# Спецкурс «Модальная логика» (2017): Задачи

Лектор: с.н.с. Е.Е.Золин

## ОСЕНЬ 2016

1. Докажите, что при добавлении к логике $\mathbf{K}$ аксиом $\Diamond\top$ и $\Box p \to \Diamond p$ получается одна и та же логика (она называется $\mathbf{D}$).

2. Докажите, что логика $\mathbf{B} = \mathbf{K} + \{\Box p \to p, p \to \Box\Diamond p\}$ является канонической (и полной).

3. *Замкнутой* модальной формулой называется формула, не содержащая переменных, то есть построенная из $\bot$ с помощью $\to$ и $\Box$. Пусть $\Gamma$ — некоторое множество замкнутых модальных формул. Докажите, что модальная логика $\mathbf{K} + \Gamma$ является канонической (а следовательно, и полной).

4. Докажите, что формула $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ задает класс шкал с *условием Чёрча–Россера*:

$$\forall x, y, z \left(xRy \;\&\; xRz \;\to\; \exists w\,(yRw \;\&\; zRw)\right).$$

5. Докажите, что формула $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$ задает класс шкал с условием *сильной связности*:

$$\forall x, y, z \left(xRy \;\&\; xRz \;\to\; yRz \;\vee\; zRy\right).$$

## ВЕСНА 2017

1. Найдите все порожденные подшкалы следующих шкал: $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{R}, <)$.

2. Является ли модально насыщенной следующая модель: из точки выходят цепи длины 1, 2, 3, и так далее; оценка переменных тривиальная — все переменные истинны во всех точках.

3. Если формула первого порядка $\alpha(x)$ эквивалентна (на всех отмеченных моделях Крипке) некоторому множеству модальных формул, то она эквивалентна и одной модальной формуле.

4. Формула первого порядка $\alpha(x)$ и модальная формула $A$ эквивалентны друг другу на всех отмеченных моделях $\Longleftrightarrow$ они эквивалентны друг другу на не более чем счетных моделях.

5. **а)** Докажите, что модель $M^{\mathfrak{ue}}$ содержит изоморфную копию исходной модели $M$ (что объясняет ее название: ультра-*расширение*). Указание: рассмотрите для каждой точки $a \in M$ главный ультрафильтр $\pi_a = \{X \subseteq W \mid a \in X\}$. **б)** Докажите, что если $M$ — конечная, то $M^{\mathfrak{ue}}$ изоморфна $M$.

6. **а)** Если $(M, a) \simeq (N, b)$, то $(M, a)^{\mathfrak{ue}} \simeq (N, b)^{\mathfrak{ue}}$. **б)** Если $M :\simeq: N$, то $M^{\mathfrak{ue}} :\simeq: N^{\mathfrak{ue}}$.

7. **а)** Докажите, что следующие модели равны: $M^{\mathsf{can}} = (M^{\mathsf{can}})^{\mathsf{can}} = (M^{\mathfrak{ue}})^{\mathsf{can}}$.

   **б)** Докажите, что следующие модели глобально бисимулируют: $M^{\mathfrak{ue}}$, $(M^{\mathfrak{ue}})^{\mathfrak{ue}}$, $(M^{\mathsf{can}})^{\mathfrak{ue}}$.

   **в)** Докажите, что имеется сюръективный р-морфизм $M^{\mathfrak{ue}} \twoheadrightarrow M^{\mathsf{can}}$.

8. Рассмотрим класс моделей Крипке, в которых верна переменная $p$: $\mathbb{K} = \{M \mid M \models p\}$. По построению, $\mathbb{K} \in \mathbb{M}$. Докажите, что дополнение этого класса $\overline{\mathbb{K}}$ не только нельзя задать какой-либо модальной формулой (то есть $\overline{\mathbb{K}} \notin \mathbb{M}$) или каким-либо множеством модальных формул (то есть $\overline{\mathbb{K}} \notin \Cap\mathbb{M}$), но даже нельзя представить в виде объединения модально определимых классов моделей, то есть $\overline{\mathbb{K}} \notin \Cup\Cap\mathbb{M}$.