \bigcup_{m\in\alpha^+} R^{m+1}$, где α^+ есть замыкание множества α по сложению:*

$$\alpha^+ \;=\; \{\, m \in \mathbb{N} \;\mid\; \exists s \geqslant 1\, \exists n_1, \ldots, n_s \in \alpha\colon\; m = n_1 + \ldots + n_s \,\}.$$

(c) $(x, y) \in R^{[\alpha]} \quad\Leftrightarrow\quad$ *существует цепочка из $(n_1 + \ldots + n_s{+}1)$ ребер R, где $s \geqslant 0$ и $n_1, \ldots, n_s \in \alpha$, соединяющая x с y.*

Докажем, что логика L_α допускает фильтрацию. Пусть дано к.з.о.п. множество Γ и L-модель M (а точнее, нам понадобится лишь более слабое условие $M \models L$). Строим множество формул

$$\Phi \;=\; \Gamma \;\cup\; \mathsf{Sub}\{\, \Box^n B \mid \Box B \in \Gamma,\; n \in \alpha \,\}.$$

Строим модель $\widehat{M}$ как обычно, и в качестве отношения $\widehat{R}$ возьмем α-замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\mathsf{min}})^{[\alpha]}$. Остается доказать, что $\widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\mathsf{max}}$, или другими словами,

α-транзитивное замыкание минимального отношения
содержится в максимальном отношении: $(R_\Phi^{\mathsf{min}})^{[\alpha]} \subseteq R_\Gamma^{\mathsf{max}}$.

Обозначив $r := R_\Phi^{\mathsf{min}}$ и $s = R_\Gamma^{\mathsf{max}}$, мы должны доказать $r^{[\alpha]} \subseteq s$. Воспользуемся следующими очевидными достаточными условиями (доказательство следующей леммы оставим в качестве упражнения).

Лемма 1.18.2. *Если $r \subseteq s$ и $r^n \circ s \subseteq s$ для каждого $n \in \alpha$, то $r^{[\alpha]} \subseteq s$.*

Нам осталось доказать включение $r \subseteq s$ (оно очевидно) и $r^n \circ s \subseteq s$ для каждого $n \in \alpha$. Включение $r^n \circ s \subseteq s$ доказывается дословно так же, как в теореме 1.17 про n-транзитивное замыкание. □

[8] Shehtman V. Filtration via bisimulation. *Advances in Modal Logic*, vol. 5 (2004), pp. 289–308; Lemma 11. В ней дается также ссылка на следующую работу, где указанный результат уже был получен (но в ней имеются опечатки в формулах): Gabbay D., Shehtman V. Products of Modal Logics, Part I. *Logic Journal of the IGPL*, vol. 6 (1998), num. 1, pp. 73-146.

Теорема 1.19. *Логика* $\mathbf{K5} = \mathbf{K} \oplus (\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ *— ДФ (в .... смысле).*

Доказательство. Сначала мы приведем ошибочное[9] доказательство, затем модифицируем его и получем правильное доказательство; наконец, приведем доказательство методом «хорново замыкание минимального отношения содержится в максимальном», идеи которого могут оказаться полезными и в других случаях.

Доказательство 1 (некорректное). Пусть дана **K5**-модель M и к.з.о.п. множество формул Γ_0. Рассмотрим $\Phi = \Gamma_0 \cup \mathsf{Sub}\{\Diamond\Box B \mid \Box B \in \Gamma_0\}$. (В книге не было Sub, подумать...)

Строим модель $\widehat{M}$ как обычно: $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$; оценка $\widehat{V}$ каноническая; отношение $\widehat{R} = R_\Phi^{\mathsf{max}}$. Получилась конечная модель $\widehat{M}$, являющаяся фильтрацией модели M через Φ, согласованная с $\Gamma = \Phi$ (а тем более с Γ_0). Остается показать, что отношение $\widehat{R}$ — евклидово.

Пусть $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$ и $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{z}$. Чтобы доказать $\widehat{y}\,\widehat{R}\,\widehat{z}$, возьмем любую формулу $\Box C \in \Phi$. Имеем импликации:

$$y \models \Box C \overset{(1)}{\Longrightarrow} \widehat{y} \models \Box C \overset{(2)}{\Longrightarrow} \widehat{x} \models \Diamond\Box C \overset{(3)}{\Longrightarrow} x \models \Diamond\Box C \overset{(4)}{\Longrightarrow} x \models \Box C \overset{(5)}{\Longrightarrow} z \models C$$

Объяснения: (1) Лемма о фильтрации 1.5 (в которой $\Gamma = \Phi$); (2) $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$; (3) тут проблема, так как $\Diamond\Box C$ не обязана лежать в Φ, например, если $\Box C$ была формулой $\Box\neg\Box B$, где $\Box B \in \Gamma_0$; (4) $M \models \Diamond\Box C \to \Box C$ (аксиома евклидовости, записанная в виде контрапозиции); (5) $hx\, R_\Phi^{\mathsf{max}}\,\widehat{z}$ и $\Box C \in \Phi$.

Доказательство 2 (исправленное). Проблема в предыдущем доказательстве состояла в том, что формула со «слишком длинной» последовательностью боксов и ромбов не попала в построенное множество Φ. Если же мы недостающие формулы добавим в Φ, то в доказательстве для нового множества Φ появятся еще более длинные формулы, снова не попадающие в Φ, и так до бесконечности. Мы не желаем делать множесво Φ по причине того, что иначе отношение $\equiv_\Phi$ не будет отношением конечного индекса, и модель $\widehat{M}$ окажется бесконечной.

Однако можно принять во внимание тот факт, что в логике **K5** любая цепочка боксов и ромбов эквивалентна цепочке длины два! А именно,

$$\Box\Box\Box \leftrightarrow \Box\Box, \quad \Box\Box\Diamond \leftrightarrow \Box\Diamond, \quad \Box\Diamond\Box \leftrightarrow \Box\Box, \quad \Box\Diamond\Diamond \leftrightarrow \Box\Diamond.$$

Поэтому мы можем в множество Φ внести все формулы, имеющие вид $O_1 \ldots O_n \Box B$, где $\Box B \in \Gamma_0$ и каждый O_i есть либо $\Box$, либо $\Diamond$. Тогда в доказательстве евклидовости отношения $\widehat{R}$ проблем больше не возникнет. При этом в бесконечном (!) множестве Φ имеется лишь конечное число попарно неэквивалентных (в **K5**) формул. Следовательно (простое упражнение), отношение $\equiv_\Phi$ будет иметь конечный индекс, а значит, множество $\widehat{W} = W/{\equiv_\Phi}$ окажется конечным.

[9] Взятое из книги: A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, OUP, 1997; Theorem 5.35.

Доказательство 3 (Золин, 2019). Идея в том, чтобы в предыдущем рассуждении выбрать из построенного бесконечного множества Φ лишь конечное число требуемых для рассуждения формул, и провести для такого конечного Φ явное доказательство.

Пусть дана евклидова модель M (как всегда, будет достаточно лишь условия $M \models \mathbf{K5}$) и к.з.о.п. множество Γ. Рассмотрим следующее к.з.о.п. множество:

$$\Phi \;=\; \Gamma \;\cup\; \mathsf{Sub}^{\neg}\big\{\, \Box\Box B,\ \Box\neg\Box B,\ \Box\neg\Box\neg\Box B \;\mid\; \Box \in B\,\big\},$$

где $\mathsf{Sub}^{\neg}(C) = \{D, \neg D \mid D \in \mathsf{Sub}(C)\}$ — замыкание множества подформул относительно однократного отрицания. Рассмотрим максимальную фильтрацию $\widehat{M}$ модели M через Φ; напомним:

$$\widehat{x}\, R^{\mathsf{max}}_{\Phi}\, \widehat{y} \quad \leftrightharpoons \quad \forall \Box C \in \Phi \,\big(\, x \models \Box C \;\Rightarrow\; y \models C \,\big).$$

Лемма 1.19.1. *Пусть $\widehat{x}\, R^{\mathsf{max}}_{\Phi}\, \widehat{y}$. Тогда для любой формулы вида*[10] $\Diamond D \in \Phi$ *имеем:*

$$\big(\, x \models \Diamond D \;\Leftarrow\; y \models D \,\big).$$

Доказательство. Если $x \not\models \Diamond D$, то $x \models \Box\neg D$, откуда по определению R^{max}_{Φ} имеем $y \models \neg D$. $\Box$

Остается доказать, что отношение R^{max}_{Φ} — евклидово. Пусть $\widehat{x}\, R^{\mathsf{max}}_{\Phi}\, \widehat{y}$ и $\widehat{x}\, R^{\mathsf{max}}_{\Phi}\, \widehat{z}$; докажем $\widehat{y}\, R^{\mathsf{max}}_{\Phi}\, \widehat{z}$. Берем произвольную формулу $\Box C \in \Phi$. Надо проверить, что если $y \models \Box C$, то $z \models C$. Возможны следующие случаи:

Случай 1. Формула $\Box C$ такова, что $\neg\Box\neg\Box C \in \Phi$. Это покрывает случаи, когда $\Box C \in \Gamma$ и когда $\Box C = \Box\neg\Box B$ для некоторой $\Box B \in \Gamma$. Имеем цепь импликаций:

$$y \models \Box C \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}\; x \models \Diamond\Box C \;\overset{(2)}{\Longrightarrow}\; x \models \Box C \;\overset{(3)}{\Longrightarrow}\; z \models C.$$

Объяснения: (1) по лемме; (2) $\mathbf{K5} \vdash \Diamond\Box C \to \Box C$; (3) $\widehat{x}\, R^{\mathsf{max}}_{\Phi}\, \widehat{z}$.

Случай 2. $\Box C = \Box\Box B$ для некоторой $\Box B \in \Gamma$. Имеем цепь импликаций:

$$y \models \Box C, \text{ т.е. } y \models \Box\Box B \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}\; y \models \Box B \;\overset{(2)}{\Longrightarrow}\; x \models \Diamond\Box B \;\overset{(3)}{\Longrightarrow}\; x \models \Box\Box B \;\overset{(4)}{\Longrightarrow}\; z \models \Box B, \text{ т.е. } z \models C.$$

Объяснения: (1) $\mathbf{K5} \vdash \Box\Box B \to \Box B$; (2) по лемме и $\Diamond\Box B \in \Phi$; (3) $\mathbf{K5} \vdash \Diamond\Box B \to \Box\Box B$; (4) $\widehat{x}\, R^{\mathsf{max}}_{\Phi}\, \widehat{z}$ и $\Box\Box B \in \Phi$.

Случай 3. $\Box C = \Box\neg\Box\neg\Box B$ для некоторой $\Box B \in \Gamma$. Имеем цепь импликаций:

$$y \models \Box C, \text{ т.е. } y \models \Box\Diamond\Box B \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}\; y \models \Box B \;\overset{(2)}{\Longrightarrow}\; x \models \Diamond\Box B \;\overset{(3)}{\Longrightarrow}\; x \models \Box\Diamond\Box B \;\overset{(4)}{\Longrightarrow}\; z \models \Diamond\Box B, \text{ т.е. } z \models C.$$

Объяснения: (1) $\mathbf{K5} \vdash \Box\Diamond\Box B \to \Box B$; (2) по лемме и $\Diamond\Box B \in \Phi$; (3) $\mathbf{K5} \vdash \Diamond\Box B \to \Box\Diamond\Box B$; (4) $\widehat{x}\, R^{\mathsf{max}}_{\Phi}\, \widehat{z}$ и $\Box\Diamond\Box B \in \Phi$.

Замечание 1.20. В этом доказательстве кажется, что в Φ включены «лишние» формулы; а именно, формула $\Box\neg\Box\neg\Box B$ эквивалентна в логике $\mathbf{K5}$ формуле $\Box\Box B$. Тем самым, если выбросить эти (длинные) формулы, то получившееся множество Φ' будет давать то же самое отношение эквивалентности $\equiv_{\Phi'}$. Однако нам не удалось доказать, что и максимальное отношение $R^{\mathsf{max}}_{\Phi'}$ будет совпадать с отношением R^{max}_{Φ}. Для этого надо доказать, что в евклидовой модели M (или для модели, удовлетворяющей условию $M \models \mathbf{K5}$) если свойство $\big(x \models \Box C \;\Rightarrow\; y \models C\big)$ верно для всех формул $\Box C$ вида $\Box\Box B$, $\Box\neg\Box B$, где $\Box B \in \Gamma$, то оно верно и для формул $\Box C$ вида $\Box\neg\Box\neg\Box B$, где $\Box B \in \Gamma$.

Нам не потребовалось включать в Φ еще и формулы $\Box C$ вида $\Box\neg\Box\Box B$, где $\Box B \in \Gamma$, поскольку нам удалось доказать, что для них вышеуказанное свойство вытекает из этого свойства для формул $\Box C$ вида $\Box\neg\Box B$, где $\Box B \in \Gamma$. Действительно:

$$x \models \Box C, \text{ т.е. } x \models \Box\neg\Box\Box B \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}\; x \models \Box\neg\Box B \;\overset{(2)}{\Longrightarrow}\; y \models \neg\Box B \;\overset{(3)}{\Longrightarrow}\; y \models \neg\Box\Box B, \text{ т.е. } y \models C.$$

Объяснения: (1) $\mathbf{K5} \vdash \Box\neg\Box\Box C \leftrightarrow \Box\neg\Box C$; (2) поскольку $\Box\neg\Box B \in \Phi$; (3) $\mathbf{K5} \vdash \Box\Box C \to \Box C$.

[10] В нашем модальном языке нет оператора $\Diamond$, он является лишь сокращением для $\neg\Box\neg$.

Доказательство 4 (Золин, 2019). Приведем доказательство, использующее метод «хорново замыкание минимального отношения содержится в максимальном». Сначала, как обычно, дадим эквивалентные определения евклидова замыкания r^e бинарного отношения r. Напомним, что отношение R называется *евклидовым*, если оно удовлетворяет следующему хорнову условию: $x\,R\,y \wedge x\,R\,z \;\to\; y\,R\,z$.

Лемма 1.20.1. *Следующие условия эквивалентны (и дают определения евклидова замыкания):*

(a) *евклидово замыкание R^e отношения R — это наименьшее евклидово отношение, содержащее R; иначе говоря, это пересечение всех евклидовых отношений, содержащих R;*

(b) *евклидово замыкание R^e отношения R получается следующим итеративным процессом:* $R_1 = R, \quad R_{n+1} = R_n \cup ({R_n}^{-1} \circ R_n), \qquad R^e = \bigcup_{n\geqslant 1} R_n$;

(c) *евклидово замыкание R^e отношения R задается следующей эквивалентностью:* $(x,y) \in R^e \iff x\,R\,y$ *или* $\exists n \geqslant 1\ \exists z_1, \dots z_n\colon\ z_1\,R\,x,\ z_n\,R\,y,$ *и для* $1 < i \leqslant n$ *имеем* $(z_{i-1}\,R\,z_i$ *или* $z_i\,R\,z_{i-1})$.

(d) *евклидово замыкание R^e отношения R задается формулой (где r^* — рефл-транз замыкание):*

$$R^e \;=\; R \cup \bigcup_{n\geqslant 0}\Bigl(R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^n \circ R\Bigr) \;=\; R \,\cup\, \Bigl(R^{-1} \circ (R \cup R^{-1})^* \circ R\Bigr).$$

Доказательство. Эквивалентность пунктов (a) и (b) легко доказывается (упражнение). Докажем эквивалентность $(a) \Leftrightarrow (c)$. Обозначим через Q отношение, задаваемое правой частью эквивалентности в пункте (c). Пусть R^e определено согласно пункту (a) как наименьшее евклидово отношение, содержащее R. Надо доказать: $R^e = Q$.

($\subseteq$) Достаточно доказать, что Q евклидово, ибо R^e — наименьшее из таких. Но если $x\,Q\,y$ и $x\,Q\,z$, то очевидно, что точки y и z соединены цепью точек (одна из которых — точка x), в которой между точками есть R-стрелка «вправо» или «влево», а также есть R-стрелки из первой точки цепи в точку y и из последней точки цепи в точку z. Значит, $y\,Q\,z$.

($\supseteq$) Обозначим символом Q_n отношение, задаваемое условием из пункта (c), стоящим под квантором $\exists n \geqslant 1$. Таким образом, $Q = R \cup \bigcup_{n\geqslant 1} Q_n$. Надо доказать, что $R^e \supseteq Q$. Включение $R^e \supseteq R$ тривиально. Осталось индукцией по $n \geqslant 1$ доказать: $R^e \supseteq Q_n$. **База**: $R^e \supseteq R^{-1} \circ R$ очевидна. **Шаг** индукции: пусть $(x,y) \in Q_{n+1}$, то есть точки x и y соединены цепью из точек $z_1, \dots, z_{n+1}$, между соседними есть стрелки «влево» или «вправо», а также ($z_1\,R\,x$ и $z_{n+1}\,R\,y$. Докажем, что $(x,y) \in R^e$. Возможны случаи:

1. Все стрелки между точками z_i смотрят «влево». В частности, $z_2\,R\,z_1$. Тогда $z_1\,R\,x$ и $z_1\,Q_n\,y$. По предположению индукции $(z_1,x),(z_1,y) \in R^e$. Ввиду евклидовости R^e заключаем $(x,y) \in R^e$.

2. Некоторая стрелка между точками z_i смотрит «вправо». Возьмем из них самую правую: $z_i\,R\,z_{i+1}$.
а) Если $i = n$, то $z_n\,Q_n\,x$ и $z_n\,Q_1\,y$. По предположению индукции, $(z_n,x),(z_n,y) \in R^e$. Значит, $(x,y) \in R^e$.
б) Если $1 \leqslant i < n$, то следующая стрелка смотрит «влево». Тогда $(z_{i+1},x) \in Q_k$ и $(z_{i+1},y) \in Q_\ell$ для некоторых $k,\ell \leqslant n$. Аналогично получаем $(x,y) \in R^e$. $\square$

Мы готовы доказать теорему. Дана евклидова модель M (или более слабо, $M \models \mathbf{K5}$) и к.з.о.п. множество формул Γ. Рассмотрим к.з.о.п. множество формул

$$\Phi \;=\; \Gamma \;\cup\; \mathsf{Sub}\bigl\{\, \Diamond\Box B \mid \Box B \in \Gamma \,\bigr\}.$$

Строим фильтрацию $\widehat{M}$ модели M через Φ (согласованную с Γ) как обычно, и в качестве отношения достижимости берем евклидово замыкание минимального отношения: $\widehat{R} = (R_\Phi^{\mathsf{min}})^e$. Мы получили конечную евклидову модель. Чтобы доказать, что $\widehat{M}$ является фильтрацией модели M через Φ, *согласованной с* Γ, нам осталось доказать, что[11] $\widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\mathsf{max}}$. Более подробно, осталось доказать, что

евклидово замыкание минимального отношения сордержится в максимальном: $(R_\Phi^{\mathsf{min}})^e \subseteq R_\Gamma^{\mathsf{max}}$.

Для краткости обозначим $r = R_\Phi^{\mathsf{min}}$ и $s = R_\Gamma^{\mathsf{max}}$, тогда надо доказать $r^e \subseteq$. Вспомним, что $r^e = r \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots$ Очевидно, что $r \subseteq s$. Остается доказать, что $Q_n \subseteq s$; причем доказательство будет не индукцией по n, а напрямую для данного n. Нам понадобится следующая лемма.

[11] Обратите внимание: Γ, а не Φ; как и в других доказательствах про хорновы замыкания минимального отношения.

Лемма 1.20.2. *Пусть $M \models \mathbf{K5}$. Тогда для любых $a, b \in W$, таких что $a\,R\,b$, и любой формулы B*

$$M, a \models \Diamond\Box B \quad \Leftrightarrow \quad M, b \models \Diamond\Box B.$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Если $b \models \Diamond\Box B$, то $b \models \Box B$ по аксиоме евклидовости, и $a \models \Diamond\Box B$, ибо $a\,R\,b$.

($\Rightarrow$) Если $a \models \Diamond\Box B$, то $a \models \Box\Diamond\Box B$, ввиду $\mathbf{K5} \vdash \Diamond\Box B \to \Box\Diamond\Box B$; и значит $b \models \Diamond\Box B$, ибо $a\,R\,b$. $\Box$

Итак, пусть $\widehat{x}\,Q_n\,\widehat{y}$. Надо доказать $\widehat{x}\,R_\Gamma^{\mathsf{max}}\,\widehat{y}$. Имеем: классы $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ соединены r-цепью из n классов $\widehat{z_1}, \ldots, \widehat{z_n}$, причем r-стрелки ведут из $\widehat{z_1}$ в $\widehat{x}$, из $\widehat{z_n}$ в $\widehat{y}$, а также между $\widehat{z_i}$ «влево» или «вправо». Это означает, что между некоторыми представителями этих классов (т.е. элементами из W) имеются R-стрелки, ведущие в ту же сторону. Внутри каждого класса $\widehat{z_i}$ два представителя могут быть различными; обозначим их $a_i, b_i \in \widehat{z_i}$. Будем считать, что $a_1\,R\,x$ и $b_n\,R\,y$, то есть для упрощения обозначений считаем, что в классах $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ через x и y обозначен именно представитель, в которого входит R-стрелка.

Для доказательства $\widehat{x}\,R_\Gamma^{\mathsf{max}}\,\widehat{y}$ возьмем произвольную формулу $\Box B \in \Gamma$ и покажем, что если $x \models \Box B$, то $y \models B$. Имеем цепь импликаций:

$$x \models \Box B \overset{(1)}{\Longrightarrow} a_1 \models \Diamond\Box B \overset{(2)}{\Longrightarrow} \ldots \overset{(2)}{\Longrightarrow} b_n \models \Diamond\Box B \overset{(3)}{\Longrightarrow} b_n \models \Box B \overset{(4)}{\Longrightarrow} y \models B.$$

Объяснения: (1) ввиду $a_1\,R\,x$; (2) эта цепь импликаций верна, т.к. здесь мы переходим либо от одной точки к другой внутри класса эквивалентности $\widehat{z_i}$, а они не отличимы формулой $\Diamond\Box B$, поскольку она лежит в Φ, либо от одной точки к другой, соединенной с ней R-стрелкой (в любую сторону), а тогда применима Лемма 1.20.2; (3) по аксиоме евклидовости; (4) ввиду $b_n\,R\,y$.

Теорема доказана. $\Box$

Гипотеза 1.21. Расширение логики $\mathbf{K}$ аксиомой (i,j)-*евклидовости* $\Diamond^i p \to \Box^j \Diamond p$, где $i, j \geqslant 1$, допускает фильтрацию? Данная модальная формула соответствует условию: $\big(xR^iy \;\&\; xR^jz \;\Rightarrow\; yRz\big)$.

Расширение логики $\mathbf{K}$ любым конечным числом аксиом данного вида допускает фильтрацию?

Доказать это можно методом «хорново замыкание минимального отношения содержится в максимальном»?

Замечание 1.22. Для доказательства фильтруемости логики $\mathbf{K5}$ нами был использован пункт (c) Леммы 1.20.1, то есть «явное» представление евклидова замыкания. Трудность в поиске подобных «явных» представлений для других хорновых замыканий является препятствием для доказательства фильтруемости соответствующих логик (см. Гипотезу 1.21). Можно ли как-то провести доказательство для евклидова замыкания по методу «хорново замыкание минимального отношения содержится в максимальном», но не прибегать к поиску «явного» представления? (как это делалось для транзитивного и n-транзитивного замыкания, в которых пункт (c) соответствующей леммы был дан лишь для полноты картины и в последующем доказательстве не использовался) В прежних доказательствах мы вместо явного представления доказывали лемму о «достаточных условиях» для того, чтобы хорново замыкание r^H отношения r содержалось в отношении s. Можно ли аналогичные достаточные условия найти для евклидова замыкания?

1.4 Фильтрация как средство доказательства полноты и разрешимости

Имеется другая формулировка понятия «логика L допускает фильтрацию», влекущая полноту L.

Прежнее понятие говорило, что мы можем *каждую* L-модель M отфильтровать в конечную L-модель $\widehat{M}$ (с сохранением истинности нужных нам формул). Тем самым прежнее понятие не привязывалось к *выводимости* формул из логики L, и ничего не говорило о полноте логики L; оно было лишь связано с классом шкал $\mathsf{Frames}(L)$, задаваемым аксиомами логики L.

Новое понятие говорит, что для каждой формулы A, не являющейся *теоремой* логики L, мы можем отфильтровать *некоторую* модель M (не обязательно L-модель), опровергающую формулу A, в конечную L-модель $\widehat{M}$ через некоторое к.з.о.п. множество формул Φ, содержащее формулу A, а значит, формула A будет опровергаться и на модели $\widehat{M}$. Как следствие, всякая не-теорема логики L опровергается на некоторой конечной L-шкале, что означает, что L полна и является логикой класса всех своих конечных шкал (ПОКШ).

Определение 1.23. Логика L *допускает фильтрацию* (*в сильном смысле*; будем писать ДФ'), если

для каждой формулы A, такой что $L \nvdash A$
существует модель M, опровергающая формулу A: $M \not\models A$
и существует к.з.о.п. множество формул Φ, содержащее A, и L-модель $\widehat{M}$,
являющаяся фильтрацией модели M через Φ, сохраняющей множество $\mathsf{Sub}(A)$.

Сравните следующую теорему с Теоремой 1.8.

Теорема 1.24. *Если L — ДФ', то она ПОКШ.*

Если кроме того логика L конечно аксиоматизируема, то она разрешима.

Новое понятие фильтрации не сравнимо со старым: старое ничего не говорило про множество *теорем* логики L (а только про множество аксиом и задаваемый ими класс шкал); новое же ничего не говорит о фильтруемости *каждой* L-модели, а только о фильтруемости некоторых моделей (даже не обязательно L-моделей), являющихся контрмоделями для не-теорем логики L.

Все рассмотренные выше логики допускают фильтрацию и в новом смысле (проверить).

1.5 Фильтрация канонической модели

Новое определение фильтрации предписывает, что для каждой формулы A, не являющейся теоремой логики L, достаточно отфильтровать хотя бы одну контрмодель в L-модель, сохраняя при этом истинность подформул формулы A. Имеется одна модель, являющаяся контрмоделью сразу для всех не-теорем логики L — это каноническая модель $M_L = (W_L, R_L, V_L)$. Напомним, что она не является непременно L-моделью, но удовлетворяет условию $M_L \models L$. Оказывается, что фильтруя (при $\Gamma = \Phi$, то есть по определению 1.1) каноническую модель M_L в какую-либо модель $\widehat{M}$, на которой тоже истинна L, у нас нет выбора для отношения $\widehat{R}$ — оно непременно будет минимальным R_Φ^{min}.

Лемма 1.25. *Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика, $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ — ее каноническая модель, $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$ — фильтрация (в смысле определения 1.1) канонической модели M_L через некоторое множество формул Φ, причем логика L истинна на получившейся модели: $\widehat{M} \models L$. Тогда отношение $\widehat{R}$ совпадает с минимальным: $\widehat{R} = R_\Phi^{\mathsf{min}}$.*

Доказательство. По условию $R_\Phi^{\mathsf{min}} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\mathsf{max}}$. Надо доказать включение $\widehat{R} \subseteq R_\Phi^{\mathsf{min}}$, т.к. обратное включение выполнено всегда. Пусть $\widehat{x}\,\widehat{R}\,\widehat{y}$. Докажем, что $\widehat{x}\,R_\Phi^{\mathsf{min}}\,\widehat{y}$. Для этого покажем. что некоторые представители $x' \in \widehat{x}$ и $y' \in \widehat{y}$ связаны отношением R_L; а именно, покажем это для $x' := \mathsf{Theory}(\widehat{M}, \widehat{x})$ и $y' := \mathsf{Theory}(\widehat{M}, \widehat{y})$, соответственно.

Во-первых, $x'\,R_L\,y'$, поскольку для каждой формулы $\Box B \in \mathsf{Fm}$

$$\Box B \in x' = \mathsf{Theory}(\widehat{M}, \widehat{x}) \iff \widehat{M}, \widehat{x} \models \Box B \implies \widehat{M}, \widehat{y} \models B \iff B \in y' = \mathsf{Theory}(\widehat{M}, \widehat{y}).$$

Во-вторых, покажем, что $x' \in \widehat{x}$ (и аналогично $y' \in \widehat{y}$), то есть $x \equiv_\Phi x'$. Имеем для каждой $C \in \Phi$:

$$M_L, x' \models C \iff C \in x' \iff C \in \mathsf{Theory}(\widehat{M}, \widehat{x}) \iff \widehat{M}, \widehat{x} \models C \iff M_L, x \models C.$$

Лемма доказана. □

2 Интерполяционная теорема

Определение 2.1. Логика L обладает *интерполяционным свойством Крейга*, если из $L \vdash A \to C$ следует, что существует формула B, такая что: 1) $L \vdash A \to B$ и $L \vdash B \to C$; 2) $\mathsf{Var}(B) \subseteq \mathsf{Var}(A) \cap \mathsf{Var}(C)$.

Формула B называется *интерполянтом* импликации $A \to C$ в логике L.

Теорема 2.2. *Логики* $\mathbf{K}, \mathbf{KT}, \mathbf{K4}, \mathbf{S4}, \mathbf{GL}$ *обладают интерполяционным свойством Крейга.*

Доказательство. [12] Пусть L — одна из указанных логик, и $L \vdash A \to C$. Будем считать, что множества переменных $\mathsf{Var}(A)$ и $\mathsf{Var}(C)$ не содержатся друг в друге, иначе в качестве интерполянта можно взять A или C. Обозначим $\mathcal{L}_A = \{\varphi \mid \mathsf{Var}(\varphi) \subseteq \mathsf{Var}(A)\}$, аналогично $\mathcal{L}_C$; а также $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_C$. Мы считаем, что в языке есть формулы без переменных (в частности, $\bot$ и $\top$), поэтому $\mathcal{L} \neq \varnothing$. Мы доказываем существование интерполянта $B \in \mathcal{L}$ импликации $A \to C$ в логике L. Рассмотрим конечные замкнутые относительно подформул множества формул:

$$\Gamma = \{\bot, \top\} \cup \mathsf{Sub}\{A, C\}, \qquad \Phi = \Gamma \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}.$$

Для всякого множества $x \subseteq \Phi$ обозначим $x_A = x \cap \mathcal{L}_A$, $x_C = x \cap \mathcal{L}_C$. Поскольку в Φ каждая формула принадлежит $\mathcal{L}_A$ или $\mathcal{L}_C$, то $x = x_A \cup x_C$.

Определение. Формула $B \in \mathcal{L}$ *делит* множество $x \subseteq \Phi$ (в L), если $L \vdash \bigwedge x_A \to B$ и $L \vdash \bigwedge x_C \to \neg B$.

Факт 0. *Формула* $B \in \mathcal{L}$ *делит* $\{A, \neg C\} \subseteq \Phi$ *в* $L \iff B$ *— интерполянт для* $A \to C$ *в* L.

$\triangleright$ Обозначив $x = \{A, \neg C\}$, имеем $x_A = \{A\}$ и $x_C = \{\neg C\}$, поскольку $A \notin \mathcal{L}_C$ и $C \notin \mathcal{A}$ по предположению. Тогда $L \vdash \bigwedge x_A \to B$ означает $L \vdash A \to B$, а $L \vdash \bigwedge x_C \to \neg B$ равносильно $L \vdash B \to C$. $\triangleleft$

Определение. Множество $x \subseteq \Phi$ назовем *L-простым*, если его не делит в L никакая формула $B \in \mathcal{L}$.

Факт 1. *Множество x L-непротиворечивое $\Longrightarrow$ оно L-простое.*

$\triangleright$ Если бы B делила x, то $L \vdash \bigwedge x_A \to B$ и $L \vdash \bigwedge x_C \to \neg B$, откуда $L \vdash \bigwedge x \to (B \wedge \neg B)$ и $L \vdash \neg \bigwedge x$. $\triangleleft$

Факт 2. *Множество x L-простое $\Longrightarrow$ множества x_A и x_C являются L-непротиворечивыми.*

$\triangleright$ Если бы x_A был L-противоречивым, то $\bot$ делила бы x, ибо $L \vdash \bigwedge x_A \to \bot$ и $L \vdash \bigwedge x_C \to \neg\bot$. $\triangleleft$

Ввиду конечности Φ всякое L-простое множество содержится в некотором максимальном (по $\subseteq$) L-простом множестве (L-м.п.м.). Следующая лемма позволит дать альтернативное описание максимальных простых множеств.

Лемма 2.3. *Если множество $x \subseteq \Phi$ L-простое и $D \in \Gamma$, то $x \cup \{D\}$ или $x \cup \{\neg D\}$ — L-простое.*

Доказательство. (В этой лемме нужна лишь логика высказываний.) Допустим противное: формула $B \in \mathcal{L}$ делит $x \cup \{D\}$, а формула $B' \in \mathcal{L}$ делит $x \cup \{\neg D\}$. Так как $D \in \Gamma$, то $D \in \mathcal{L}_A$ или $D \in \mathcal{L}_C$; без ограничения общности $D \in \mathcal{L}_A$. Дальнейшее рассуждение зависит от того, находится ли D в языке $\mathcal{L}_C$.

Случай 1: $D \in \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_C = \mathcal{L}$. Тогда делимость рассматриваемых множеств означает:

$$\begin{array}{llll} (1) & L \vdash \bigwedge x_A \wedge D \to B & (3) & L \vdash \bigwedge x_C \wedge D \to \neg B \\ (2) & L \vdash \bigwedge x_A \wedge \neg D \to B' & (4) & L \vdash \bigwedge x_C \wedge \neg D \to \neg B' \end{array}$$

Обозначим $B^* := (D \to B) \wedge (\neg D \to B')$. Заметим, что $B^* \in \mathcal{L}$. Кроме того, в логике высказываний выводится: $\vdash \neg B^* \leftrightarrow (D \to \neg B) \wedge (\neg D \to \neg B')$. Из (1) и (2) следует $L \vdash \bigwedge x_A \to B^*$; из (3) и (4) следует $L \vdash \bigwedge x_C \to \neg B^*$. Тем самым формула $B^* \in \mathcal{L}$ делит множество x в L; противоречие с его L-простотой.

Случай 2: $D \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{L}_C$. Тогда делимость рассматриваемых множеств означает:

$$\begin{array}{llll} (1) & L \vdash \bigwedge x_A \wedge D \to B & (3) & L \vdash \bigwedge x_C \to \neg B \\ (2) & L \vdash \bigwedge x_A \wedge \neg D \to B' & (4) & L \vdash \bigwedge x_C \to \neg B' \end{array}$$

Обозначим $B^* = (B \vee B')$. Тогда из (1) и (2) следует $L \vdash \bigwedge x_A \to B^*$; из (3) и (4) следует $L \vdash \bigwedge x_C \to \neg B^*$. Тем самым формула $B^* \in \mathcal{L}$ делит множество x в L; противоречие с его L-простотой. $\square$

[12] Данное доказательство принадлежит Smoryński; по случайному совпадению, его имя — Craig. Интерполяционную теорему впервые доказал William Craig (1918–2016) в 1957 году для логики первого порядка.

Следствие. *L-простое множество $x \subseteq \Phi$ максимально по $\subseteq \iff \forall D \in \Gamma\ (D \in x$ или $\neg D \in x)$.*

Действительно, в максимальном x хотя бы одна из формул D и $\neg D$ должна лежать (по лемме 2.3); но обе они лежать в x не могут, ибо иначе они лежали бы обе в x_A или обе x_C, и тем самым множество x_A или x_C оказалось бы L-противоречивым. Фактически это рассуждение показывает:

Факт 3. *Если x — макс. L-простое, то x_A (x_C) — макс. L-непротиворечивое подмножество Φ_A (Φ_C).*

Лемма 2.4. *Пусть $x \subseteq \Phi$ — максимальное L-простое множество формул.*

(a) *Пусть $D, E \in \mathcal{L}_A$ (аналогично $\mathcal{L}_C$). Если $L \vdash D \to E$, то из $D \in x$ следует $E \in x$.*
(b) *Пусть $D \in \Gamma$. Тогда: $(\neg D) \in x \iff D \notin x$.*
(c) *Пусть $(D \wedge E) \in \Gamma$. Тогда: $(D \wedge E) \in x \iff D \in x$ и $E \in x$.*
(d) *Пусть $(D \vee E) \in \Gamma$. Тогда: $(D \vee E) \in x \iff D \in x$ или $E \in x$.*
(e) *Пусть $(D \to E) \in \Gamma$. Тогда: $(D \to E) \in x \iff (D \in x \Rightarrow E \in x)$.*

Доказательство леммы оставим в качестве упражнения (используйте Факт 3).

Доказывать теорему мы будем от противного. Предположим, что импликация $A \to C$ не имеет интерполянта в логике L. Тогда мы построим (даже конечную!) L-модель $M = (W, R, V)$, в которой данная импликация опровергается в некоторой точке. Это будет противоречить тому, что импликация $A \to C$ выводится в логике L (то есть противоречити теореме о *корректности* для логики L).

Положим $W = \{x \subseteq \Phi \mid x$ есть максимальное L-простое множество формул$\}$. Множество W не пусто, так как импликация $A \to C$ не имеет интерполянта в L, а значит, множество формул $\{A, \neg C\}$ является L-простым и, следовательно, содержится в некотором максимальном L-простом множестве $x_0 \in W$. Оценка V переменных $p \in \Phi$ — каноническая: $x \models p \Leftrightarrow p \in x$. Для каждой из рассматриваемых логик L мы построим отношение R таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) на шкале $F = (W, R)$ общезначима логика L;
(2) $\forall \Box E \in \Gamma\ \forall x \in W\ \big(\Box E \in x \ \Leftrightarrow\ \forall y \in R(x)\ E \in y\big)$.

Докажем, что из этих двух условий вытекает следующая ключевая лемма.

Лемма 2.5. *Для всякой формулы $D \in \Gamma$ и всякого $x \in W$ имеем: $M, x \models D \iff D \in x$.*

Доказательство. Индукция по построению формулы D. База индукции верна по построению V; шаги, отвечающие булевым связкам, обеспечены леммой 2.4. Остается случай модальности. Имеем:

$$x \models \Box D \ \overset{(i)}{\iff}\ \forall y \in R(x)\ y \models D \ \overset{(ii)}{\iff}\ \forall y \in R(x)\ D \in y \ \overset{(iii)}{\iff}\ \Box D \in x.$$

Здесь верно $\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики, $\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции, $\overset{(iii)}{\iff}$ по свойству (2). $\square$

Этой леммы достаточно для завершения доказательства теоремы: поскольку $\{A, \neg C\} \subseteq x_0$, то $M, x_0 \not\models A \to C$. Тем самым, выводимая в L формула $A \to C$ опроверглась на некоторой L-шкале.

Отношение R будет строиться в зависимости от логики L:

для логик **K** и **KT**: $x\,R\,y \ \leftrightharpoons\ \forall \Box E \in \Gamma\ (\Box E \in x \ \Rightarrow\ E \in y)$.

для логик **K4** и **S4**: $x\,R\,y \ \leftrightharpoons\ \forall \Box E \in \Gamma\ (\Box E \in x \ \Rightarrow\ E, \Box E \in y)$.

для логики **GL**: $x\,R\,y \ \leftrightharpoons\ \forall \Box E \in \Gamma\ (\Box E \in x \ \Rightarrow\ E, \Box E \in y)\ \&$
$\exists \Box E \in \Gamma\ (\Box E \notin x\ \&\ \Box E \in y)$.

Остается проверить свойства (1) и (2). Очевидно, что в (2) импликация $(\Rightarrow)$ выполняется для всех построенных нами отношений R, поэтому мы будем проверять лишь импликацию $(\Leftarrow)$.

Логика K. Свойство (1) тривиально. Проверим (2)($\Leftarrow$). Пусть $\Box E \notin x$, но $\Box E \in \Gamma$; тогда $\neg\Box E \in x$. Рассмотрим множество

$$Y \;=\; \{\varphi \mid \Box\varphi \in x\} \cup \{\neg E\} \;\subseteq\; \Phi.$$

Остается доказать, что Y — $\mathbf{K}$-простое, ибо тогда $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W$, и имеем $x\,R\,y$ и $E \notin y$.

Допустим противное — множество Y делится в $\mathbf{K}$ некоторой формулой $B \in \mathcal{L}$. Имеем:

$$Y \;=\; \{\,G \mid \Box G \in x_A\} \cup \{\,H \mid \Box H \in x_C\} \cup \{\neg E\} \;=\; \{G_1, \ldots, G_m\} \cup \{H_1, \ldots, H_n\} \cup \{\neg E\}.$$

Поскольку $E \in \Gamma$, то $E \in \mathcal{L}_A$ или $E \in \mathcal{L}_C$; без ограничения общности будем считать, что $E \in \mathcal{L}_A$. Дальнейшее рассуждение зависит от того, принадлежит ли формула E языку $\mathcal{L}_C$.

Случай 1: $E \in \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_C = \mathcal{L}$. Тогда делимость множества Y означает:

$\mathbf{K} \vdash\; G_1 \wedge \ldots \wedge G_m \wedge \neg E \to B$ (a)
$\mathbf{K} \vdash\; H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg E \to \neg B$ (b)

Из (b) получаем следующее:

$\mathbf{K} \vdash\; H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \;\longrightarrow\; (B \to E)$,
$\mathbf{K} \vdash\; \Box H_1 \wedge \ldots \wedge \Box H_n \;\longrightarrow\; \Box(B \to E)$,
$\mathbf{K} \vdash\; \bigwedge x_C \;\longrightarrow\; \Box(B \to E)$, поскольку $\Box H_j \in x_C$.

Из (a) получаем следующее,[13] пользуясь тавтологией $(\neg B \to E) \to \big((B \to E) \to E\big)$:

$\mathbf{K} \vdash\; G_1 \wedge \ldots \wedge G_m \;\longrightarrow\; (\neg B \to E)$,
$\mathbf{K} \vdash\; G_1 \wedge \ldots \wedge G_m \;\longrightarrow\; \big((B \to E) \to E\big)$,
$\mathbf{K} \vdash\; \Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_m \;\longrightarrow\; \big(\Box(B \to E) \to \Box E\big)$,
$\mathbf{K} \vdash\; \Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_m \wedge \neg\Box E \;\longrightarrow\; \neg\Box(B \to E)$,
$\mathbf{K} \vdash\; \bigwedge x_A \;\longrightarrow\; \neg\Box(B \to E)$, поскольку $\Box G_i \in x_A$ и $\neg\Box E \in x_A$.

Значит, формула $\neg\Box(B \to E)$ (которая, заметим, лежит в $\mathcal{L}$) делит множество x, противоречие.

Случай 2: $E \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{L}_C$. Тогда делимость множества Y означает:

$\mathbf{K} \vdash\; G_1 \wedge \ldots \wedge G_m \wedge \neg E \to B$ (a)
$\mathbf{K} \vdash\; H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \to \neg B$ (b)

Из (a) получаем следующее:

$\mathbf{K} \vdash\; G_1 \wedge \ldots \wedge G_m \;\longrightarrow\; (\neg B \to E)$,
$\mathbf{K} \vdash\; \Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_m \;\longrightarrow\; (\Box\neg B \to \Box E)$,
$\mathbf{K} \vdash\; \Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_m \wedge \neg\Box E \;\longrightarrow\; \neg\Box\neg B$,
$\mathbf{K} \vdash\; \bigwedge x_A \;\longrightarrow\; \neg\Box\neg B$, поскольку $\Box G_i \in x_A$ и $\neg\Box E \in x_A$.

Из (b) получаем следующее:

$\mathbf{K} \vdash\; \Box H_1 \wedge \ldots \wedge \Box H_n \to \Box\neg B$,
$\mathbf{K} \vdash\; \bigwedge x_C \to \Box\neg B$, поскольку $\Box H_j \in x_C$.

Значит, формула $\Diamond B$ (лежащая в $\mathcal{L}$) делит множество x, противоречие.

Логика KT. Доказательство (2)($\Leftarrow$) прежнее. Надо лишь проверить свойство (1), то есть рефлексивность отношения R, т.е. $x\,R\,x$. Пусть $\Box E \in x$, б.о.о. $\Box E \in x_A$. Учтём, что $\mathbf{KT} \vdash \Box E \to E$. Тогда по пункту (a) Леммы 2.4 заключаем $E \in x_A$, то есть $E \in x$.

Логики K4 и S4. Докажем транзитивность отношения R. Пусть $x\,R\,y\,R\,z$. Чтобы доказать $x\,R\,z$, берем любую $\Box E \in x$. Тогда $E, \Box E \in y$, откуда $E, \Box E \in z$.

В случае логики **S4** докажем еще рефлексивность R: если $\Box E \in x$, то как в случае логики **KT**, мы получаем $E \in x$, а значит, $E, \Box E \in x$; таким образом, доказано $x\,R\,x$.

Для логик $L \in \{\mathbf{K4}, \mathbf{S4}\}$ проверим, что отношение R (которое для этих логик определялось одинаково) удовлетворяет условию (2). Пусть $\Box E \notin x$, где $\Box E \in \Gamma$; тогда $\neg\Box E \in x$. Рассмотрим множество

[13] Если действовать в (a) по аналогии со случаем (b), то получим в заключении $\vdash \bigwedge x_A \to \Box(\neg B \to E)$ и никакого полезного вывода (о делимости множества x какой-либо формулой из $\mathcal{L}$) сделать не сможем: эта формула и $\Box(B \to E)$ не эквивалентны отрицанию друг друга. Но обратим внимание на тот факт, что принадлежность $\neg\Box E \in x$ в этом случае не использована. Сморинский в этом месте применил демонстрируемый далее трюк.

$$Y \;=\; \{\, \varphi, \Box\varphi \mid \Box\varphi \in x\} \cup \{\neg E\} \;\subseteq\; \Phi.$$

Остается доказать, что Y — L-простое, ибо тогда $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W$, и имеем $x\,R\,y$ и $E \notin y$.

Допустим противное — множество Y делится в L некоторой формулой $B \in \mathcal{L}$. Имеем:

$$Y \;=\; \{\, G_1, \Box G_1, \ldots, G_m, \Box G_m\} \,\cup\, \{\, H_1, \Box H_1, \ldots, H_n, \Box H_n\} \,\cup\, \{\neg E\}, \quad \text{где } \Box G_i \in x_A,\ \Box H_j \in x_C.$$

Доказательство такое же, как в случае логики **K**, со следующими отличиями (для H_j аналогично):

- там где, раньше было $G_1 \wedge \ldots \wedge G_m$, теперь будет $G_1 \wedge \Box G_1 \wedge \ldots \wedge G_m \wedge \Box G_m$.
- после навешивания $\Box$ получим $\Box G_1 \wedge \Box\Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_m \wedge \Box\Box G_m$.
- поскольку $\mathbf{K4} \vdash \Box G_i \to \Box\Box G_i$, формула $\Box G_i \wedge \Box\Box G_i$ равносильна $\Box G_i$ в логике **K4**.

Логика GL. (1) На конечной шкале $F = (W, R)$ общезначима логика **GL** тогда и только тогда, когда отношение R иррефлексивно и транзитивно. Оба свойства для нашего отношения R очевидны.

(2)($\Leftarrow$) Пусть $\Box E \notin x$, где $\Box E \in \Gamma$; тогда $\neg\Box E \in x$. Рассмотрим (отличие от **K4** — в формуле $\Box E$)

$$Y \;=\; \{\, \varphi, \Box\varphi \mid \Box\varphi \in x\} \cup \{\neg E, \Box E\} \;\subseteq\; \Phi.$$

Остается доказать, что Y — **GL**-простое, ибо тогда $Y \subseteq y$ для некоторого $y \in W$, и имеем $x\,R\,y$ и $E \notin y$.

Допустим противное — множество Y делится в **GL** некоторой формулой $B \in \mathcal{L}$. Имеем:

$$Y \;=\; \{\, G_1, \Box G_1, \ldots, G_m, \Box G_m\} \,\cup\, \{\, H_1, \Box H_1, \ldots, H_n, \Box H_n\} \,\cup\, \{\neg E, \Box E\}, \quad \text{где } \Box G_i \in x_A,\ \Box H_j \in x_C.$$

Без ограничения общности $E \in \mathcal{L}_A$. Возможны случаи $E \in \mathcal{L}_C$ и $E \notin \mathcal{L}_C$. Обозначим $\boxdot\varphi = \varphi \wedge \Box\varphi$.

Случай 1: $E \in \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_C = \mathcal{L}$. Тогда делимость множества Y означает:

$\mathbf{GL} \vdash\ \boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \boxdot G_m \wedge \neg E \wedge \Box E \ \to\ B$ (a)
$\mathbf{GL} \vdash\ \boxdot H_1 \wedge \ldots \wedge \boxdot H_n \wedge \neg E \wedge \Box E \ \to\ \neg B$ (b)

Из (b) получаем следующее:

$\mathbf{GL} \vdash\ \boxdot H_1 \wedge \ldots \wedge \boxdot H_n \ \longrightarrow\ (B \to (\Box E \to E))$. Обозначим $\varphi = (B \to (\Box E \to E))$.
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box\boxdot H_1 \wedge \ldots \wedge \Box\boxdot H_n \ \longrightarrow\ \Box\varphi$,
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box H_1 \wedge \ldots \wedge \Box H_n \ \longrightarrow\ \Box\varphi$, поскольку $\mathbf{GL} \vdash (\Box H \wedge \Box\Box H) \leftrightarrow \Box H$;
$\mathbf{GL} \vdash\ \bigwedge x_C \ \longrightarrow\ \Box\varphi$, поскольку $\Box H_j \in x_C$.

Из (a) получаем следующее (применим тот же трюк, что и для логики **K**):

$\mathbf{GL} \vdash\ \boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \boxdot G_m \ \longrightarrow\ (\neg B \to (\Box E \to E))$. Ввиду тавтологии $(\neg B \to \psi) \to ((B \to \psi) \to \psi)$:
$\mathbf{GL} \vdash\ \boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \boxdot G_m \ \longrightarrow\ \big((B \to (\Box E \to E)) \ \to\ (\Box E \to E)\big)$. Обозначим $\varphi = (B \to (\Box E \to E))$.
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box\boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \Box\boxdot G_m \ \longrightarrow\ \big(\Box\varphi \ \to\ \Box(\Box E \to E)\big)$,
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box\boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \Box\boxdot G_m \ \longrightarrow\ \big(\Box\varphi \ \to\ \Box E\big)$, ибо $\mathbf{GL} \vdash \Box(\Box E \to E) \to \Box E$.
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_m \ \longrightarrow\ \big(\Box\varphi \ \to\ \Box E\big)$, поскольку $\mathbf{GL} \vdash (\Box G \wedge \Box\Box G) \leftrightarrow \Box G$;
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_m \wedge \neg\Box E \ \longrightarrow\ \neg\Box\varphi$,
$\mathbf{GL} \vdash\ \bigwedge x_A \longrightarrow \neg\Box\varphi$, поскольку $\Box G_i \in x_A$ и $\neg\Box E \in x_A$.

Значит, формула $\neg\Box(B \to (\Box E \to E))$ (лежащая в $\mathcal{L}$) делит множество x в логике **GL**, противоречие.

Случай 2: $E \in \mathcal{L}_A \setminus \mathcal{L}_C$. Тогда делимость множества Y означает:

$\mathbf{GL} \vdash\ \boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \boxdot G_m \wedge \neg E \wedge \Box E \ \to\ B$ (a)
$\mathbf{GL} \vdash\ \boxdot H_1 \wedge \ldots \wedge \boxdot H_n \ \to\ \neg B$ (b)

Из (a) получаем следующее:

$\mathbf{GL} \vdash\ \boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \boxdot G_m \ \longrightarrow\ (\neg B \to (\Box E \to E))$,
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box\boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \Box\boxdot G_m \ \longrightarrow\ (\Box\neg B \to \Box(\Box E \to E))$,
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box\boxdot G_1 \wedge \ldots \wedge \Box\boxdot G_m \ \longrightarrow\ (\Box\neg B \to \Box E)$, поскольку $\mathbf{GL} \vdash \Box(\Box E \to E) \to \Box E$.
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box G_1 \wedge \ldots \wedge \Box G_m \wedge \neg\Box E \ \longrightarrow\ \neg\Box\neg B$, поскольку $\mathbf{GL} \vdash (\Box G \wedge \Box\Box G) \leftrightarrow \Box G$;
$\mathbf{GL} \vdash\ \bigwedge x_A \ \longrightarrow\ \neg\Box\neg B$, поскольку $\Box G_i \in x_A$ и $\neg\Box E \in x_A$.

Из (b) получаем следующее:

$\mathbf{GL} \vdash\ \Box\boxdot H_1 \wedge \ldots \wedge \Box\boxdot H_n \to \Box\neg B$,
$\mathbf{GL} \vdash\ \Box H_1 \wedge \ldots \wedge \Box H_n \to \Box\neg B$, поскольку $\mathbf{GL} \vdash (\Box H \wedge \Box\Box H) \leftrightarrow \Box H$;
$\mathbf{GL} \vdash\ \bigwedge x_C \to \Box\neg B$, поскольку $\Box H_j \in x_C$.

Значит, формула $\Diamond B$ (лежащая в $\mathcal{L}$) делит множество x, противоречие.

Теорема доказана. $\Box$

3 Модальные формулы Янкова – Файна и их применения

Историческая справка. Изначально характеристические формулы были введены для интуиционисткого пропозиционального языка: Янков[14] их строил для конечных гейтинговых алгебр (служащих алгебраической семантикой интуиционистской логики), де Йонг[15] — для конечных порожденных точкой интуиционистских (то есть рефлексивных транзитивных антисимметричных) шкал Крипке. Янков с помощью этих формул доказал, что существует континуум суперинтуиционистских логик. Позднее Файн[16] придумал аналоги этих формул в пропозициональном модальном языке, для описания конечных транзитивных (не обязательно рефлексивных) шкал. Наконец, Раутенберг[17] построил характеристические модальные формулы для конечных модальных алгебр, соответствующих транзитивным модальным логикам. Этот обзор результатов можно свести в таблицу:

Семантика	Int	ML $\supseteq$ **K4**
алгебры	Янков (1963)	Rautenberg (1980)
шкалы Крипке	de Jongh (1968)	Fine (1974)

Однако здесь мы рассмотрим формулы Янкова–Файна в том виде, как они описаны в учебнике,[18] проведя ряд упрощений. На самом деле, эти формулы являются *отрицаниями* исходных формул, предложенных Янковым (для Int) и Раутенбергом (для ML). Пока нам это не важно, т.к. в модальной логике не-истинность формулы в точке равносильна истинности ее отрицания (в отличие от интуиционистской логики, где это уже не так). Однако, когда мы будем обсуждать, как можно *аксиоматизировать* логику конечной транзитивной шкалы, нам потребуются исходные формулы Янкова–Файна, то есть отрицания приводимых ниже формул, ибо именно отрицания будут аксиомами соответствующих логик.

Пусть $F = (W, R)$ — конечная транзитивная шкала, порожденная точкой $a \in W$, что означает: $W = \{a\} \cup R(a) \cup R(R(a)) \cup \ldots = R^*(a)$, где R^* — рефлексивное транзитивное замыкание отношения R. Ввиду транзитивности отношения R мы можем упростить: $W = \{a\} \cup R(a)$, то есть все точки из W, за исключением быть может корня a, достижимы из корня за один шаг.

Обозначим $\boxdot A = A \wedge \Box A$. Для любой транзитивной модели $M = (F, V)$, порожденной точкой a, имеем: $M, a \models \boxdot A \iff M \models A$. Пусть $W = \{a_0, \ldots, a_n\}$. Напишем формулу с переменными $\{p_0, \ldots, p_n\}$.

Определение 3.1 (Формула Янкова – Файна)**.** *Формулой Янкова – Файна* конечной транзитивной шкалы (F, a) с корнем a называется формула $Я_{(F,a)}$, являющаяся конъюнкцией следующих формул:

- p_0;
- $\boxdot(p_0 \vee \ldots \vee p_n)$;
- $\boxdot\neg(p_i \wedge p_j)$ для всех $i \neq j$;
- $\boxdot(p_i \to \Diamond p_j)$ для каждой пары точек $(a_i, a_j) \in R$;
- $\boxdot(p_i \to \neg\Diamond p_j)$ для каждой пары точек $(a_i, a_j) \notin R$.

Простое наблюдение: формула $Я_{(F,a)}$ *выполнима* в точке a шкалы F при оценке: $V(p_i) = \{a_i\}$. В каких еще транзитивных (не обязательно конечных) шкалах с корнем эта формула выполнима в корне? Ответ дает следующая лемма. Запись $(F', a') \twoheadrightarrow (F, a)$ будет означать, что существует *сюръективный p-морфизм* из шкалы F' на шкалу F, переводящий точку a' в точку a.

Лемма 3.2 (О формулах Янкова – Файна)**.** *Пусть $F' = (W', R')$ — транзитивная (не обязательно конечная) шкала, порожденная точкой a'. Тогда*

$$\text{формула } Я_{(F,a)} \text{ выполнима в корне } a' \text{ шкалы } F' \iff (F', a') \twoheadrightarrow (F, a).$$

Доказательство. Дадим лишь идею, а детали оставим в качестве (легкого) упражнения. Для доказательства надо по всякой оценке V' переменных $\{p_0, \ldots, p_n\}$ на шкале F', при которой $M', a' \models Я_{(F,a)}$, где $M' = (F', V')$, построить функцию $h\colon W' \to W$, то есть задать $h(x) \in W = \{a_0, \ldots, a_n\}$ для каждого $x \in W'$, так чтобы h была сюръективным p-морфизмом из F' в F, таким что $h(a') = a$, и наоборот.

($\Rightarrow$) Имея оценку V', строим функцию h так: $h(x) = a_i \leftrightharpoons M', x \models p_i$.

($\Leftarrow$) Имея p-морфизм h, строим оценку V' так: $M', x \models p_i \leftrightharpoons h(x) = a_i$. $\Box$

[14] Янков В.А. *О связи между выводимостью в интуиционистском исчислении высказываний и конечными импликативными структурами.* Доклады АН СССР, 1963, т. 151, № 6, с. 1293–1294. См. также:
Янков В.А. *Конъюктивно неразложимые формулы в пропозициональных исчислениях.* Известия АН СССР. Серия математическая, 1969, том 33, вып. 1, с. 18–38.

[15] de Jongh D. *Investigations on the Intuitionistic Propositional Calculus*, PhD thesis, University of Wisconsin, 1968.

[16] Fine K. *Logics containing K4. Part I*, Journal of Symbolic Logic, 1974, vol.39, pp. 229–237.

[17] Rautenberg W. *Splitting lattices of logics.* Archiv für Mathematische Logik. vol. 20, pp. 155–159, 1980.

[18] Backburn, de Rijke, Venema. “Modal Logic”, CUP, 2001, Section 3.4.

3.1 Критерий модальной определимости классов конечных транзитивных шкал

Следующий результат является одним из многочисленных в математической логике результатов, дающих условия для класса структур, необходимые и достаточные для того, чтобы данный класс структур был определим в рассматриваемом языке. В качестве «структур» здесь выступают конечные транзитивные шкалы, язык — модальные формулы, а в качестве «условий» в подобного рода теоремах рассматривается замкнутость изучаемого класса структур (либо его дополнения) относительно каких-то операций или отношений на структурах (обычно заранее известно, что данные операции и отношения сохраняют истинность формул рассматриваемого языка в данных структурах). В нашем случае на шкалах Крипке нам известны операции взятия несвязной суммы шкал ($\biguplus$), p-морфного образа шкалы ($\twoheadrightarrow$) и порожденной подшкалы ($\hookrightarrow$), при которых сохраняется общезначимость модальных формул на шкалах.

Определение 3.3 (Относительная определимость)**.** Пусть $\mathbb{K}_0$ — некоторый класс шкал. Мы говорим, что класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$ *модально определим в классе* $\mathbb{K}_0$, если существует *множество* модальных формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}$, такое что для любой шкалы $F \in \mathbb{K}_0$ верна эквивалентность: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models \Gamma$.

Последнее условие можно переписать так: $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 \cap \mathsf{Frames}(\Gamma)$.

Теорема 3.4 (Критерий модальной определимости классов конечных транзитивных шкал)**.** *Пусть $\mathbb{K}_0$ — класс всех конечных транзитивных шкал. Тогда для всякого его подкласса $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$ имеем:*

$$\mathbb{K} \text{ модально определим в } \mathbb{K}_0 \iff \mathbb{K} \text{ замкнут относительно } \hookrightarrow, \twoheadrightarrow \text{ и конечных } \biguplus.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Необходимость — доказана при изучении этих операций (для любых шкал).

($\Leftarrow$) Достаточность. Пусть класс шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$ замкнут относительно указанных операций. Покажем, что класс $\mathbb{K}$ задается в $\mathbb{K}_0$ своей логикой: $L := \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$. Надо для всякой шкалы $F \in \mathbb{K}_0$, то есть конечной транзитивной шкалы F, доказать эквивалентность: $F \in \mathbb{K} \Leftrightarrow F \models L$. Импликация $\Rightarrow$ тривиальна. Докажем $\Leftarrow$. Пусть $F \models L$.

Случай 1. Шкала $F = (W, R)$ порождена некоторой точкой $a \in W$. Формула $\neg Я_{(F,a)}$ не лежит в L, иначе ввиду $F \models L$ мы имели бы $F \models \neg Я_{(F,a)}$, тогда как мы знаем, что формула $Я_{(F,a)}$ выполнима в F.

Поскольку L — логика класса $\mathbb{K}$, то формула $\neg Я_{(F,a)}$ опровергается в некоторой точке a' некоторой модели $M' = (F', V')$ над некоторой шкалой $F' \in \mathbb{K}$, то есть $M', a' \models Я_{(F,a)}$. Без ограничения общности, шкала F' порождена точкой a', иначе перейдем к породенной точкой a' подшкале, оставаясь внутри класса $\mathbb{K}$ ввиду его замкнутости отн. $\hookrightarrow$. По Лемме 3.2, $F' \twoheadrightarrow F$. Тогда $F \in \mathbb{K}$ по замкнутости $\mathbb{K}$ отн. $\twoheadrightarrow$.

Случай 2. Пусть F — произвольная (конечная транзитивная) шкала из $\mathbb{K}_0$. По лемме о покрытии:

$$\biguplus_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F.$$

Тогда имеем цепь импликаций:

$$F \models L \implies \forall a \in W \; F_a \models L \implies \forall a \in W \; F_a \in \mathbb{K} \implies \Big(\biguplus_{a \in W} F_a\Big) \in \mathbb{K} \implies F \in \mathbb{K}.$$

Мы использовали Случай 1 и замкнутость класса $\mathbb{K}$ относительно $\twoheadrightarrow$ и конечных $\biguplus$. $\square$

Задача. Привести пример класса конечных транзитивных шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$, модально определимый в $\mathbb{K}_0$, но не модально определимый в классе всех (или всех транзитивных, или всех конечных) шкал.

Вопрос (открытый?). Каков критерий того, что класс конечных транзитивных шкал $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_0$ задается *одной* модальной формулой в $\mathbb{K}_0$?

4 Компактные и насыщенные модели

(Модально) *насыщенные* и *компактные* модели уже рассматривались в предыдущих конспектах.[19] Для них давалось по два эквивалентных определения, и приводились конкретные классы моделей, являющиеся насыщенными (модели с конечным ветвлением) и компактными (конечные модели). Оказывается, можно дать единое изложение двух понятий, причем сразу дать много эквивалентных определений, которые в дальнейшем удобнее использовать (для доказательства свойств таких моделей или для доказательства того, что рассматриваемые модели являются таковыми), чем дававшиеся ранее два определения. Здесь мы дадим эти эквивалентные определения, сразу для обоих понятий.

4.1 Понятие компактного множества точек модели Крипке

Напомним некоторые понятия, используемые в дальнейшем. *Теорией* называется произвольное множество формул T, содержащее все *теоремы* логики $\mathbf{K}$ и замкнутое относительно правила MP. Таким образом, факт принадлежности $A \in T$ можно представлять себе так, что существует «вывод» формулы A в теории T, который устроен следующим образом: в первой части вывода можно использовать аксиомы логики $\mathbf{K}$ (тавтологии и дистрибутивность) и все ее правила (MP, Sub, Nec); затем идет вторая часть вывода, в которой можно использовать выведенные ранее формулы (теоремы логики $\mathbf{K}$), аксиомы теории T и лишь правила MP.

Наименьшую теорию, содержащую теорию T и множество формул Γ, будем обозначать $T + \Gamma$. Другими словами, это замыкание множества формул $T \cup \Gamma$ относительно правила MP. Соответственно, каждая формула этой теории имеет вывод следующего вида: в нем используются формулы из T и Γ и лишь правило MP. Таким образом, мы можем вместо $B \in (T + \Gamma)$ писать $T + \Gamma \vdash B$. Для такой выводимости справедлива **Теорема о дедукции**: Если $T + (\Gamma \cup \{A\}) \vdash B$, то $T + \Gamma \vdash A \to B$.

Теория T называется (*синтаксически*) *непротиворечивой*, если ни для какой формулы A теория T не содержит одновременно A и $\neg A$. Теория T называется (*синтаксически*) *полной*, если для каждой формулы A имеем: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, $X \subseteq W$ — некоторое подмножество ее точек. Множество формул $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}$ называется *выполнимым* во множестве $X \subseteq W$ модели M, если существует точка $a \in X$, такая что $M, a \models \Gamma$. *Теорией точки* $a \in X$ в модели M называется множество формул, истинных в этой точке: $\mathsf{Theory}(M, a) = \{A \in \mathsf{Fm} \mid M, a \models A\}$. *Теорией множества точек* $X \subseteq W$ в модели M называется множество формул, истинных в во всех точках этого множества: $\mathsf{Theory}(M, X) = \{A \in \mathsf{Fm} \mid \forall a \in X\ M, a \models A\}$.

Определение 4.1. Множество точек $X \subseteq W$ называется *компактным* в модели M, если выполняется одно из следующих (эквивалентных, как будет доказано ниже) условий:

(1) $\forall$ множества Γ (каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $X \implies$ всё множество Γ выполнимо в X);
(1′) $\forall$ множества Γ, замкн. отн. & (каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в $X \implies \Gamma$ выполнимо в X);

(2) $\forall$ теории T (каждая формула $A \in T$ выполнима в $X \implies$ вся теория T выполнима в X);
(2′) $\forall$ непротиворечивая теория $T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ выполнима в X;
(2″) $\forall$ непротиворечивая теория $T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ есть теория некоторого подмножества $Y \subseteq X$;

(3) $\forall$ полной теории T (каждая формула $A \in T$ выполнима в $X \implies$ вся теория T выполнима в X);
(3′) $\forall$ полная непротиворечивая теория $T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ выполнима в X;
(3″) $\forall$ полная непротиворечивая теория $T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ есть теория некоторой точки $a \in X$.

Теорема 4.2. *Условия из определения компактного множества точек эквивалентны.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (1′). Следует из того, что множество Γ выполнимо в $X \Leftrightarrow$ его замыкание отн. & выполнимо в X, а также $\{A_1, \dots, A_n\}$ выполнимо в $X \Leftrightarrow$ формула $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ выполнима в X.

(1′) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), (2′) $\Rightarrow$ (3′). Каждое следующее утверждение есть частный случай предыдущего.

(2) $\Rightarrow$ (2′), (3) $\Rightarrow$ (3′). Пусть (полная) теория $T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ непротиворечива. Возьмем любую формулу $A \in T$. Мы утверждаем, что A выполнима в X. Если бы не так, то $\neg A$ была бы истинна во всех

[19] Конспект 2015–2016, раздел 4.1; конспект 2016–2017, раздел 6.

точках X, то есть $(\neg A) \in \mathsf{Theory}(M, X)$. Но тогда $(\neg A) \in T$, что вместе с $A \in T$ дает противоречивость теории T. Итак, посылка (2) установлена, и по (2) вся теория T выполнима в X.

$(2') \Rightarrow (2'')$. Пусть $T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ — непротиворечивая теория. По $(2')$ она выполнима в X. Рассмотрим $Y = \{a \in X \mid M, a \models T\}$; очевидно $\varnothing \neq Y \subseteq X$. По построению, $\mathsf{Theory}(M, Y) \supseteq T$. Докажем их равенство. Пусть $A \notin T$. Докажем, что теория $T' = T + \neg A$ непротиворечива. $\triangleright$ В противном случае $T, \neg A \vdash \bot$. По Теореме о дедукции $T \vdash \neg A \to \bot$, то есть $T \vdash A$. Поскольку T замкнута по выводимости, то $A \in T$, противоречие с предположением. $\triangleleft$ Итак, поскольку теория $T' \supseteq T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ — непротиворечива, то по $(2')$ она выполнима в X: $\exists b \in X$: $M, b \models T$ и $M, b \models \neg A$. Первое означает $b \in Y$, а второе влечет $A \notin \mathsf{Theory}(M, Y)$.

$(2'') \Rightarrow (3'')$. Пусть $T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ — полная непротиворечивая теория. По $(2'')$ она есть теория некоторого (непустого) подмножества $Y \subseteq X$: $T = \mathsf{Theory}(M, Y)$. Мы утверждаем, что во всех точках из Y верны одни и те же модальные формулы. Действительно, если бы $\exists a, b \in Y$: $(M, a) \not\equiv_{\mathsf{ML}} (M, b)$, то $\exists A$: $M, a \models A$, $M, b \not\models A$. Но тогда $A \notin T$ и $\neg A \notin T$. Это противоречит полноте теории T. Следовательно, взяв любую точку $a \in Y$, мы получим: $T = \mathsf{Theory}(M, a)$.

$(3') \Rightarrow (3'')$. Пусть $T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$ — полная непротиворечивая теория. По $(3')$ она выполнима в X, то есть $\exists a \in X$: $M, a \models T$. Тогда очевидно $T = \mathsf{Theory}(M, a)$: если $A \in T$, то $M, a \models A$; если $A \notin T$, то ввиду полноты T имеем $\neg A \in T$, откуда $M, a \models \neg A$, то есть $M, a \not\models A$.

$(2'') \Rightarrow (2')$, $(3'') \Rightarrow (3')$. Тривиально.

$(3'') \Rightarrow (1)$. Пусть множество формул Γ таково, что каждое конечное $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в X. Рассмотрим наименьшую теорию, содержащую Γ и теорию множества X: $T = \mathsf{Theory}(M, X) + \Gamma$. Докажем, что теория T непротиворечива. Если это будет доказано, то T содержится в некоторой полной непротиворечивой теории $T' \supseteq T \supseteq \mathsf{Theory}(M, X)$. По $(3'')$ теория T' есть теория некоторой точки $a \in X$, а значит, $M, a \models \Gamma$, то есть Γ выполнимо в X.

Допустим, что теория T противоречива. Значит, существует вывод формулы $\bot$ из формул теории $\mathsf{Theory}(M, X)$ и множества Γ с применением лишь правила MP. В этом выводе встречается лишь конечное подмножество Δ формул из Γ: $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$. По предположению, Δ выполнимо в X в некоторой точке $a \in X$. Но тогда все формулы этого вывода истинны в точке a, поскольку формулы теории $\mathsf{Theory}(M, X)$ истинны во всех точках из X, а то, что получается из формул, истинных в некоторой точке, с помощью правила MP, тоже истинно в этой точке. Но тогда и формула $\bot$ истинна в точке a, чего не может быть. Теорема доказана. □

Лемма 4.3. *Всякое конечное множество $X \subseteq W$ является компактным в модели $M = (W, R, V)$.*

Доказательство. Пусть $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Докажем (1) по контрапозиции. Допустим Γ не выполнимо в X. Это значит, что для каждой точки $a_i \in X$ найдется формула $A_i \in \Gamma$, такая что $M, a_i \not\models A_i$. Тогда конечное множество $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$ не выполнимо в X. □

4.2 Модально компактные и модально насыщенные модели Крипке

Определение 4.4. Модель M (*модально*) *компактная*, если множество W компактно в M.

Следствие 4.5. *Всякая* ***конечная*** *модель Крипке — модально компактна.*

Определение 4.6. Модель M (*модально*) *насыщенная*, если $\forall a \in W$ множество $R(a)$ компактно в M.

Напомним: M — модель *конечного ветвления*, если у каждой точки $a \in W$ множество $R(a)$ конечно.

Следствие 4.7. *Всякая модель Крипке* ***конечного ветвления*** *— модально насыщенна.*

Теорема 4.8. *Пусть M и M' — модально компактные модели, и пусть $M \equiv_{\mathsf{ML}} M'$.*
Тогда $\forall a \in M$ $\exists a' \in M'$: $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a')$, и наоборот, $\forall a' \in M'$ $\exists a \in M$: $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a')$.

Доказательство. Пусть $a \in M$. Рассмотрим теорию этой точки: $T := \mathsf{Theory}(M, a) \supseteq \mathsf{Theory}(M) = \mathsf{Theory}(M')$. В силу пункта $(3'')$ компактности модели M' теория T выполнима в M', то есть является теорией некоторой точки $a' \in M'$. Таким образом $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a')$. □

Пример 4.9. Покажите, что предыдущая теорема не верна в общем случае. Рассмотрите две модели M и M', приводившиеся в качестве примера того, что $(M,a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M',a')$, но не $(M,a) \simeq (M',a')$. Докажите, что $M \equiv_{\mathsf{ML}} M'$, но в одной из моделей есть точка, не эквивалентная никакой из точек второй модели. Выясните, являются ли M и M' модально компактными.

Теорема 4.10. *Если M и M' модально насыщенные модели, то $(M,a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M',a') \Leftrightarrow (M,a) \simeq (M',a')$.*

Теорема 4.11. *Если M и M' модально насыщенные и компактные модели, то $M \equiv_{\mathsf{ML}} M' \Leftrightarrow M :\simeq: M'$.*

Теорема 4.12. *Каноническая модель M_L всякой непротиворечивой нормальной логики L (или более общо — нормальной теории L) является модально компактной и модально насыщенной.*

Доказательство. **Компактность.** Докажем (3″). Пусть $T \supseteq \mathsf{Theory}(M_L) = L$ — полная непротиворечивая теория. Тогда $x := T$ — точка канонической модели M_L. Значит, $x \in W_L$ и $M_L, x \models T$.

Насыщенность. Пусть $a \in W_L$; надо доказать компактность множества $X := R_L(a)$. Докажем это по пункту (3″). Рассмотрим произвольную полную непротиворечивую теорию $T \supseteq \mathsf{Theory}(M,X) \supseteq \mathsf{Theory}(M_L) = L$, обозначим $x := T$. Тогда $x \in W_L$ и $T = \mathsf{Theory}(M_L, x)$. Остается проверить, что $x \in X$, то есть $a\, R_L\, x$. Для любой формулы вида $\Box A$ имеем:

$$\Box A \in a \Longrightarrow M_L, a \models \Box A \Longrightarrow \forall y \in R(a)\ M_L, y \models A \Longrightarrow A \in \mathsf{Theory}(M_L, X) \subseteq T = x, \text{ т.е. } A \in x.$$

Теорема доказана. □

Вопрос. Всякое ли подмножество $X \subseteq W_L$ точек канонической модели — компактно?

Теорема 4.13. *Ультра-расширение M^{ue} всякой модели Крипке является компактной и насыщенной.*

Теорема 4.14. *Пусть M — конечная модель Крипке. Тогда существует лишь конечное число непротиворечивых теорий, расширяющих теорию $\mathsf{Theory}(M)$. Задача: сколько именно?*

5 Компактные и насыщенные модели для инфинитарных модальных языков

Мы сформулируем для языка ML_κ аналог понятия компактного множества точек модели, компактной и насыщенной модели, и докажем аналоги полученных выше результатов.

Рассмотрим *инфинитарный модальный язык*[20] ML_κ, где κ — регулярный кардинал. Напомним, что формулы этого языка строятся из множества переменных Var (пусть для определенности счетного) с помощью отрицания $\neg$, модальности $\Box$ и конъюнкции по множеству формул мощности строго меньше κ, то есть если $\Phi \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ — некоторое множество формул и $|\Phi| < \kappa$, то $\bigwedge\Phi \in \mathsf{ML}_\kappa$.

Задача 5.1. Дайте для формул $A \in \mathsf{ML}_\kappa$ определение *подформулы.* Докажите, что у каждой формулы строго меньше κ подформул: $|\,\mathsf{Sub}(A)| < \kappa$.

5.1 Понятие κ-компактного множества точек модели Крипке

Определение 5.2. Множество точек $X \subseteq W$ называется *κ-компактным* в модели M, если

для всякого множества формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ (каждое подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в X $\Longrightarrow$ всё множество Γ выполнимо в X);

Лемма 5.3. *Всякое множество X мощности $|X| < \kappa$ является κ-компактным.*

Доказательство. Докажем пункт (1) из определения κ-компактности по контрапозиции. Допустим, множество формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ не выполнимо во множестве точек X модели M. Это значит, что для каждой точки $y \in X$ существует формула $A_y \in \Gamma$, такая что $M, y \not\models A_y$. Тогда множество формул $\Delta = \{A_y \mid y \in X\} \subseteq \Gamma$ имеет мощность $|\Delta| \leqslant |X| < \kappa$ и не выполнимо во множестве точек X модели M. □

[20] Определение этого языка и *регулярного* кардинала давалось в конспекте 2016–2017 года, раздел 2.2.

5.2 Модально κ-компактные и модально κ-насыщенные модели Крипке

Определение 5.4. Модель M (*модально*) *κ-компактная*, если множество W κ-компактно в M.

Следствие 5.5. *Всякая модель мощности строго меньше κ — модально κ-компактна.*

Определение 5.6. Модель M (*модально*) *κ-насыщенная*, если $R(a)$ κ-компактно в M для $\forall a \in W$.

Напомним: M — модель *ветвления менее κ*, если для каждой точки $a \in W$ имеем $|R(a)| < \kappa$.

Следствие 5.7. *Всякая модель ветвления менее κ — модально κ-насыщенна.*[21]

Теорема 5.8. *Пусть M и M' — κ-компактные модели, и пусть $M \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} M'$. Тогда $\forall a \in M\ \exists a' \in M' \colon (M,a) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M',a')$, и наоборот, $\forall a' \in M'\ \exists a \in M \colon (M,a) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M',a')$.*

Доказательство. Пусть $a \in M$. Рассмотрим теорию этой точки: $T := \mathsf{Theory}_\kappa(M,a)$. Нам надо доказать выполнимость множества формул T в некоторой точке a' модели M', ибо тогда T будет равно теории $\mathsf{Theory}_\kappa(M',a')$. В силу компактности модели M' для этого достаточно доказать, что каждое подмножество $\Delta \subseteq T$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в M'. Это равносильно тому, чтобы доказать, что формула $A = \bigwedge\Delta$ выполнима в M'. Допустим противное, тогда $M' \models \neg A$, откуда $M \models \neg A$, в частности, $M, a \models \neg A$, хотя $M, a \models \Delta$, поскольку $\Delta \subseteq T$; противоречие. $\square$

Теорема 5.9. *На κ-насыщенных отмеченных моделях отношение $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$ совпадает с бисимуляцией:*[22] *если M и M' — κ-насыщенные модели, то $\big[\,(M,a) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M',a') \Leftrightarrow (M,a) \simeq (M',a')\,\big]$.*

Теорема 5.10. *На κ-насыщенных и κ-компактных моделях $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$ совпадает с глобальной бисимуляцией: если M и M' — κ-насыщенные и κ-компактные модели, то $\big[\,M \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} M' \Leftrightarrow M :\simeq: M'\,\big]$.*

Доказательство. По теореме 5.8, отношение $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$ между точками модели M и M' является глобальным (покрывает всё W и W'), а по теореме 5.9 оно является бисимуляцией. $\square$

Аналогично теореме 5.8 можно доказать чуть более общее утверждение.

Теорема 5.11. *Пусть $X \subseteq W$ и $X' \subseteq W'$ — κ-компактные множества точек в моделях M и M', соответственно, и $(M,X) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M',X')$. Тогда $\forall a \in X\ \exists a' \in X' \colon (M,a) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M',a')$, и наоборот, $\forall a' \in X'\ \exists a \in X \colon (M,a) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M',a')$.*

5.3 Эквивалентные определения κ-компактности множества точек модели

Здесь мы дадим еще несколько эквивалентных определений *κ-компактности* множества точек X модели Крипке, использующих понятие *теории*. Сначала сформулируем два эквивалентных определения κ-компактного множества, не вовлекающие понятия теории (которое для инфинитарного модального языка дается несколько более сложно). Говорим, что множество формул Γ *замкнуто относительно κ-конъюнкций*, если для всякого множества формул $\Phi \subseteq \Gamma$ мощности $|\Phi| < \kappa$ их конъюнкция тоже лежит в этом множестве: $\bigwedge\Phi \in \Gamma$. Напомним, мы рассматриваем модель $M = (W,R,V)$ и множество $X \subseteq W$.

Теорема 5.12. *Следующие условия определения κ-компактного множества X эквивалентны:*

(1) *для всякого множества формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ (каждое подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в X $\implies$ всё множество Γ выполнимо в X);*

(1′) *для всякого множества формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$, замкнутого относительно κ-конъюнкций (каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в X $\implies$ всё множество Γ выполнимо в X).*

[21] В конспекте 2016–2017 уч.г., Теорема 2.11, уже доказывалось это утверждение, но более сложным способом.

[22] Этот результат доказывался в конспектах 2016–2017, Теорема 2.7.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (1$'$). Пусть множество формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ замкнуто относительно κ-конъюнкций, и каждая его формула $A \in \Gamma$ выполнима в X. Проверим посылку условия (1). Пусть $\Delta \subseteq \Gamma$ — подмножество мощности $|\Delta| < \kappa$. Тогда $\bigwedge\Delta \in \Gamma$, значит, формула $\bigwedge\Delta$ выполнима в X, что равносильно тому, что множество формул Δ выполнимо в X. По (1) заключаем, что всё множество Γ выполнимо в X.

(1$'$) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ — произвольное множество формул, такое что каждое его подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в X. Чтобы воспользоваться условием (1$'$), построим *замыкание* $\Gamma^{\&}$ множества Γ относительно κ-конъюнкций (см. Определение 5.13 ниже). Тогда каждая формула $A \in \Gamma^{\&}$ выполнима в X, по Лемме 5.16. Тогда по (1$'$) всё множество $\Gamma^{\&}$ выполнимо в X, а это влечет (и даже равносильно) выполнимость множества Γ в X. □

Определение 5.13. *Замыкание* $\Gamma^{\&}$ множества формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ *относительно κ-конъюнкций* определяется как κ-ый член $\Gamma^{\&} := \Gamma_\kappa$ последовательности, строящейся по трансфинитной рекурсии:

$$\Gamma_0 = \Gamma; \quad \Gamma_{\lambda+1} = \Gamma_\lambda \cup \{ \bigwedge\Phi \mid \Phi \subseteq \Gamma,\ |\Phi| < \kappa \}; \quad \Gamma_\mu = \bigcup_{\lambda<\mu} \Gamma_\lambda \quad \text{для предельного ординала } \mu.$$

Следующая лемма объясняет, почему мы остановились на κ-ом члене данной последовательности, и фактически показывает, что $\Gamma^{\&}$ — наименьшее множество формул из ML_κ, содержащее Γ и замкнутое относительно κ-конъюнкций.[23] Напомним, что кардинал κ — непременно *предельный* ординал.

Лемма 5.14. *Для любого множества Γ, множество Γ_κ замкнуто относительно κ-конъюнкций.*

Доказательство. Пусть $\Phi \subseteq \Gamma_\kappa$ — подмножество мощности $|\Phi| < \kappa$. Для каждой формулы $A \in \Phi$ имеем $A \in \Gamma_\kappa$, а значит, ввиду *предельности* ординала κ, существует ординал $\lambda_A < \kappa$, такой что $A \in \Gamma_{\lambda_A}$. Возьмем точную верхнюю грань этих ординалов: $\mu = \sup\{\lambda_A \mid A \in \Phi\}$. Поскольку κ — *регулярный* кардинал, имеем $\mu < \kappa$. Тогда $\bigwedge\Phi \in \Gamma_{\mu+1}$. Но очевидно,[24] что $\mu + 1 < \kappa$. Тем самым $\bigwedge\Phi \in \Gamma_\kappa$. □

Лемма 5.15. *Каждая формула $A \in \Gamma^{\&}$ эквивалентна (в инфинитарной логике высказываний) конъюнкции $\bigwedge\Phi$ для некоторого подмножества $\Phi \subseteq \Gamma$ мощности $|\Phi| < \kappa$.*

Доказательство. Трансфинитной индукцией по ординалам $\lambda < \kappa$ доказываем требуемое утверждение для формул $A \in \Gamma_\lambda$. База индукции очевидна; шаг, отвечающий предельному ординалу — тоже. Остается шаг $\lambda + 1$, то есть когда $A = \bigwedge\Phi$, где $\Phi \subseteq \Gamma$ и $|\Phi| < \kappa$. Пусть $\Phi = \{B_i \mid i \in I\}$, где $|I| < \kappa$. По предположению индукции, каждая формула B_i эквивалентна конъюнкции $\bigwedge\Psi_i$, где $\Psi_i \subseteq \Gamma$ и $|\Psi_i| < \kappa$. Но тогда A эквивалентна $\bigwedge\Phi'$, где $\Phi' = \bigcup_{i\in I} \Psi_i$, причем $|\Phi'| < \kappa$, поскольку это объединение $< \kappa$ множеств, каждое из которых имеет мощность $< \kappa$, а кардинал κ — регулярен. □

Лемма 5.16. *Пусть каждое подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в множестве точек X модели M. Тогда каждая формула $A \in \Gamma^{\&}$ выполнима в X.*

Доказательство. Тривиально следует из предыдущей леммы. □

[23] Это не исключает того, что множества Γ_λ стабилизировались на каком-то более раннем шаге $\lambda < \kappa$. Например, если само множество Γ уже замкнуто относительно κ-конъюнкций, то $\Gamma^{\&} = \Gamma_0$. Нельзя ли доказать, что во всех остальных случаях нам непременно нужно проделать κ шагов до стабилизации?

[24] Вспомним, что κ — *кардинал*, то есть наименьший из ординалов, имеющий данную мощность $|\kappa|$; поэтому если бы оказалось $\mu + 1 = \kappa$, то их мощности были бы равны: $|\mu| + 1 = |\kappa|$, откуда следовало бы $|\mu| = |\kappa|$, то есть нашелся ординал $\mu < \kappa$, имеющий ту же мощность.

5.3.1 Модальные теории в инфинитарном модальном языке

Обозначим символом $\mathbf{K}_\kappa$ множество всех формул из ML_κ, общезначимых на всех шкалах — назовем это *минимальной нормальной κ-логикой*. Очевидно, оно содержит все тавтологии, все формулы вида $\bigwedge\Phi \to A$, где $\Phi \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$, $A \in \Phi$, $|\Phi| < \kappa$, формулы дистрибутивности модальности $\Box$ относительно κ-конъюнкций: $\Box(\bigwedge\Phi) \leftrightarrow \bigwedge\Box\Phi$, где $\Phi \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$, $|\Phi| < \kappa$ и $\Box\Phi = \{\Box A \mid A \in \Phi\}$. Кроме того, оно замкнуто относительно следующих правил вывода, где $\Phi \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$, $|\Phi| < \kappa$, $A\sigma$ — результат применения подстановки σ к формуле A (в случае инфинитарного языка уже не достаточно формулировать правило подстановки лишь для случая подстановки формулы вместо одной переменной):

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathsf{R}{\textstyle\bigwedge}_\kappa)\ \frac{\{B \to A\}_{A\in\Phi}}{B \to \bigwedge\Phi} \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A\sigma} \qquad (\mathsf{Nec})\ \frac{A}{\Box A}$$

В этом разделе нам не важно, аксиоматизирует ли выписанное множество аксиом и правил вывода всю логику[25] $\mathbf{K}_\kappa$. Нам лишь потребуются указанные правила вывода, для введения нужных понятий.

Определение 5.17. (*Модальная*) *теория* — произвольное множество формул $T \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$, содержащее множество всех общезначимых формул $\mathbf{K}_\kappa$ и замкнутое относительно правил вывода (MP) и ($\mathsf{R}\bigwedge_\kappa$). *Нормальнальная теория* — теория, замкнутая относительно правила вывода (Nec). *Логикой* (*нормальной логикой*) называется теория (нормальная теория), замкнутая относительно правила вывода (Sub).

Теория T называется *непротиворечивой*, если ни для какой формулы A не верно $A, \neg A \in T$.

Теория T называется *полной*, если для каждой формулы A имеем $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Лемма 5.18. *Всякая теория замкнута относительно k-конъюнкций.*

Доказательство. Пусть T — теория, $\Phi \subseteq T$, $|\Phi| < \kappa$. Используя тавтологии, получаем, что для каждой формулы $A \in \Phi$ в T имеется формула $\top \to A$; по правилу ($\mathsf{R}\bigwedge_\kappa$) формула $\top \to \bigwedge\Phi$ лежит в T; и используя тавтологию $\top$ и правило (MP), наконец, получаем $\bigwedge\Phi \in T$. $\Box$

Наименьшую теорию, содержащую теорию T и множество формул Γ, будем обозначать $T + \Gamma$. Другими словами, это замыкание множества формул $T \cup \Gamma$ относительно правил MP и ($\mathsf{R}\bigwedge_\kappa$). Соответственно, каждая формула этой теории имеет *вывод* (последовательность формул, упорядоченная каким-то ординалом) следующего вида: в нем используются формулы из T и Γ и лишь правила MP и ($\mathsf{R}\bigwedge_\kappa$). Таким образом, мы можем вместо $B \in (T + \Gamma)$ писать $T + \Gamma \vdash B$. Для такой выводимости справедлива **Теорема о дедукции**:[26] *Если $T + (\Gamma \cup \{A\}) \vdash B$, то $T + \Gamma \vdash A \to B$.*

[25] Известно, что для языка со счетными конъюнкциями ML_{ω_1} это — полная аксиоматика, и даже сильно полная для следования $\Gamma \models A$ формулы A из не более чем счетного множества гипотез $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_{\omega_1}$ (для несчетного множества гипотез сильной полноты уже не будет даже в безмодальном языке, то есть в инфинитарном исчислении высказываний!).

Для языков с более «мощными» конъюнкциями уже нужны дополнительные аксиомы. Например, в языке, допускающем конъюнкции множеств формул мощности континуум, возникнет аксиома дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \bigvee \Phi_i \to \bigvee_{A_i \in \Phi_i} (A_0 \wedge A_1 \wedge \ldots),$$

где все множества формул $\Phi_i \subseteq \mathsf{ML}_{\omega_1}$ не более чем счетны. Аналогичные формулы дистрибутивности возникают и в бóльших мощностях. Какова (сильно) полная аксиоматика для $\mathbf{K}_\kappa$ при $\kappa > \omega_1$, лектору не известно.

Некоторые «аксиомы» даже инфинитарного исчисления высказываний мы можем признать общезначимыми, только если принимаем некоторые гипотезы, независимые (недоказуемые и неопровержимые) в теории множеств. Приведем формулу инфинитарной логики высказываний, выражающую континуум-гипотезу. Для записи этой формулы нам потребуется множество переменных мощности континуум: $\mathsf{Var} = \{p_i \mid i \in \Omega\}$), где $\Omega = 2^{\mathbb{N}}$; для произвольного множества индексов $X \subseteq \Omega$ запишем вспомогательную формулу, говорящую, что истинны в точности переменные с индексами из X:

$$\mathsf{True}(X) = \bigwedge_{i\in X} p_i \wedge \bigwedge_{i\notin X} \neg p_i.$$

Тогда выпишем формулу, выражающую, что множество истинных переменных не более чем счетно или континуально:

$$\bigvee_{|X|\leqslant\omega} \mathsf{True}(X) \ \vee \bigvee_{|X|=|\Omega|} \mathsf{True}(X).$$

При наличии таких «монстров» надеяться на предъявление полной аксиоматики не приходится.

[26] Доказательство см. в конспектах курса «Доп. главы классической логики», раздел 1.8, Теорема 1.53.

Возникает **вопрос**: насколько длинными должен быть выводы, чтобы получившееся множество выводимых формул было замкнуто относительно правил MP и $(\mathsf{R}\bigwedge_\kappa)$? Как и в случае замыкания относительно κ-конъюнкции, ответ таков: нужно взять все выводы длины строго меньше κ. Это показывает следующее построение и результат; в них мы через Γ обозначили то, что в предыдущем абзаце значилось как $T \cup \Gamma$.

Построим наименьшую теорию, содержащую произвольное множество формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$, как κ-ый член $\mathbf{K} + \Gamma := T_\kappa$ последовательности $(T_\lambda)_{\lambda \leqslant \kappa}$, строящейся по трансфинитной рекурсии:

$$T_0 = \mathbf{K} \cup \Gamma; \qquad T_{\lambda+1} = T_\lambda \cup \mathsf{ApplyRule}(\mathsf{MP}, T_\lambda) \cup \mathsf{ApplyRule}(\mathsf{R}\textstyle\bigwedge_\kappa, T_\lambda);$$
$$T_\mu = \textstyle\bigcup_{\lambda<\mu} T_\lambda \quad \text{для предельного ординала } \mu.$$

Здесь $\mathsf{ApplyRule}(\mathsf{R}, \Delta)$ есть результат (однократного) применения указанного правила R всевозможными способами к формулам из Δ. Если правило R имеет набор посылок $\vec{A}$ и выдает заключение $\mathsf{R}(\vec{A})$, то

$$\mathsf{ApplyRule}(\mathsf{R}, \Delta) = \{B \in \mathsf{ML}_\kappa \mid \exists \vec{A} \subseteq \mathsf{ML}_\kappa\colon\ B = \mathsf{R}(\vec{A})\}.$$

Лемма 5.19. *Множество T_κ является теорией.*

Доказательство. Доказательство замкнутости этого множества относительно правил MP и $(\mathsf{R}\bigwedge_\kappa)$ — дословно такое же,[27] как доказательство леммы 5.14. □

Обозначим $\mathsf{Theory}_\kappa(M, a) = \{A \in \mathsf{ML}_\kappa \mid\ M, a \models A\}$; аналогично, $\mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$ для $X \subseteq W$. Легко видеть, что и то, и другое является непротиворечивой (а первая — еще и полной) теорией.

5.3.2 Определения κ-компактного множества с использованием теорий

Теорема 5.20. *Следующие условия эквивалентны κ-компактности множества X точек модели M:*

(2) $\forall$ теории T (каждая формула $A \in T$ выполнима в $X \implies$ вся теория T выполнима в X);

(2′) $\forall$ непротиворечивая теория $T \supseteq \mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$ выполнима в X;

(2″) $\forall$ непротиворечивая теория $T \supseteq \mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$ есть теория некоторого подмножества $Y \subseteq X$.

Доказательство. (1′) ⇒ (2) Ибо всякая теория замкнута относительно κ-конъюнкций (Лемма 5.18).

(2) ⇒ (2′) ⇔ (2″) Дословно как в доказательстве Теоремы 4.2.

(2′) ⇒ (1) Пусть множество формул Γ таково, что каждое его подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в X. Чтобы воспользоваться (2′), рассмотрим теорию $T = \mathsf{Theory}_\kappa(M, X) + \Gamma$. Она непротиворечива. ▷ Допустим $T \vdash \bot$. Тогда существует вывод длины $< \kappa$ формулы $\bot$ из формул теории $\mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$ и множества Γ с помощью правил (MP) и $(\mathsf{R}\bigwedge_\kappa)$. Обозначим через Δ множество формул из Γ, встречающихся в этом выводе; тогда $|\Delta| < \kappa$. Поэтому множество Δ выполнимо в X, скажем, в точке $a \in X$, то есть $M, a \models \Delta$. Тогда все формулы этого вывода истинны в (M, a), поскольку помимо формул из Δ в этом выводе встречаются формулы из теории $\mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$ (истинные всюду в X, в том числе в точке a) и формулы, получающиеся из предыдущих формул этого вывода по указанным правилам, а эти правила, очевидно, сохраняют истинность формул в данной точке. Но тогда $M, a \models \bot$, чего не может быть. ◁ По (2′), теория T, а значит, и множество Γ, выполнимо в X. □

[27] Можно заметить общие черты у трансфинитного построения замыкания множества относительно κ-конъюнкций и замыкания множества формул относительно правил вывода. Если у нас есть семейство функций $\mathcal{F}$, каждая из которых имеет строго меньше κ аргументов и действует на множестве D, то *замыкание* множества $X \subseteq D$ относительно данного семейства функций (то есть наименьшее множество, содержащее X и замкнутое относительно всех функций семейства $\mathcal{F}$) можно построить трансфинитной рекурсией по ординалам $\lambda < \kappa$, и стабилизация наступает на κ-м шаге построения (или ранее). Здесь непременно требуется, чтобы κ был регулярным кардиналом.

Теорема 5.21. *Следующие условия эквивалентны между собой и следуют*[28] *из κ-компактности множества X точек модели M:*

(3) $\forall$ полной теории T (каждая формула $A \in T$ выполнима в $X \implies$ вся теория T выполнима в X);

(3′) $\forall$ полная непротиворечивая теория $T \supseteq \mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$ выполнима в X;

(3″) $\forall$ полная непротиворечивая теория $T \supseteq \mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$ есть теория некоторой точки $a \in X$.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) верна, ибо это переход к частному случаю.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (3′) доказывается как в Теореме 4.2. Эквивалентность (3′) $\Leftrightarrow$ (3″) тривиальна.

Докажем импликацию (3′) $\Rightarrow$ (3). Пусть теория T удовлетворяет посылке (3), т.е. она полна и каждая ее формула $A \in T$ выполнима в X. Мы утверждаем, что тогда T удовлетворяет посылке условия (3′), т.е. $T \supseteq \mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$. Действительно, пусть $A \notin T$. Ввиду полноты $\neg A \in T$. Тогда формула $\neg A$ выполнима в X, а значит, A не является истинной всюду в X, то есть $A \notin \mathsf{Theory}_\kappa(M, X)$. $\square$

[28] Эквивалентны ли они условию κ-компактности множества X точек модели M, пока не утверждается. Для доказательства эквивалентности условий (3)–(3″) выписанным ранее условиям κ-компактности нам достаточно было бы знать следующее утверждение: *Каждая непротиворечивая теория содержится в некоторой полной непротиворечивой теории.* Мы не знаем, верно ли это утверждение. Для инфинитарных языков его невозможно получить с помощью Леммы Линденбаума, так как встречаются башни из непротиворечивых теорий, в объединении дающие противоречивую теорию. Здесь нужны другие методы, применяющиеся для доказательства полноты инфинитарных логик. Позволят ли они доказать указанное утверждение, или они доказывают полноту, обходясь без этого утверждения, пока не понятно.

5.4 Неотвеченные вопросы про инфинитарные модальные языки

Вопрос. Каковы бисимуляционные игры для языков ML_κ?

Вопрос. Теорема ван Бентема гласит: *Формула первого порядка $A(x)$ сигнатуры $\{=, R, P_0, P_1, \ldots\}$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$ она инвариантна относительно бисимуляций.* Коротко: $\mathsf{FO}/\simeq\, = \mathsf{ML}$. Он же доказал аналогичную теорему для инфинитарной логики первого порядка и инфинитарной модальной логики: $\mathsf{FO}_\infty/\simeq\, = \mathsf{ML}_\infty$. Есть ли аналогичные результаты для инфинитарных языков FO_κ и ML_κ? Есть ли аналоги этих результатов для конечных моделей? Для замкнутых формул? и другие «вариации» исходной теоремы? (вариации см. в конспекте 2015–2016 глава 6).

Вопрос. Как связаны, для разных кардиналов κ, понятия κ-компактного множества X точек модели Крипке M? Например, очевидно, что если $\kappa > \omega$, то из κ-компактности модели не следует ее ω-компактность, т.к. мы приводили примеры двух счетных моделей, как минимум одна из которых не является ω-компактной (иначе бы из их модальной эквивалентности следовала бисимуляционная эквивалентность), однако они являются κ-компактными, будучи моделями мощности строго меньше κ.
– Следует ли из ω-компактности κ-компактность?
– Следует ли из κ-компактности κ'-компактность при $\kappa < \kappa'$?
– Можно ли сформулировать понятие ∞-компактности, соответствующей языку ML_∞?

Вопрос. ван Бентем доказал, что в неограниченном инфинитарном модальном языке ML_∞, то есть языке, допускающем конъюнкции по любым *множествам* формул, каждую отмеченную модель Крипке (M, a) можно охарактеризовать некоторым множеством формул, а значит и *одной* формулой $A \in \mathsf{ML}_\infty$ с точностью до бисимуляции (или, что равносильно, с точностью до эквивалентности в этом языке $\equiv_{\mathsf{ML}_\infty}$). Каков аналогичный результат для инфинитарного модального языка ML_κ? Для какого класса моделей это верно?

Вопрос. Вспомним, что обычная минимальная нормальная логика $\mathbf{K}_\omega$ полна относительно класса шкал мощности строго меньше ω, то есть конечных. Верно ли это для произвольного регулярного кардинала κ? То есть верно ли, что $\mathbf{K}_\kappa = \mathsf{Logic}\{F = (W, R) \mid |W| < \kappa\}$? Аналогичный вопрос осмысленен для других классов шкал, то есть для логик $\mathbf{K4}_\kappa$, $\mathbf{GL}_\kappa$ и т.д.

Возможно, имеет смысл вопрос о *фильтрации* произвольной модели через некоторое множество инфинитарных формул для получения модели мощности меньше κ. Какие инфинитарные модальные логики допускают фильтрацию в этом смысле?

Вопрос. Теорема о (сильной) полноте логики $\mathbf{K}_{\omega_1}$ (а в идеале и для больших кардиналов) — привести доступное для понимания доказательство. Аналогично для других логик: $\mathbf{K4}_{\omega_1}$ и т.д. Достаточно ли для полной аксиоматики соединять полную аксиоматику логики $\mathbf{K}_{\omega_1}$ с аксиомами конкретной модальной логики L для получения полной аксиоматики логики L_{ω_1}?

Вопрос. Как получить «очень сильную» полную аксиоматику хотя бы инфинитарной логики высказываний со счётными конъюнкциями? То есть такую аксиоматику, что для *любого* (а не только счетного) множества гипотез Γ была равносильность: $\Gamma \models A \Leftrightarrow \Gamma \vdash A$. Как мы знаем, для этого непременно должны быть правила вывода с несчетным множеством посылок. Или этот вопрос решается тривиально, путем объявления отношения $\Gamma \models A$ правилом вывода?

Вопрос. Какая операция на моделях является операцией компактификацией классов моделей с точки зрения языка ML_κ? То есть какова операция, такая что если класс моделей $\mathbb{K}$ замкнут относительно этой операции, то класс $\mathbb{K}$ непременно компактен? Ультрапроизведение будет таковым? Аналогично, ультра-расширение — будет ли операцией насыщения классов моделей? то есть делающей по всякой модели M $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$-эквивалентную модель, являющуюся насыщенной?

6 Логика неравенства

Историческая справка. Одним из первых изучил логику **DL** всех шкал вида $(W, \neq)$ Сегерберг (1976, 1980), который нашел для нее полную систему аксиом $p \to \Box\Diamond p$ (симметричность) и $p \wedge \Box p \to \Box\Box p$ (слабая транзитивность). Эта логика разрешима, проблема выполнимости формул в **DL**-шкалах — NP-полна.[29]

Логика бесконечного иррефлексивного кластера $(W, \neq)$, где W — любое бесконечное множество, была впервые изучена, по-видимому, лишь недавно, в работах Шапировского, Кудинова, Шехтмана (точное авторство результатов лектору на данный момент не известно). Ими была найдена полная (бесконечная) аксиоматика этой логики. Ими же доказано, что данную логику не только нельзя аксиоматизировать конечным набором формул, но даже нельзя аксиоматизировать никаким, пусть даже бесконечным, множеством формул, содержащих в совокупности лишь конечное число переменных. Именно доказательство последнего результата будет изложено в данном конспекте (т.к. в упомянутой статье оно изложено кратко, со ссылкой на две англоязычные статьи). Тем не менее, эта логика разрешима, проблема выполнимости формул NP-полна.

Изучались также бимодальные логики, интерпретируемые в шкалах вида $(W, R, \neq)$, над известными логиками.

6.1 Логика бесконечного иррефлексивного кластера

Рассмотрим логику $\mathsf{Logic}(\mathbb{N}, \neq)$; на самом деле, результаты имеют место для любой *бесконечной* шкалы вида $(W, \neq)$, как будет видно из доказательств. Мы докажем, что данную логику нельзя аксиоматизировать никаким (даже бесконечным) множеством формул, содержащим в совокупности лишь конечное число переменных; в частности, она не является конечно аксиоматизируемой.

Обозначим множество модальных формул, содержащих лишь переменные $p_1, \ldots, p_n$, так:

$$\mathsf{ML}_n \;=\; \{\, A \in \mathsf{ML} \;\mid\; \mathsf{Var}(A) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\} \,\}, \quad \text{где } n \geqslant 0.$$

Определение 6.1. Нормальную логику L назовем *n-аксиоматизируемой*, если ее можно аксиоматизировать некоторым множеством формул от переменных $p_1, \ldots, p_n$, то есть если $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$ для некоторого $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_n$.

Заметим, что мы могли равносильным образом потребовать, чтобы каждая формула в Γ содержала не более чем n переменных, поскольку всегда можно переименовать переменные, сделав их подмножеством $\{p_1, \ldots, p_n\}$, не изменив при этом аксиоматизируемую ими логику, ввиду наличия правила подстановки. Соответственно, и в определении языка ML_n можно было требовать, чтобы $|\mathsf{Var}(A)| \leqslant n$.

Примеры: логика **K4** 1-аксиоматизирума; логика $\mathbf{KD} = \mathbf{K} \oplus (\Box p \to \Diamond p)$ 0-аксиоматизируема, ибо $\mathbf{KD} = \mathbf{K} \oplus \Diamond\top$; логика $\mathbf{S4.3} = \mathbf{S4} \oplus \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$ — 2-, но не 1-аксиоматизируема (задача).

Теорема 6.2 (Шапировский, 2005?)**.** *Логика бесконечного иррефлексивного кластера (т.е. бесконечной шкалы с отношением неравенства) не является n-аксиоматитизируемой ни для какого $n \geqslant 0$.*

Доказательство. На шкалах рассмотрим отношение n-эквивалентности:[30] $F \equiv_n F'$ означает, что на шкалах F и F' общезначимы одни и те же формулы из ML_n.

Лемма 6.3 (Максимова, Скворцов, Шехтман,[31] 1979)**.** *Если логика L является n-аксиоматизируемой, то класс ее шкал $\mathsf{Frames}(L)$ замкнут относительно $\equiv_n$.*

$\triangleright$ Пусть $L = \mathbf{K} \oplus \Gamma$, где $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_n$. Тогда если $F \equiv_n F'$, то имеем цепь эквивалентностей:
$F \in \mathsf{Frames}(L) \iff F \models L \iff F \models \Gamma \iff F' \models \Gamma \iff F' \models L \iff F' \in \mathsf{Frames}(L)$. $\triangleleft$

---

[29] Хорошее изложение полноты и разрешимости данной логики содержится в недавно вышедшей статье: Шапировский И.Б., Шехтман В.Б. «Современная модальная логика: между математикой и информатикой», в сборнике «*Современная логика: основания, предмет и перспективы развития*». Москва, ИД «Форум», 2018, с. 265–305.

[30] Но нужно иметь в виду, что оно не связано с отношением $\equiv^n_{\mathsf{ML}}$ из лекции про бисимуляционные игры (конспект 2016–2017, глава 1). Там мы рассматривали, для каждого $n \geqslant 0$, совокупность формул модальной глубины $\leqslant n$.

[31] Утверждения такого рода встречаются в разных областях математической логики. Аналог известен в теории конечных моделей (классической логики предикатов). Утверждение можно сформулировать в общем виде, когда имеется семейство эквивалентностей $\equiv_n$, «сходящихся» к $\equiv$. Для модальной логики впервые сформулирован в статье: Максимова Л.Л., Скворцов Д.П., Шехтман В.Б. *Невозможность конечной аксиоматизации логики финитных задач Медведева.* Доклады Академии наук, 1979, том 245, No. 5, с. 1051–1054.
Там он фигурирует в следующей формулировке (получающейся из леммы 6.3 по контрапозиции):
Лемма 6.3′. *Пусть дана нормальная логика L и существуют такие шкалы F и F', что $F \models L$, $F' \not\models L$ и $F \equiv_n F'$. Тогда логика L не является n-аксиоматизируемой.*

Приступим к доказательству теоремы 6.2.

Нам надо для каждого $n \geqslant 1$ доказать, что логика $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{N}, \neq)$ не является n-аксиоматизируемой. Для этого мы, для каждого $n \geqslant 1$, предъявим две шкалы F_n и F'_n, такие что $F_n \models L$, $F'_n \not\models L$, $F_n \equiv_n F'_n$.

$F_n = \langle \{1, \dots, 2^n\}, \neq \cup \{(1,1)\} \rangle$ — иррефлексивный кластер размера 2^n с одной рефлексивной точкой.

$F'_n = \langle \{0, \dots, 2^n\}, \neq \rangle$ — иррефлексивный кластер размера $2^n + 1$.

Лемма 6.4. *$F_n \models L$, где $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{N}, \neq)$.*

$\triangleright$ Очевидно, имеется сюръективный p-морфизм $(\mathbb{N}, \neq) \twoheadrightarrow F_n$, отображающий числа $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ в себя, а остальные числа в 1. По свойству p-морфизма $\mathsf{Logic}(\mathbb{N}, \neq) \subseteq \mathsf{Logic}(F_n)$, то есть $F_n \models L$. $\triangleleft$

Лемма 6.5. *$F'_n \not\models L$, где $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{N}, \neq)$.*

$\triangleright$ Предъявим формулу, общезначимую на $(\mathbb{N}, \neq)$, но не на $F'_n = (W_n, \neq)$, где $|W_n| = 2^n + 1$. Обозначим

$$A_m \quad := \quad \Box(p_1 \vee \ldots \vee p_m) \ \longrightarrow \Diamond(p_1 \wedge \Diamond p_1) \vee \ldots \vee \Diamond(p_m \wedge \Diamond p_m).$$

Упражнение. $(W, \neq) \models A_m \iff m < |W| - 1$.
Следовательно, формула A_m общезначима на $(\mathbb{N}, \neq)$, но не на F'_n при $m \geqslant |W_n| - 1 = 2^n$. $\triangleleft$

Лемма 6.6. *$F_n \equiv_n F'_n$*

$\triangleright$ Очевидно, имеется сюръективный p-морфизм $F'_n \twoheadrightarrow F_n$, отображающий числа $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ в себя, а 0 в 1. Откуда $\mathsf{Logic}(F_n) \supseteq \mathsf{Logic}(F'_n)$, и тем более[32] $F_n \sqsupseteq_n F'_n$.

Докажем $F_n \sqsubseteq_n F'_n$. Пусть $A = A(p_1, \dots, p_n) \in \mathsf{ML}_n$. Допустим $F'_n \not\models A$, тогда имеется модель $M' = (F'_n, V')$, такая что $M' \not\models A$. Поскольку переменных всего n, а точек в модели M' аж $2^n + 1$, то найдутся две точки (без ограничения общности, это 0 и 1), в которых истинны одни и те же переменные из списка $\{p_1, \dots, p_n\}$. Преобразуем модель M' в модель M, склеив 0 и 1. Тогда шкалой модели M будет F_n. Мы имеем глобальную бисимуляцию (над $\{p_1, \dots, p_n\}$) между M и M' — она соединяет каждую точку M' с ее образом в M после склейки. Тогда $M \equiv_n M'$. Следовательно, $M \not\models A$. Итак, $F_n \not\models A$. $\triangleleft$

Таким образом, теорема 6.2 доказана. $\square$

[32] Мы пишем $F \sqsupseteq_n F'$, если для каждой формулы $A \in \mathsf{ML}_n$ $(F \models A \Longleftarrow F' \models A)$. Аналогично $\sqsubseteq_n$.

7 Полнота методом канонической модели

Данный раздел должен находиться в самом начале конспекта. Но пока поставлен здесь, чтобы не нарушать ссылок из экзаменационных билетов. В каком-то виде излагаемый далее материал — метод канонических моделей, канонические логики, сильно полные логики — уже излагался ранее: конспект 2014–2015 глава 6, конспект 2015–2016 глава 1. Новое изложение имеет некоторые преимущества — изложение ведется сразу на четырех уровнях: отмеченные модели / модели / отмеченные шкалы / шкалы, и соответственно, теории / нормальные теории / логики / нормальные логики).

7.1 Модальные логики и модальные теории

7.2 Теорема о корректности модальных логик и теорий

7.3 Каноническая модель минимальной нормальной логики