Спецкурс «Модальная логика»: Вопросы к экзамену

Лектор: с.н.с. Е.Е.Золин

ОСЕНЬ 2016

1. Бисимуляция. Инвариантность модальных формул при бисимуляциях. Бисимулирующие отмеченные модели модально неотличимы. Обратное неверно: контрпример. (2014–2015, §8)

2. Совпадение отношений бисимуляции и модальной эквивалентности для случая конечных моделей, моделей конечного ветвления, модально насыщенных моделей. (2015–2016, §4)

3. Конечные бисимуляционные игры и модальная неотличимость отмеченных моделей.

4. Бесконечные бисимуляционные игры и бисимуляционная эквивалентность отмеченных моделей.

5. Инфинитарный модальный язык ML_∞. Совпадение бисимуляционной эквивалентности и неотличимости формулами этого языка.

6. Ограниченно-инфинитарные модальные языки ML_κ. Совпадение $\simeq$ и $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$ для κ-модально насыщенных моделей.

7. Исчисление **K**. Понятие нормальной модальной логики. Теорема о корректности: логика любого класса шкал является нормальной. (2014–2015, §5, до теоремы 5.3 вкл.)

8. Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые множества формул. Лемма о пополнении. Лемма Линденбаума. Лемма о свойствах максимальных непротиворечивых множеств формул. (2014–2015, §6, леммы 6.1–6.6)

9. Каноническая модель. Теорема о канонической модели. Понятия полной и сильно полной логики. Всякая каноническая логика является сильно полной. Пример неканонической и не сильно полной логики. (2014–2015, §6, леммы 6.7–6.8; §7, до леммы 7.6 вкл.; 2015–2016, §1, до леммы 1.6 вкл.)

10. Финитная аппроксимируемость логики. Теорема Харропа о разрешимости логики. (2014–2015, теорема 9.6.) Конечные максимальные непротиворечивые множества формул. Лемма о пополнении. Лемма о свойствах конечных м.н.м. Конечная каноническая модель для логик **K**, **GL**.

11. Секвенциальные исчисления для (некоторых) модальных логик. Совместное доказательство полноты гильбертовского и секвенциального исчислений и финитной аппроксимируемости методом конечных канонических моделей (для логик **K**, **GL**) — общая схема доказательства.

ВЕСНА 2017

1. Определения (синтаксические): теория, нормальная теория, логика, нормальная логика. Определения (семантические): теория точки, модели, класса моделей; логика точки, шкалы, класса шкал. Утверждения: теория всякого класса моделей является нормальной теорией, логика класса шкал является нормальной логикой (в частности, замкнута относительно правила подстановки).

   [Семантика Крипке: конспект 2014-2015, глава 1 и глава 5 до теоремы 5.3; теории и логики: конспект 2016-2017, глава 5 (начало); доказательство утверждений — простое упражнение, провести самостоятельно]

2. Несвязная сумма моделей и шкал Крипке. Основная лемма. Связь теории / логики несвязной суммы структуры с теориями / логиками исходных структур. Теория класса моделей является теорией некоторой модели; логика класса шкал является логикой некоторой шкалы.

   [Конспект 2014-2015, раздел 2.1; конспект 2016-2017, лемма 5.2, теорема 5.5]

3. Порожденная подмодель и подшкала Крипке. Подмодель (подшкала), порожденная одной точкой (определение). Основная лемма. Связь теории / логики порожденной подструктуры с теорией / логикой исходной структуры.

   [Конспект 2014-2015, раздел 2.2; конспект 2016-2017, лемма 5.3]

4. Модальный морфизм (он же p-морфизм) шкал и моделей Крипке. Основная лемма. Связь теории / логики p-морфного образа структуры с теорией / логикой исходной структуры.

   [Конспект 2014-2015, раздел 2.3; конспект 2016-2017, лемма 5.4, теорема 5.6]

5. Модально-насыщенная модель Крипке: два эквивалентных определения (доказательство их эквивалентности). Всякая модель с конечным ветвлением (в частности, всякая конечная модель) является м.н. Основная лемма: для м.н. моделей бисимуляция между точками равносильна модальной эквивалентности этих точек: $(M, a) \simeq (N, b) \Leftrightarrow (M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$.

   [Конспект 2015-2016, глава 4, лемма 4.4, теорема 4.5; повтор: конспект 2016-2017, глава 6 до леммы 6.2]

6. Модально-компактная модель Крипке: два эквивалентных определения (доказательство их эквивалентности). Основная лемма: для м.н. и м.к. моделей глобальная бисимуляция между моделями равносильна модальной эквивалентности этих моделей: $M :\simeq: N \Leftrightarrow M \equiv_{\mathsf{ML}} N$. «Одностороннее» аналогичное утверждение (лемма 6.5).

   [Конспект 2016-2017, глава 6, леммы 6.4 и 6.5]

7. Каноническая модель (теории) — модально насыщенная; модально компактная; модально различимая.

   [Конспект 2016-2017, глава 6, леммы 6.8, 6.9, 6.11]

8. При расширении теории ($T \subseteq T'$) каноническая модель сужается ($M_{T'} \hookrightarrow M_T$).

   Если модель M м.н. и м.к., то имеется сюръективный p-морфизм $M \twoheadrightarrow M^{\mathsf{can}}$.

   [Конспект 2016-2017, глава 6, леммы 6.10, 6.13]

9. Элементарный класс шкал Крипке (определение). Модально-компактный класс шкал Крипке (два эквивалентных определения). Из элементарности следует модальная компактность класса шкал.

   [Конспект 2016-2017, глава 7, лемма 7.5; необходимо знать теоремы 7.1 (без док-ва) и 7.2]

10. Теорема Файна о каноничности.

    [Конспект 2016-2017, глава 7, лемма 7.8; необходимо знать (без док-ва) теорему 7.6 и лемму 7.7]

11. Общая теория определимости: «типы» $\mathbb{L}$, $\Cap\mathbb{L}$, $\Cup\mathbb{L}$, $\Cup\Cap\mathbb{L}$. Доказательство равенства $\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}$, используя дистрибутивность (аксиому выбора). Замкнутость $\Cap\mathbb{L}$ и $\Cap\Cup\mathbb{L}$ (соотв. $\Cup\mathbb{L}$ и $\Cup\Cap\mathbb{L}$) относительно $\cap$ (соотв. $\cup$). Следствие — иерархия из четырёх «типов».

    [Конспект 2016-2017, раздел 8.1]

12. Критерий для принадлежности класса «типу» $\Cup\Cap\mathbb{L}$ (замкнутость относительно $\sqsubseteq_{\mathcal{L}}$).

    Лемма 1: Класс $\langle\mathbb{K}\rangle := \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K}))$ есть наименьший класс из $\Cap\mathbb{L}$, содержащий данный класс $\mathbb{K}$.

    Лемма 2: Класс $(\mathbb{K}) := \bigcup_{M\in\mathbb{K}}\langle M\rangle$ есть наименьший класс из $\Cup\Cap\mathbb{L}$, содержащий данный класс $\mathbb{K}$.

    [Конспект 2016-2017, раздел 8.2, теорема 8.7; «симметричная» теорема 8.8, дающая также доказательство равенства $\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}$ без использования аксиомы выбора, на лекциях не давалась, посему на экзамен не выносится; раздел 8.3, лемма 8.10]

13. Семантика, согласованная с отрицанием (ССО). В случае ССО имеют место: (а) совпадение $\equiv$ и $\sqsubseteq$; (б) критерий для $\Cup\Cap\mathbb{L}$ через $\equiv$; (в) как меняется принадлежность к $\mathbb{L}, \Cap\mathbb{L}, \Cup\mathbb{L}, \Cup\Cap\mathbb{L}$ при переходе от $\mathbb{K}$ к $\overline{\mathbb{K}}$.

    В случае ССО: компактные классы структур (определение); для компактного класса $\mathbb{K}$ его замыкание относительно $\equiv$ совпадает с наименьшим аксиоматизируемым надклассом: $[\mathbb{K}] = \langle\mathbb{K}\rangle$.

    [Конспект 2016-2017, раздел 8.4, утверждения 8.12, 8.13, 8.16, 8.19]

14. Критерии для всех четырех «типов» в случае ССО (в терминах компактности).

    [Конспект 2016-2017, раздел 8.4, утверждения 8.20 и 8.21]

15. Ультрафильтры. Ультра-расширение модели Крипке $M^{\mathfrak{ue}}$. Основная лемма.

    [См. отдельный «файл про ТГТ» (ссылка на сайте), разделы 3 и 4]

16. Ультра-расширение любой модели является: модально насыщенным; модально компактным; модально эквивалентным исходной модели.

    [Конспект 2016-2017, леммы 6.15, 6.16, 6.17]

17. Критерии для $\Cup\Cap\mathbb{M}$ в случае модальной логики:
    – класс отмеченных моделей $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M} \iff \mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$;
    – класс моделей Крипке $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M} \iff \mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\hookrightarrow$.

    [Конспект 2016-2017, раздел 9.2.1, теоремы 9.5 и 9.6; вместо $M^\sharp$ можете говорить, например, про M^{can}]

18. Критерии для $\Cup\Cap\mathbb{M}$ в случае модальной логики в терминах бисимуляции (для моделей Крипке и для отмеченных моделей Крипке).

    [Конспект 2016-2017, раздел 9.2.2; вместо $M^\sharp$ можете говорить о конкретной операции насыщения: $M^{\mathfrak{ue}}$]

19. Если две модели M и N порождены точками a и b, соответственно, и $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$, то $M \equiv_{\mathsf{ML}} N$.
    Если $M :\simeq: N$, а модель N модально различима, то эта бисимуляция — функция (т.е. p-морфизмt).
    Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы всех своих корневых подшкал.

    [Конспект 2016-2017, раздел 10, леммы 10.1, 10.2, 10.3; подробнее про 10.3 см. отдельный «файл про ТГТ» — лемма 2.5]

20. Лемма о переносе выполнимости. Ультрарасширение супермодели — модально различимо.

    [Конспект 2016-2017, раздел 10, леммы 10.4, 10.5]

21. Теорема Гольдблатта–Томасона.

    [Конспект 2016-2017, раздел 10, теорема 10.6; сравните со старым док-вом в отдельном «файле про ТГТ», теорема 11.1]

22. Теоремы ван Бентема о бисимуляции (для одной формулы и для множества формул).

    Глобальные аналоги теоремы ван Бентема (без доказательства).

    [Конспект 2016-2017, раздел 11]

23. Теорема ван Бентема о дихотомии (без доказательства). Лемма: если класс шкал задан одной модальной формулой и при этом множеством замкнутых формул первого порядка (сигнатуры $\{R, =\}$), то он задается одной формулой первого порядка (с доказательством).

    [Конспект 2016-2017, раздел 12]