Критерии аксиоматизируемости в модальной логике

Евгений Евгеньевич Золин

старший научный сотрудник
Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико математический факультет
МГУ им. М.В.Ломоносова

Десятые Смирновские чтения по логике
Философский факультет МГУ
15–17 июня 2017 года

Общая постановка

Даны:

$\mathcal{L}$ — язык (множество, его элементы — формулы)

$\mathcal{S}$ — класс структур или моделей

$\models$ — отношение между ними: $M \models A$, где $M \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{L}$

Общая постановка

Даны:

$\mathcal{L}$ — язык (множество, его элементы — формулы)

$\mathcal{S}$ — класс структур или моделей

$\models$ — отношение между ними: $M \models A$, где $M \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{L}$

Как «охарактеризовать»

- классы моделей из $\mathcal{S}$, задаваемые одной формулой из $\mathcal{L}$;
- классы моделей из $\mathcal{S}$, задаваемы множеством формул из $\mathcal{L}$.

Но это — не все «естественные» возможности для класса моделей.

Общая постановка

Даны:

$\mathcal{L}$ — язык (множество, его элементы — формулы)

$\mathcal{S}$ — класс структур или моделей

$\models$ — отношение между ними: $M \models A$, где $M \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{L}$

Как «охарактеризовать»

- классы моделей из $\mathcal{S}$, задаваемые одной формулой из $\mathcal{L}$;
- классы моделей из $\mathcal{S}$, задаваемы множеством формул из $\mathcal{L}$.

Но это — не все «естественные» возможности для класса моделей.

Для множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, класса моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ обозначим:

$$\begin{aligned} \mathrm{Models}(\Gamma) &:= \{ M \in \mathcal{S} \mid M \models \Gamma \} \\ \mathrm{Theory}(\mathbb{K}) &:= \{ A \in \mathcal{L} \mid \mathbb{K} \models A \} \end{aligned}$$

Определение четырёх «видов» классов моделей

Определение. Для класса моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ будем писать:

- $\mathbb{K} \in \mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathrm{Models}(A)$ для некоторой формулы $A \in \mathcal{L}$.

Определение четырёх «видов» классов моделей

Определение. Для класса моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ будем писать:

- $\mathbb{K} \in \mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathrm{Models}(A)$ для некоторой формулы $A \in \mathcal{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathrm{Models}(\Gamma)$ для нек. множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$.

  Равносильно: если $\mathbb{K} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$.

Определение четырёх «видов» классов моделей

Определение. Для класса моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ будем писать:

- $\mathbb{K} \in \mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathrm{Models}(A)$ для некоторой формулы $A \in \mathcal{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathrm{Models}(\Gamma)$ для нек. множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$.

  Равносильно: если $\mathbb{K} = \bigcap_{i \in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \bigcup_{i \in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$.

Определение четырёх «видов» классов моделей

Определение. Для класса моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ будем писать:

- $\mathbb{K} \in \mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(A)$ для некоторой формулы $A \in \mathcal{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$ для нек. множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$.

  Равносильно: если $\mathbb{K} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \bigcup\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J_i} \mathbb{K}_{i,j}$ для некоторых классов $\mathbb{K}_{i,j} \in \mathbb{L}$.

Определение четырёх «видов» классов моделей

Определение. Для класса моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ будем писать:

- $\mathbb{K} \in \mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathrm{Models}(A)$ для некоторой формулы $A \in \mathcal{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \mathrm{Models}(\Gamma)$ для нек. множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$.

  Равносильно: если $\mathbb{K} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$.
- $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$, если $\mathbb{K} = \bigcup\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J_i} \mathbb{K}_{i,j}$ для некоторых классов $\mathbb{K}_{i,j} \in \mathbb{L}$.

Терминология для языка первого порядка («элементарного» языка):

$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$ — элементарный класс моделей (*конечно аксиоматизируемый*)
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$ — Δ-элементарный класс моделей (*аксиоматизируемый*)
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$ — Σ-элементарный класс моделей (*ко-аксиоматизируемый?*)
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$ — $\Sigma\Delta$-элементарный класс моделей

Иерархия «видов» (species) классов моделей

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}} & \\
\boxed{\Cap\mathbb{L}} \arrow[ur] & & \boxed{\Cup\mathbb{L}} \arrow[ul] \\
 & \boxed{\mathbb{L}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Иерархия «видов» (species) классов моделей

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}} & \\
\boxed{\Cap\mathbb{L}} \arrow[ur] & & \boxed{\Cup\mathbb{L}} \arrow[ul] \\
 & \boxed{\mathbb{L}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- группы, кольца, поля — классы из $\mathbb{L}$
- бесконечные группы, кольца, поля — классы из $\Cap\mathbb{L}$
- конечные группы, кольца, поля — классы из $\Cup\mathbb{L}$
- бесконечные поля характеристики $p > 0$; бесконечные конечномерные векторные пространства — классы из $\Cup\Cap\mathbb{L}$
- Вполне упорядоченные множества, периодические группы, разрешимые группы — даже не в $\Cup\Cap\mathbb{L}$

Изоморфизм двух моделей

$M \cong N \quad \leftrightharpoons \quad \exists$ биекция, сохраняющая все предикаты

Изоморфизм двух моделей

$M \cong N \quad \leftrightharpoons \quad \exists$ биекция, сохраняющая все предикаты

Элементарная эквивалентность двух моделей

$M \equiv_{\mathsf{FO}} N \quad \leftrightharpoons \quad$ для всех формул $A \in \mathsf{FO}$: $\quad M \models A \iff N \models A$

Изоморфизм двух моделей

$M \cong N \quad \leftrightharpoons \quad \exists$ биекция, сохраняющая все предикаты

Элементарная эквивалентность двух моделей

$M \equiv_{\mathrm{FO}} N \quad \leftrightharpoons \quad$ для всех формул $A \in \mathrm{FO}$: $\quad M \models A \iff N \models A$

Ультрапроизведение семейства моделей $M = \prod_{i \in I}^{U} M_i$

$$M \models A \iff \{\, i \in I \mid M_i \models A \,\} \in U$$

Изоморфизм двух моделей

$M \cong N \quad \leftrightharpoons \quad \exists$ биекция, сохраняющая все предикаты

Элементарная эквивалентность двух моделей

$M \equiv_{\mathsf{FO}} N \quad \leftrightharpoons \quad$ для всех формул $A \in \mathsf{FO}$: $\quad M \models A \iff N \models A$

Ультрапроизведение семейства моделей $M = \prod_{i \in I}^{U} M_i$

$$M \models A \quad \iff \quad \{\, i \in I \mid M_i \models A \,\} \in U$$

Ультрастепень модели N

Если все $M_i = N$, то их ультрапроизведение $M = N^U$ — ультрастепень.

Модель и ее ультрастепень — элементарно эквивалентны: $N \equiv_{\mathsf{FO}} N^U$.

Теорема (Keisler, 1961)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{FO}}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{FO}}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{FO}}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{FO}}$	УП	УП

Теорема (Keisler, 1961)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{FO}}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{FO}}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{FO}}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{FO}}$	УП	УП

(Keisler, 1961; Shelah, 1971)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\cong$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\cong$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\cong$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\cong$	УП	УП

Теорема (Keisler, 1961)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{FO}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{FO}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{FO}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{FO}$	УП	УП

(Keisler, 1961; Shelah, 1971)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\cong$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\cong$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\cong$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\cong$	УП	УП

Существенный факт: $\boxed{M \not\models A \iff M \models \neg A}$

Следствия этого факта:

$$\mathbb{K} \in \mathbb{L} \iff \overline{\mathbb{K}} \in \mathbb{L}$$
$$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L} \iff \overline{\mathbb{K}} \in \Cup\mathbb{L}$$
$$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L} \iff \overline{\mathbb{K}} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$$
$$\mathbb{K} \in \mathbb{L} \iff \mathbb{K}, \overline{\mathbb{K}} \in \Cap\mathbb{L}$$

Формулы: $p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A$

Формулы: $p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A$

Семантика Крипке:

Модель Крипке: $M = (W, R, V)$, где

$W \neq \varnothing$ — множество миров

$R \subseteq W \times W$ — отношение достижимости

$V(p_i) \subseteq W$ — оценка переменных

Формулы: $p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A$

Семантика Крипке:

Модель Крипке: $M = (W, R, V)$, где

$W \neq \varnothing$ — множество миров

$R \subseteq W \times W$ — отношение достижимости

$V(p_i) \subseteq W$ — оценка переменных

Истинность формулы определяется в отмеченной модели (M, x):

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models p_i & \leftrightharpoons & x \in V(p_i) \\
M, x \models \neg A & \leftrightharpoons & M, x \not\models A \\
M, x \models A \wedge B & \leftrightharpoons & M, x \models A \quad \text{и} \quad M, x \models B \\
M, x \models A \vee B & \leftrightharpoons & M, x \models A \quad \text{или} \quad M, x \models B \\
M, x \models A \to B & \leftrightharpoons & M, x \models A \quad \Rightarrow \quad M, x \models B \\
M, x \models \Box A & \leftrightharpoons & \text{для всех } y \in W \ (x\, R\, y \ \Rightarrow \ M, y \models A)
\end{array}
$$

Истинность формулы в модели: $M \models A$, если $\forall x \in W \ \ M, x \models A$

Модальная эквивалентность двух (отмеченных) моделей Крипке

$M \equiv_{\mathrm{ML}} N \quad \leftrightharpoons \quad$ для всех формул $A \in \mathrm{ML}$: $\quad M \models A \iff N \models A$

Модальная эквивалентность двух (отмеченных) моделей Крипке

$M \equiv_{\mathrm{ML}} N \quad \leftrightharpoons \quad$ для всех формул $A \in \mathrm{ML}$: $\quad M \models A \iff N \models A$

Бисимуляция между отмеченными моделями Крипке

$M, a \simeq N, b$ — сохраняет оценку переменных
«имитирует» каждый шаг в M нек. шагом в N
«имитирует» каждый шаг в M нек. шагом в N

Модальная эквивалентность двух (отмеченных) моделей Крипке

$M \equiv_{\mathrm{ML}} N \quad \leftrightharpoons \quad$ для всех формул $A \in \mathrm{ML}$: $\quad M \models A \iff N \models A$

Бисимуляция между отмеченными моделями Крипке

$M, a \simeq N, b$ — сохраняет оценку переменных
«имитирует» каждый шаг в M нек. шагом в N
«имитирует» каждый шаг в M нек. шагом в N

Глобальная бисимуляция между моделями Крипке

$M :\simeq: N$ — бисимуляция, покрывающая всю M и всю N

Модальная эквивалентность двух (отмеченных) моделей Крипке

$M \equiv_{\mathrm{ML}} N \quad \leftrightharpoons \quad$ для всех формул $A \in \mathrm{ML}$: $\quad M \models A \iff N \models A$

Бисимуляция между отмеченными моделями Крипке

$M, a \simeq N, b$ — сохраняет оценку переменных
«имитирует» каждый шаг в M нек. шагом в N
«имитирует» каждый шаг в M нек. шагом в N

Глобальная бисимуляция между моделями Крипке

$M :\simeq: N$ — бисимуляция, покрывающая всю M и всю N

Порожденная подмодель: $M \hookrightarrow N$
Несвязная сумма моделей: $M = \biguplus_{i \in I} M_i$

Теорема: отмеченные модели Крипке (Maarten de Rijke, 1993)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Uplus\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{ML}$		
$\mathbb{K} \in \Uplus\mathbb{L}$	$\equiv_{ML}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{ML}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{ML}$	УП	УП

Теорема: отмеченные модели Крипке (Maarten de Rijke, 1993)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	УП	УП

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\simeq$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\simeq$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\simeq$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\simeq$	УП	УП

Теорема: отмеченные модели Крипке (Maarten de Rijke, 1993)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	УП	УП

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\simeq$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\simeq$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\simeq$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\simeq$	УП	УП

Теорема: модели Крипке (M. de Rijke, H. Sturm, 2001; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\hookrightarrow$	
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\hookrightarrow$	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УП

Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ УС	УС
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ УС	УП
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УС
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УП

Ультра-расширение модели Крипке

Если $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, то $M^{\mathfrak{ue}} = (W^{\mathfrak{ue}}, R^{\mathfrak{ue}}, V^{\mathfrak{ue}})$, где

миры:	$W^{\mathfrak{ue}}$		— все ультрафильтры над множеством W;
отношение:	$\alpha\, R^{\mathfrak{ue}}\, \beta$	$\leftrightharpoons$	$\forall X \subseteq W\ (\Diamond X \in \alpha \ \Leftarrow\ X \in \beta)$
		$\Leftrightarrow$	$\forall X \subseteq W\ (\Box X \in \alpha \ \Rightarrow\ X \in \beta)$
оценка:	$\alpha \models p_i$	$\leftrightharpoons$	$V(p_i) \in \alpha$

Ультра-расширение модели Крипке

Если $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, то $M^{\mathfrak{ue}} = (W^{\mathfrak{ue}}, R^{\mathfrak{ue}}, V^{\mathfrak{ue}})$, где

миры:	$W^{\mathfrak{ue}}$		— все ультрафильтры над множеством W;
отношение:	$\alpha\, R^{\mathfrak{ue}}\, \beta$	$\leftrightharpoons$	$\forall X \subseteq W\ (\Diamond X \in \alpha \ \Leftarrow\ X \in \beta)$
		$\Leftrightarrow$	$\forall X \subseteq W\ (\Box X \in \alpha \ \Rightarrow\ X \in \beta)$
оценка:	$\alpha \models p_i$	$\leftrightharpoons$	$V(p_i) \in \alpha$

Модель и её ультра-расширение модально не отличимы: $M \equiv_{\mathrm{ML}} M^{\mathfrak{ue}}$

Ультра-расширение модели Крипке

Если $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, то $M^{\mathfrak{ue}} = (W^{\mathfrak{ue}}, R^{\mathfrak{ue}}, V^{\mathfrak{ue}})$, где

миры:	$W^{\mathfrak{ue}}$	—	все ультрафильтры над множеством W;
отношение:	$\alpha \, R^{\mathfrak{ue}} \, \beta$	$\leftrightharpoons$	$\forall X \subseteq W \; (\Diamond X \in \alpha \;\Leftarrow\; X \in \beta)$
		$\Leftrightarrow$	$\forall X \subseteq W \; (\Box X \in \alpha \;\Rightarrow\; X \in \beta)$
оценка:	$\alpha \models p_i$	$\leftrightharpoons$	$V(p_i) \in \alpha$

Модель и её ультра-расширение модально не отличимы: $M \equiv_{\mathrm{ML}} M^{\mathfrak{ue}}$

Ультра-сумма семейства отмеченных моделей Крипке $(M_i, a_i)_{i \in I}$

$M = \Big(\big(\biguplus_{i \in I} M_i \big)^{\mathfrak{ue}}, \; \alpha \Big)$, где в α есть все ко-конечные $\subseteq \{ \langle a_i, i \rangle \mid i \in I \}$.

Наблюдение. Ультрасумма похожа на ультрапроизведение.

Теорема: отмеченные модели (Yde Venema, 1999; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		$\uplus^{\mathfrak{ue}}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$

Модальный язык | «чисто модальные» критерии

Теорема: отмеченные модели (Yde Venema, 1999; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		$\uplus^{\mathfrak{ue}}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\simeq$	$\mathfrak{ue}$	$\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\simeq$	$\mathfrak{ue}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\simeq$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\simeq$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$

Теорема: отмеченные модели (Yde Venema, 1999; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		
$\mathbb{K} \in \mathbb{U}\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$		$\uplus^{\mathfrak{ue}}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{L}$	$\simeq$	$\mathfrak{ue}$	$\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \mathbb{U}\mathbb{L}$	$\simeq$	$\mathfrak{ue}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\simeq$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\simeq$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$

Теорема: модели Крипке (Yde Venema, 1999; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\hookrightarrow$	
$\mathbb{K} \in \mathbb{U}\mathbb{L}$		?	
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ $\mathfrak{ue}$	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$		?	

Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ $\mathfrak{ue}$	$\mathfrak{ue}$
	?	
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ $\mathfrak{ue}$	$\mathfrak{ue}$
	?	

Универсальная модальность | «чистые» критерии

Теорема: отмеченные модели (возможно, известно; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\forall}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\forall}$		$\uplus^{\mathfrak{ue}}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\forall}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\forall}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$:\simeq:$	$\mathfrak{ue}$	$\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$:\simeq:$	$\mathfrak{ue}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$:\simeq:$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$:\simeq:$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$

Теорема: модели Крипке (возможно, известно; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\forall}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\forall}$		$\uplus$ $\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\forall}$	$\uplus$ $\mathfrak{ue}$	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\forall}$	$\uplus$ $\mathfrak{ue}$	$\uplus$ $\mathfrak{ue}$

Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$:\simeq:$	$\mathfrak{ue}$	$\mathfrak{ue}$
$:\simeq:$	$\mathfrak{ue}$	$\uplus$ $\mathfrak{ue}$
$:\simeq:$	$\uplus$ $\mathfrak{ue}$	$\mathfrak{ue}$
$:\simeq:$	$\uplus$ $\mathfrak{ue}$	$\uplus$ $\mathfrak{ue}$

Дальнейшие вопросы

- Критерии для других семантик модальной логики
  - окрестностная семантика
  - топологическая семантика
  - алгебраическая семантика

Дальнейшие вопросы

- Критерии для других семантик модальной логики
  - окрестностная семантика
  - топологическая семантика
  - алгебраическая семантика
- Критерии для других языков:
  - модальности: обратная $\Box^{-1}$, неравенство $[\neq]$, транз. замыкание $\boxplus$, градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n}$, гибридная логика $@_i$
  - инфинитарный модальный язык:
    - классы моделей, задаваемые одной инфинитарной формулой
    - классы моделей, задаваемые классом (!) инфинитарных формул
  - интуиционистская логика высказываний
  - модальная логика предикатов

Дальнейшие вопросы

- Критерии для других семантик модальной логики
  - окрестностная семантика
  - топологическая семантика
  - алгебраическая семантика
- Критерии для других языков:
  - модальности: обратная $\Box^{-1}$, неравенство $[\neq]$, транз. замыкание $\boxplus$, градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n}$, гибридная логика $@_i$
  - инфинитарный модальный язык:
    – классы моделей, задаваемые одной инфинитарной формулой
    – классы моделей, задаваемые классом (!) инфинитарных формул
  - интуиционистская логика высказываний
  - модальная логика предикатов
- [Areces, Carreiro, Figueira, 2014]: общие критерии для языка, являющегося «хорошим» фрагментом языка FO:
  – их результаты лишь для классов отмеченных моделей,
  – распространить (если возможно) для классов моделей.

Дальнейшие вопросы

- Критерии для других семантик модальной логики
  - окрестностная семантика
  - топологическая семантика
  - алгебраическая семантика
- Критерии для других языков:
  - модальности: обратная $\Box^{-1}$, неравенство $[\neq]$, транз. замыкание $\boxplus$, градуированные модальности $\Diamond^{\geqslant n}$, гибридная логика $@_i$
  - инфинитарный модальный язык:
    – классы моделей, задаваемые одной инфинитарной формулой
    – классы моделей, задаваемые классом (!) инфинитарных формул
  - интуиционистская логика высказываний
  - модальная логика предикатов
- [Areces, Carreiro, Figueira, 2014]: общие критерии для языка, являющегося «хорошим» фрагментом языка FO:
  – их результаты лишь для классов отмеченных моделей,
  – распространить (если возможно) для классов моделей.

Спасибо!

Теорема: отмеченные модели (M. de Rijke, 1992; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\neq}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\neq}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\neq}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\neq}$	УП	УП

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\simeq_{\neq}$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\simeq_{\neq}$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\simeq_{\neq}$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\simeq_{\neq}$	УП	УП

Теорема: модели Крипке (M. de Rijke, 1992; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\neq}$	$\hookrightarrow$	
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\neq}$	$\hookrightarrow$	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\neq}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML}\neq}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УП

Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$:\simeq:_{\neq}$	$\hookrightarrow$ УС	УС
$:\simeq:_{\neq}$	$\hookrightarrow$ УС	УП
$:\simeq:_{\neq}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УС
$:\simeq:_{\neq}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УП

Темпоральная логика | Критерии через УП (проверить)

Теорема: отмеченные модели (кто? E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML.t}}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML.t}}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML.t}}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML.t}}$	УП	УП

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\simeq_t$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\simeq_t$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\simeq_t$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\simeq_t$	УП	УП

Теорема: модели Крипке (кто?; E.Z. 2017)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML.t}}$	$\hookrightarrow$	
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML.t}}$	$\hookrightarrow$	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML.t}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{ML.t}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УП

Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$:\simeq:_t$	$\hookrightarrow_t$ УС	УС
$:\simeq:_t$	$\hookrightarrow_t$ УС	УП
$:\simeq:_t$	$\hookrightarrow_t$ $\uplus$ УП	УС
$:\simeq:_t$	$\hookrightarrow_t$ $\uplus$ УП	УП

Градуированные модальности | Критерии

Теорема: отмеченные модели Крипке (M. de Rijke, 2000)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{MLG}}$		
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{MLG}}$		УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{MLG}}$	УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{MLG}}$	УП	УП

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\simeq_{\mathsf{G}}$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\simeq_{\mathsf{G}}$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\simeq_{\mathsf{G}}$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\simeq_{\mathsf{G}}$	УП	УП

Теорема: модели Крипке (M. de Rijke не написал, проверить)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{MLG}}$	$\hookrightarrow$	
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{MLG}}$	$\hookrightarrow$	УП
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{MLG}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv_{\mathsf{MLG}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УП

Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$:\simeq:_{\mathsf{G}}$	$\hookrightarrow$ УС	УС
$:\simeq:_{\mathsf{G}}$	$\hookrightarrow$ УС	УП
$:\simeq:_{\mathsf{G}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УС
$:\simeq:_{\mathsf{G}}$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УП

Теорема: отмеченные модели (Piet Rodenburg 1986)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$			

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$			

Теорема: модели Крипке (Piet Rodenburg 1986)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$			

Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ УС	УС
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ УС	УП
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УС
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ УП	УП

Теорема: отмеченные модели (не получено)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$			

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$			

Теорема: модели Крипке (Robert Goldblatt 2005)

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$			
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$			

Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$:\simeq:$	$\hookrightarrow$ $\uplus$ $\mathfrak{pe}$	$\mathfrak{pe}$
?		