Модальная логика

с.н.с. Е. Е. Золин
(годовой курс, 2016–2017)

Содержание

Задача о «ежах»

Задача. Рассмотрим «ежа», то есть шкалу $E_n = (W, R)$, где $W = \{a, b_1, \ldots, b_n\}$, $a\,R\,b_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Рассмотрим также «счетного ежа» — шкалу E_ω со счетным множеством «иголок» $\{b_i \mid i < \omega\}$, и «континуального ежа» — шкалу $E_\mathfrak{c}$ с континуальным множеством «иголок» $\{b_i \mid i < \mathfrak{c}\}$.

Обозначим $L_n := \mathsf{Logic}(E_n, a) = \{A \mid E_n, a \models A\}$ — логику точки a шкалы E_n, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.

Требуется доказать, что справедливы следующие строгие включения и равенство:

$$L_1 \supset L_2 \supset L_3 \supset \ldots \supset L_\omega = L_\mathfrak{c}.$$

Указания.

1) Включение $L_n \supseteq L_{n+1}$ доказать так: если $A \notin L_n$, то имеется модель M над шкалой E_n, в которой $M, a \not\models A$. Преобразовать ее в модель M' над шкалой E_{n+1}, продублировав точку b_n в точку b_{n+1}, и убедиться, что для любой формулы B (в том числе для A) имеет место: $M, a \models B \Leftrightarrow M', a \models B$.

1а) Аналогично можно доказать включения $L_n \supseteq L_{n'}$ для любых $n < n'$, где $n, n' \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.

2) Строгость включения $L_n \supsetneqq L_{n+1}$ проверить, рассмотрев формулы A_k:

$$\Diamond p_1 \wedge \ldots \Diamond p_k \ \to \ \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \Diamond(p_i \wedge p_j)$$

и проверив, что $E_n \models A_k \Leftrightarrow n > k$. Тем самым формула A_n отличает L_n от L_{n+1}.

3) Включение $L_\omega \subseteq L_\mathfrak{c}$ (из которого будет следовать равенство этих логик) доказать так: если $A \notin L_\mathfrak{c}$, то имеется модель M над шкалой $E_\mathfrak{c}$, такая что $M, a \not\models A$. Пусть формула A содержит лишь переменные $p_1, \ldots, p_n$. Тогда точки $\{b_i \mid i < \mathfrak{c}\}$ разбиваются на $\leqslant 2^n$ (но не менее одного) класса эквивалентности относительно «цветов» — истинности в них данных n переменных. Тогда строим модель M' над E_ω так: первые (их будет не более 2^n) точек — в точности тех же «цветов», а далее — дублируем ω раз «цвет» какой-либо из предыдущих точек, например, «цвет» точки b_1. Убедиться, что для любой формулы B (в том числе для A) имеет место: $M, a \models B \Leftrightarrow M', a \models B$.

Задача. Докажите, что $L_\omega = \bigcap_{n \geqslant 1} L_n$. Указание: используйте ту же идею с «цветами».

Задача. Обозначить теперь через L_n логику всей шкалы E_n, а не только ее корня. Провести аналогичный анализ — сравнение получившихся логик по включению.

Задача. Аналогичная задача для логик кластеров $(W, W \times W)$, где $|W| \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} \cup \{\mathfrak{c}\}$.

Задача. Аналогичная задача для линейных порядков $(\{1, \ldots, n\}, \leqslant)$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Аналогично для отношения $<$ либо $\lessdot$ (непосредственно следующий).

1 Бисимуляционные игры

Игровая семантика — это способ переформулировать проблему неотличимости структур в данном языке в терминах наличия выигрышной стратегии у некоторого игрока в некоторой специально подобранной игре.

1.1 Конечная бисимуляционная игра и модальная неотличимость

Важно: считаем, что в модальном языке лишь конечное число переменных: $\mathsf{Var} = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$.

Даны две (не обязательно конечные) отмеченные модели Крипке (M, a) и (M', a').

Требуется выяснить, являются ли они *модально неотличимыми*: $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a')$. Напомним, что это означает следующее: для каждой модальной формулы A (над нашим конечным множеством переменных Var) имеет место эквивалентность: $M, a \models A \Leftrightarrow M', a' \models A$. Нам будет удобно ввести отношение *атомарной эквивалентности* двух отмеченных моделей, означающей, что в выделенных точках верны одни и те же пропозициональные переменные:

$$(M, a) \equiv_{\mathsf{Var}} (M', a') \leftrightharpoons \forall p \in \mathsf{Var}\ (\ M, a \models p \Leftrightarrow M', a' \models p\ ).$$

Имеются два игрока: первый $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ и второй $\mathsf{P}_{\equiv}$. В начале игры «фишки» стоят в точках a и a'.
Цель первого игрока $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ — показать, что $(M, a) \not\equiv_{\mathsf{ML}} (M', a')$.
Цель второго игрока $\mathsf{P}_{\equiv}$ — показать, что $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a')$.
Будем говорить, игрок *делает ход* в модели, если он в данной модели передвигает фишку из текущей точки в некоторого ее последователя (то есть точку, достижимую из данной точки за один шаг). Будем говорить, что игрок *не может сделать ход* в данной модели, если у текущей точки нет последователей.

Описание игры $\mathsf{Game}((M, a), (M', a'))$. В точках a и a' стоят «фишки».
Первый игрок ($\mathsf{P}_{\not\equiv}$) выбирает произвольное натуральное число $n \geqslant 0$.
Проверка: если $(M, a) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', a')$, то игрок $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ выиграл.
Далее играются n раундов:

> • Первый игрок $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ пытается сделать ход в одной из двух моделей;
> – если он не может сделать ход ни в одной из моделей, то $\mathsf{P}_{\equiv}$ выиграл.
> • Второй игрок $\mathsf{P}_{\equiv}$ пытается сделать ход в «противоположной» модели;
> – если он не может сделать ход в этой модели, то $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ выиграл.
> В результате фишки оказались в точках b и b', причем $a\,R\,b$ и $a'\,R'\,b'$.
> Проверка: если $(M, b) \not\equiv_{\mathsf{Var}} (M', b')$, то игрок $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ выиграл.

Если n раундов прошло успешно, то $\mathsf{P}_{\equiv}$ выиграл.

Как всегда в играх, возникает естественный вопрос: кто выигрывает при «правильной игре»? Другими словами, есть ли у какого-либо из игроков выигрышная стратегия? *Выигрышная стратегия* — это способ[1] для одного из игроков так отвечать на ходы противника, чтобы всегда приходить к победе. Формально, стратегия игрока P — это функция, которая на каждом шаге игры (в зависимости от текущего состояния «игрового поля», а также от всех предыдущих сделанных игроками ходов) указывает игроку P, какой следующий ход надо сделать; *выигрышная стратегия* для игрока P — такая стратегия, при которой он выигрывает независимо от того, какие ходы совершит противник.

Теорема 1.1 (Игровая характеризация модальной неотличимости)**.**
$(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a') \iff$ *второй игрок* $\mathsf{P}_{\equiv}$ *имеет выигрышную стратегию в игре* $\mathsf{Game}((M, a), (M', a'))$.

Пример для двух моделей, которые $\equiv_{\mathsf{ML}}$, но не $\simeq$. (конспект 2014–2015, пример 8.7)

Для доказательства этой теоремы мы введем игру в n раундов $\mathsf{Game}_n((M, a), (M', a'))$, которая отличается от описанной выше игры Game тем, что вычеркивается первое действие — первый игрок $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ теперь не будет выбирать число $n \geqslant 0$, а оно будет задано заранее. Когда второй игрок $\mathsf{P}_{\equiv}$ будет гарантированно выигрывать в такой игре? Чтобы ответить на этот вопрос, нам нужно «стратифицировать» модальные формулы по их так называемой *модальной глубине*, которая определяется как максимальное количество вложенных друг в друга модальных операторов $\Box$.

[1] Не обязательно алгоритмический, а просто, «в принципе», то есть существование функции в математическом смысле.

Определение 1.2. *Модальная глубина* формулы A, обозначаемая $d(A)$, определяется по индукции:

$$d(\bot) = 0, \qquad d(p) = 0, \qquad d(A \to B) = \max\{d(A), d(B)\}, \qquad d(\Box A) = 1 + d(A).$$

Будем писать: $(M,a) \equiv^n_{\mathsf{ML}} (M',a')$, если для каждой формулы A глубины $d(A) \leqslant n$ имеем: $M,a \models A \Leftrightarrow M',a' \models A$. Таким образом, отношение $\equiv^n_{\mathsf{ML}}$ означает, что данные отмеченные модели не отличимы никакой модальной формулой глубины не более n. Очевидно, что отношение $\equiv_{\mathsf{Var}}$ совпадает с $\equiv^0_{\mathsf{ML}}$.

Теорема 1.3 (Стратифицированная игровая характеризация модальной неотличимости)**.** $\forall n \geqslant 0$ $(M,a) \equiv^n_{\mathsf{ML}} (M',a') \iff$ *второй игрок* $\mathsf{P}_\equiv$ *имеет выигрышную стратегию в игре* $\mathsf{Game}_n((M,a),(M',a'))$.

Из теоремы 1.3 легко следует теорема 1.1, ввиду двух очевидных эквивалентностей:

$$(M,a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M',a') \iff \forall n \geqslant 0 \ (M,a) \equiv^n_{\mathsf{ML}} (M',a').$$

$$\mathsf{P}_\equiv \text{ имеет выигрышную стратегию в игре } \mathsf{Game}((M,a),(M',a')) \iff$$
$$\forall n \geqslant 0 \ \ \mathsf{P}_\equiv \text{ имеет выигрышную стратегию в игре } \mathsf{Game}_n((M,a),(M',a')).$$

Вторая эквивалентность — в силу того, что в игре Game число раундов n выбирает *первый* игрок $\mathsf{P}_{\not\equiv}$.

Итак, приступим к доказательству теоремы 1.3.

Доказательство. Индукцией по n. База ($n = 0$): в 0-раундной игре победитель определяется исходя из того, выполняется ли отношение $\equiv_{\mathsf{Var}}$ (оно же — отношение $\equiv^0_{\mathsf{ML}}$) для начальных точек.

Шаг индукции: пусть $n \geqslant 0$; докажем утверждение для $n+1$, опираясь на уже доказанное утверждение для n. Доказываемое утверждение суть эквивалентность, поэтому докажем обе импликации.

($\Longleftarrow$) (Здесь конечность множества Var не используется.) Пусть второй игрок $\mathsf{P}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{Game}_{n+1}((M,a),(M',a'))$. Покажем, что (M,a) и (M',a') не отличимы никакой формулой A модальной глубины $\leqslant n{+}1$. Формула A является булевой комбинацией переменных и формул вида $\Box C$, где $d(C) \leqslant n$. Очевидно, что наши отмеченные модели не отличимы никакой переменной (иначе бы $\mathsf{P}_\equiv$ проигрывал уже до начала первого раунда). Значит, осталось показать, что наши отмеченные модели не отличимы никакой формулой вида $\Box C$, где $d(C) \leqslant n$; то есть верна эквивалентность:

$$M,a \models \Box C \iff M',a' \models \Box C.$$

Ввиду симметрии достаточно доказать лишь одну импликацию, скажем, $\Longleftarrow$. Пусть $M',a' \models \Box C$. Чтобы доказать, что $M,a \models \Box C$, возьмем любой элемент $b \in M$ такой, что aRb, и покажем, что $M,b \models C$.

Для этого начнем игру: пусть первый игрок $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ сделал ход из точки a в точку b. У второго игрока $\mathsf{P}_\equiv$ на это есть ответный ход — в некоторую точку $b' \in M'$, такую что $a'R'b'$, — гарантированно приводящий его к победе. Это значит, что точка b' такова, что второй игрок $\mathsf{P}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{Game}_n((M,b),(M',b'))$. По предположению индукции $(M,b) \equiv^n_{\mathsf{ML}} (M',b')$. В частности, поскольку $d(C) \leqslant n$, то (M,b) и (M',b') неотличимы формулой C. Вспомним, что $M',a' \models \Box C$ и $a'R'b'$; значит $M',b' \models C$. Следовательно, $M,b \models C$, что и требовалось.

($\Longrightarrow$) Пусть $(M,a) \equiv^{n+1}_{\mathsf{ML}} (M',a')$. Предъявим выигрышную стратегию для игрока $\mathsf{P}_\equiv$ в игре $\mathsf{Game}_{n+1}((M,a),(M',a'))$. Очевидно, проверка точек a и a' на атомарную эквивалентность, выполняемая перед началом игры, пройдет успешно. Пусть теперь первый игрок $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ сделал ход в модели M (если в модели M', то рассуждения аналогичны) из точки a в точку b, такую что aRb.

По лемме 1.4 (см. ниже), существует лишь конечное число формул глубины $\leqslant n$ от конечного числа переменных из $\mathsf{Var} = \{p_1,\ldots,p_\ell\}$. Выберем из них по представителю. Пусть $C_1,\ldots,C_s$ — те из них, которые истинны в M,b. Обозначим $C = C_1 \wedge \ldots \wedge C_s$. Это тоже формула глубины $\leqslant n$ от переменных $\{p_1,\ldots,p_\ell\}$. Имеем $M,b \models C$. значит, $M,a \models \Diamond C$. Имеем $d(\Diamond C) \leqslant n{+}1$. По предположению, $(M,a) \equiv^{n+1}_{\mathsf{ML}} (M',a')$. Следовательно, $M',a' \models \Diamond C$ и значит, существует точка $b' \in M'$, такая что $a'R'b'$ и $M',b' \models C$.

Мы утверждаем, что $(M,b) \equiv^n_{\mathsf{ML}} (M',b')$. Действительно, возьмем любую формулу B глубины $d(B) \leqslant n$. Если $M,b \models B$, то B эквивалентна одной из формул C_i; а она есть один из конъюнктов формулы C, истинной в (M',b'); значит, $M',b' \models B$. Если же $M,b \not\models B$ и $d(B) \leqslant n$, то $\neg B$ эквивалентна одной из формул C_j, и тем же рассуждением мы получаем $M',b' \models \neg B$.

По предположению индукции игрок $\mathsf{P}_\equiv$ имеет выигрышную стратегию в игре $\mathsf{Game}_n((M,b),(M',b'))$. Итак, на ход первого игрока $\mathsf{P}_{\not\equiv}$ из точки a в точку b второй игрок $\mathsf{P}_\equiv$ может ответить (ходом из a' в b'), чтобы гарантировать себе победу. Выигрышная стратегия для игрока $\mathsf{P}_\equiv$ найдена. $\square$

Лемма 1.4. *Для любых $n \geqslant 0$ и $\ell \geqslant 1$ существует лишь конечное число попарно не эквивалентных модальных формул глубины $\leqslant n$ от переменных $\{p_1, \ldots, p_\ell\}$.*

Доказательство. Обозначим это число K_n^ℓ. Будем использовать очевидный факт: попарно неэквивалентных булевых комбинаций r каких-либо формул не превышает 2^{2^r}. База: $K_0^\ell = 2^{2^\ell}$.

Шаг: всякая формула глубины $n+1$ является булевой комбинацией переменных $p_1, \ldots, p_\ell$ и формул вида $\Box C$, где $d(C) \leqslant n$, то есть комбинацией $\leqslant (\ell + K_n^\ell)$ формул. Таких комбинаций $K_{n+1}^\ell \leqslant 2^{2^{\ell + K_n^\ell}}$. $\square$

Пример 1.5. Если число переменных не конечно, а счетно, то вторая половина доказательства не пройдет. Более того, станет неверна и сама теорема 1.1. Еще более конкретно, для некоторого $n \geqslant 0$ перестанет быть верной теорема 1.3. Очевидно, для $n = 0$ теоремы останутся в силе. Но уже для $n = 1$ они перестанут быть верными. Контрпример:

Модель $M = (W, R, V)$, где $W = \{a, \omega\} \cup \mathbb{N}$; отношение R иррефлексивно и соединяет точку a со всеми остальными точками (кроме самой себя); оценка: в точке a все переменные ложны, в точке ω все переменные истинны, и для любого $n \in \mathbb{N}$ полагаем $n \models p_i \Leftrightarrow i \leqslant n$.

Модель $M' = (W', R', V')$ — это модель M с выброшенной точкой ω.

Утверждение 1. *В игре* $\mathsf{Game}_1((M, a), (M', a))$ *выигрышная стратегия — у первого игрока* $\mathsf{P}_{\not\equiv}$.
Ему достаточно сходить в модели M из точки a в точку ω, и второй игрок $\mathsf{P}_{\equiv}$ не может найти в модели M' последователя точки a, атомарно эквивалентного точке ω модели M.

Утверждение 2. $(M, a) \equiv^1_{\mathsf{ML}} (M', a)$.
Действительно, всякая формула глубины 1 есть булева комбинация переменных (которыми две данные отмеченные модели неотличимы) и формул вида $\Box C$, где C — булева комбинация переменных. Значит, осталось убедиться, что для любой такой формулы C мы имеем: $M, a \models \Box C \Leftrightarrow M', a \models \Box C$. Импликация $\Rightarrow$ очевидна, ибо каждый последователь точки a в модели M' является последователем точки a и в модели M. Обратно, пусть $M', a \models \Box C$. В модели M' последователями точки a являются лишь натуральные числа $n \in \mathbb{N}$. Значит, в каждом $n \in \mathbb{N}$ истинна формула C. Пусть $\mathsf{Var}(C) \subseteq \{p_0, \ldots, p_m\}$. Тогда, в частности, имеем: $M', m \models C$. Но с точки зрения переменных $\{p_0, \ldots, p_m\}$ точка m не отличима от точки ω модели M; значит, m и ω дают одно и то же значение формуле C, а именно, $M, \omega \models C$. Таким образом, в модели M формула C истинна во всех последователях точки a. Значит, $M, a \models \Box C$.

1.2 Бесконечная бисимуляционная игра и бисимуляционная эквивалентность

Здесь не требуется ограничивать количество пропозициональных переменных (хотя ограничение ничему не помешает). Поэтому будем считать, что множество переменных счетно: $\mathsf{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$. Собственно, в этом разделе нам вообще не потребуются модальные формулы.

Даны две (не обязательно конечные) отмеченные модели Крипке (M, a) и (M', a').

Требуется выяснить, являются ли они *бисимуляционно эквивалентными*: $(M, a) \simeq (M', a')$ то есть существует ли бисимуляция между этими моделями, соединяющая точки a и a'.

Модифицируем игру $\mathsf{Game}((M, a), (M', a'))$ в игру $\mathsf{Game}_\omega((M, a), (M', a'))$:

– на этот раз игроков будем обозначать так: первый $\mathsf{P}_{\not\simeq}$, второй $\mathsf{P}_{\simeq}$;

– в самом начале игроку $\mathsf{P}_{\not\simeq}$ не требуется выбирать число $n \geqslant 0$;

– если игра успешно длится бесконечное время (ω раундов), то второй игрок $\mathsf{P}_{\simeq}$ выиграл.

Таким образом, второй игрок $\mathsf{P}_{\simeq}$ может выиграть в такой игре в двух случаях: либо в каком-то раунде первый игрок $\mathsf{P}_{\not\simeq}$ не может сделать ход ни в одной модели («попал в тупик»), либо второй игрок $\mathsf{P}_{\simeq}$ успешно даёт ответ на каждый из ω ходов первого игрока.

Теорема 1.6 (Игровая характеризация бисимуляционной эквивалентности)**.**
$(M, a) \simeq (M', a') \iff$ *второй игрок* $\mathsf{P}_{\simeq}$ *имеет выигрышную стратегию в игре* $\mathsf{Game}_\omega((M, a), (M', a'))$.

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть второй игрок $\mathsf{P}_{\simeq}$ имеет выигрышную стратегию в бесконечной игре $\mathsf{Game}_\omega((M, a), (M', a'))$. Покажем, что следующее отношение между точками моделей M и M' является бисимуляцией, соединяющей точки a и a': для любых[2] $c \in W$ и $c' \in W'$ положим

$$c\, Z\, c' \qquad \leftrightharpoons \qquad \text{второй игрок } \mathsf{P}_{\simeq} \text{ имеет выигрышную стратегию в игре } \mathsf{Game}_\omega((M, c), (M', c')).$$

То, что $a\, Z\, a'$, дано по условию теоремы. Проверим три условия из определения бисимуляции. Условие **(var)** выполнено, поскольку игрок $\mathsf{P}_{\simeq}$ может выигрывать лишь в случае, если стартовые позиции атомарно эквивалентны. Так как условия **(zig)** и **(zag)** симметричны, проверим лишь **(zig)**.

Пусть $c\, Z\, c'$ и $c\, R\, d$. Начнем игру с точек c и c'. Ввиду $c\, Z\, c'$ проверка на их атомарную эквивалентность проходит успешно. Пусть первый игрок $\mathsf{P}_{\not\simeq}$ делает ход в модели M из точки c в точку d. Поскольку у игрока $\mathsf{P}_{\simeq}$ есть выигрышная стратегия, он знает, куда ответить, чтобы гарантировать свою победу — пусть он сделает ход в модели M' из точки c' в точку d', причем $c' R' d'$. Поскольку этот ход гарантирует ему победу, то есть у игрока $\mathsf{P}_{\simeq}$ есть выигрышная стратегия в игре $\mathsf{Game}_\omega((M, d), (M', d'))$, то это и означает, что $d\, Z\, d'$, что и требовалось.

($\Longrightarrow$) Пусть $Z \subseteq W \times W'$ — бисимуляция между моделями M и M', соединяющая точки a и a'. Предъявим выигрышную стратегию для второго игрока $\mathsf{P}_{\simeq}$: *второй игрок должен поддерживать инвариант: «точки, на которых находятся фишки после каждого раунда, соединены отношением Z».* Если он сможет так играть, то очевидно, что после каждого раунда проверки $\equiv_{\mathsf{Var}}$ будут проходить успешно и игра будет длиться ω шагов, что и обеспечит победу второму игроку $\mathsf{P}_{\simeq}$.

Покажем, каким образом второй игрок должен делать ходы, чтобы поддерживать указанный инвариант. Индукция по числу сыгранных раундов. Перед началом игры инвариант выполнен: $a\, Z\, a'$. Пусть после нескольких раундов «фишки» стоят на точках $c \in W$ и $c' \in W'$, причем (по предположению индукции) $c\, Z\, c'$. Пусть первый игрок сделал ход из точки c в некоторую точку $d \in W$, причем $c\, R\, d$. По условию **(zig)**, которому удовлетворяет отношение Z, существует точка $d' \in W'$, такая что $c'\, R'\, d'$ и $d\, Z\, d'$. Значит, второй игрок имеет возможность сделать ход — а именно, из точки c' в точку d' — чтобы сохранить инвариант. $\square$

Вернемся к задаче с двумя моделями, для которых требовалось доказать, что между ними нет бисимуляции, но они модально эквивалентны. В качестве применения данной теоремы предъявим выигрышную стратегию для первого игрока $\mathsf{P}_{\not\simeq}$ в бесконечной бисимуляционной игре, откуда и будет следовать отсутствие бисимуляции. Первому игроку достаточно сделать первый ход в модели с бесконечной цепью на эту самую цепь. Второму игроку придется сделать ответный ход на какую-то конечную цепь. Но тогда первый игрок сможет делать ходы неограниченно долго — чем и приведет второго игрока в тупик и таким образом выиграет игру.

[2] Достаточно это делать лишь для c, достижимых за конечное число R-шагов из точки a, то есть для $c \in R^+(a)$, где R^+ — транзитивное замыкание отношения R.

Вспомним, что для модально насыщенных моделей бисимуляция и модальная эквивалентность всегда совпадают. В обсуждаемой нами задаче этого совпадения нет. Значит, какая-то из этих моделей (быть может, обе) не является модально насыщенной. Вопрос: какая?

Полезное наблюдение. Под *модальной теорией* точки a модели M (в некотором языке $\mathcal{L}$) понимается множество формул языка $\mathcal{L}$, истинных в этой точке:

$$\mathsf{Theory}_{\mathcal{L}}(M, a) := \{A \in \mathcal{L} \mid M, a \models A\}.$$

Лемма 1.7 (О модальной теории точки)**.** *Пусть модальный язык $\mathcal{L}$ замкнут относительно отрицания. Если модальная теория (в языке $\mathcal{L}$) одной точки (в одной модели) истинна в некоторой другой точке (быть может другой модели), то эти точки модально неотличимы формулами языка $\mathcal{L}$:*

$$\textit{если} \;\; M', a' \models \mathsf{Theory}_{\mathcal{L}}(M, a), \quad \textit{то} \;\; (M, a) \equiv_{\mathcal{L}} (M', a').$$

Доказательство. Возьмем любую формулу $A \in \mathcal{L}$. Очевидно, если $M, a \models A$, то $M', a' \models A$. Обратно, если $M, a \not\models A$, то $M, a \models \neg A$, но поскольку $(\neg A) \in \mathcal{L}$, то $M', a' \models \neg A$, и значит, $M', a' \not\models A$. $\square$

2 Инфинитарные модальные языки

Преамбула. Из бисимуляционной эквивалентности двух отмеченных моделей следует их модальная эквивалентность, но не наоборот. Насколько нужно обогатить модальный язык, чтобы обратная импликация стала верна? Ответ: нужен инфинитарный модальный язык. Но какой мощности конъюнкций будет достаточно?

Синтаксис обычного модального языка ML можно переформулировать следующим образом:
– всякая переменная $p \in \mathsf{Var}$ является формулой;
– если A — формула, то $\neg A$ и $\Box A$ — формулы;
– если $\Phi \subset \mathsf{ML}$ — конечное множество формул, то $\bigwedge\Phi$ — формула.

Остальные связки легко выражаются; например, импликация: $(A \to B) := \neg\bigwedge\{A, \neg B\}$.

Теперь легко догадаться о естественном обобщении модальных формул.

2.1 Инфинитарный модальный язык ML_∞

Что будет, если допустить произвольные конъюнкции модальных формул? Множество переменных по-прежнему счетно: $\mathsf{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$. Определим *бесконечный модальный язык* ML_∞: в определении формул этого языка пункт, касающийся конъюнкции, будет выглядеть следующим образом:
– если $\Phi \subseteq \mathsf{ML}_\infty$ — произвольное *множество*[3] формул, то $\bigwedge\Phi$ — формула.

Очевидно, формулы даже такого выразительного языка инвариантны относительно бисимуляции:

$$(M, a) \simeq (M', a') \quad\Longrightarrow\quad (M, a) \equiv_{\mathsf{ML}_\infty} (M', a').$$

Теорема 2.1. *Неотличимость отмеченных моделей формулами инфинитарного модального языка* ML_∞ *совпадает с бисимуляционной эквивалентностью:*

$$(M, a) \simeq (M', a') \quad\Longleftrightarrow\quad (M, a) \equiv_{\mathsf{ML}_\infty} (M', a').$$

Сначала приведем не совсем корректное доказательство.

Доказательство. Как обычно, мы докажем, что отношение $\equiv_{\mathsf{ML}_\infty}$ является бисимуляцией, и как всегда, нам достаточно проверить лишь условие **(zig)**. Пусть $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}_\infty} (M', a')$ и $a\,R\,b$. Рассмотрим модальную теорию точки b, то есть множество формул $\Gamma = \{A \in \mathsf{ML}_\infty \mid M, b \models A\}$. Тогда $M, b \models \bigwedge\Gamma$, $M, a \models \Diamond\bigwedge\Gamma$, откуда (ввиду $a \equiv_{\mathsf{ML}_\infty} a'$) получаем $M', a' \models \Diamond\bigwedge\Gamma$. Следовательно, формула $\bigwedge\Gamma$, а значит, и множество Γ, истинно в некоторой точке b' такой, что $a'R'b'$. Но поскольку Γ — теория точки, то по лемме 1.7 получаем требуемое: $(M, b) \equiv_{\mathsf{ML}_\infty} (M', b')$. $\Box$

Внимательный читатель должен был заметить, что на самом деле Γ не будет множеством: если бы Γ было множеством, то формула $\bigwedge\Gamma$ тоже была бы истинна в (M, b), тем самым мы получили бы $\bigwedge\Gamma \in \Gamma$, что противоречит аксиоме фундированности из теории множеств. Вообще, модальная теория точки всегда содержит «ровно половину» формул рассматриваемого языка: $\Gamma \cup \neg\Gamma = \mathsf{ML}_\infty$, поэтому если бы Γ было множеством, то и ML_∞ тоже было бы множеством. Приведем корректное рассуждение.

Доказательство. Как обычно, мы докажем, что отношение $\equiv_{\mathsf{ML}_\infty}$ является бисимуляцией, и как всегда, нам достаточно проверить лишь условие **(zig)**. Пусть $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}_\infty} (M', a')$ и $a\,R\,b$. Надо доказать существование точки $b' \in R'(a')$, такой что $(M, b) \equiv_{\mathsf{ML}_\infty} (M', b')$. Допустим, ее не существует. Это значит, что для каждой точки $c \in R'(a')$ найдется формула $A_c \in \mathsf{ML}_\infty$, такая что $M, b \models A_c$, но $M', c \not\models A_c$.

Совокупность $\Gamma := \{A_c \mid c \in R'(a')\} \subseteq \mathsf{ML}_\infty$ является *множеством*.[4] Поэтому $\bigwedge\Gamma \in \mathsf{ML}_\infty$. Тогда $M, a \models \Diamond\bigwedge\Gamma$, но $M', a' \not\models \Diamond\bigwedge\Gamma$, поскольку ни в каком последователе c точки a' не будет истинно Γ, ибо $M', c \not\models A_c$. Это противоречит неотличимости точек a и a' формулами языка ML_∞. $\Box$

[3]Ключевое слово здесь — «множество», ибо формул в таком языке становится настолько много, что их совокупность перестает быть множеством; в частности, конъюнкция всех формул языка ML_∞ формулой не является, иначе бы мы получили $\bigwedge\mathsf{ML}_\infty \in \mathsf{ML}_\infty$, что противоречит аксиоме фундированности из теории множеств. Другой аргумент: если бы ML_∞ было множеством, скажем, мощности κ, то ML_∞ содержало бы формулы $\bigwedge\Gamma$ для каждого подмножества $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\infty$, а таких формул уже 2^κ. Тем самым получилось бы $2^\kappa \leqslant \kappa$, что противоречит теореме Кантора.

[4]Ибо Γ есть образ *множества* $R'(a')$ относительно *функции* $c \mapsto A_c$.

2.2 Ограниченно-инфинитарные модальные языки ML_κ

Фиксируем бесконечный кардинал[5] κ. Определим множество *κ-инфинитарных модальных формул* ML_κ, изменив последний пункт определения модальных формул:

$$\text{если } \Phi \subseteq \mathsf{ML}_\kappa \text{ — множество формул мощности } |\Phi| < \kappa, \text{ то } \bigwedge\Phi \text{ — формула.}$$

Обычный модальный язык есть $\mathsf{ML} = \mathsf{ML}_\omega$. Язык, допускающий конъюнкции по множествам формул Φ мощности $|\Phi| \leqslant \kappa$, обозначим $\mathsf{ML}_{\leqslant\kappa}$. Очевидно, $\mathsf{ML}_{\leqslant\kappa} = \mathsf{ML}_{\kappa^+}$, где κ^+ есть наименьший кардинал, превышающий κ (он существует). Обратно, $\mathsf{ML}_\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} \mathsf{ML}_{\leqslant\lambda}$. Для симметричности обозначений язык ML_κ можно было бы обозначать как $\mathsf{ML}_{<\kappa}$.

Упражнение 2.2. Вспомним, что $\omega = |\mathsf{ML}_\omega|$. Докажите, что $\mathfrak{c} \leqslant |\mathsf{ML}_{\omega_1}|$, где $\mathfrak{c}$ — мощность континуума, ω_1 — первый несчетный кардинал.[6] То есть, разрешив лишь счетные конъюнкции, мы сразу получим не менее континуума формул. (*) Верно ли: $|\mathsf{ML}_{\omega_1}| = \mathfrak{c}$? (Положительный ответ будет дан в разделе 2.2.1).

Задача 2.3 (*)**.** Верно ли: $\kappa \leqslant |\mathsf{ML}_\kappa|$? $|\mathsf{ML}_\kappa| \leqslant \kappa$? (где $\kappa > \mathfrak{c}$) Аналогично, сравнить $|\mathsf{ML}_{\leqslant\kappa}|$ и 2^κ.

2.2.1 Мощность ограниченно-инфинитарных языков

Будем считать, что κ — *регулярный* кардинал; это означает, что никакая последовательность мощности $< \kappa$ ординалов $\lambda_i < \kappa$ не сходится к ординалу κ:

$$\text{если } \ \sigma < \kappa \ \text{ и } \ \forall i < \sigma \ \lambda_i < \kappa, \ \text{ то } \ \sup\{\lambda_i \mid i < \sigma\} < \kappa.$$

Например, ω — регулярный кардинал (конечная последовательность конечных ординалов, то есть натуральных чисел, не сходится к ω); $\omega_1 = \aleph_1$ — регулярный кардинал (счетная последовательность счетных ординалов в пределе, то есть в объединении, даст снова счетный ординал).

Чтобы найти мощность множества формул ML_κ (и вообще, выяснить, что это — множество), будем строить инфинитарные формулы языка ML_κ поэтапно: на очередном этапе навешиваем отрицание и бокс на всевозможные формулы предыдущего этапа, а также конъюнкции всевозможных множеств мощности $< \kappa$ формул предыдущего этапа:[7]

$$\begin{array}{lcl} F_0 & = & \mathsf{Var}; \\ F_{\lambda+1} & = & F_\lambda \cup \{\neg A, \Box A \mid A \in F_\lambda\} \cup \{\bigwedge\Phi \mid \Phi \subseteq F_\lambda, |\Phi| < \kappa\}; \\ F_\lambda & = & \bigcup_{\alpha<\lambda} F_\alpha, \text{ если } \lambda \text{ — предельный.} \end{array}$$

На каком этапе построение «стабилизируется», то есть новые формулы перестанут появляться? Оказывается, например, что разрешив лишь счетные конъюнкции, то есть рассмотрев язык ML_{ω_1}, нам потребуется несчетное число, а именно, ω_1 этапов! Ясно, что раньше этого стабилизация не произойдет: если λ — счетный ординал, то можно легко построить формулу языка ML_{ω_1}, не попадающую в F_λ; достаточно взять с каждого этапа $\alpha \leqslant \lambda$ по одной «новой» формуле A_α (то есть не встречавшейся на предыдущем этапе) и построить счетную конъюнкцию $\bigwedge_{\alpha\leqslant\lambda} A_\alpha$; очевидно, что она не в F_λ.

В общем случае, получаем следующий ответ.

Лемма 2.4. $\mathsf{ML}_\kappa \subseteq F_\kappa$. *Здесь κ — регулярный кардинал.*

Доказательство. Докажем, что множество формул F_κ замкнуто относительно $\neg$, $\Box$, $\bigwedge$.

Если $A \in F_\kappa$, то, поскольку κ — предельный ординал (ибо он кардинал), $\exists\lambda < \kappa$: $A \in F_\lambda$. Но тогда $\neg A, \Box A \in F_{\lambda+1} \subseteq F_\kappa$, поскольку $\lambda + 1 < \kappa$, ибо κ — предельный ординал.

Пусть $\Phi \subseteq F_\kappa$ и $|\Phi| = \sigma < \kappa$. Для каждой формулы $A_i \in \Phi$, где $i < \sigma$, существует $\lambda_i < \kappa$, такое что $A_i \in F_{\lambda_i}$. Обозначим ординал $\lambda := \sup\{\lambda_i \mid i < \sigma\}$. Ввиду регулярности кардинала κ имеем $\lambda < \kappa$. Значит $\Phi \subseteq F_\lambda$ и тем самым $\bigwedge\Phi \in F_{\lambda+1} \subseteq F_\kappa$. $\square$

[5] То есть мощность некоторого бесконечного множества.

[6] Очевидно, что $\omega_1 \leqslant \mathfrak{c}$; верно ли равенство — не известно, это континуум-гипотеза, она не зависит от теории множеств.

[7] Этапы будут нумероваться ординалами λ, а само построение будет, конечно же, происходить *трансфинитной рекурсией* по ординалам, в которой, напомним, есть база, есть шаг, отвечающий непредельному ординалу, то есть ординалу вида $\lambda + 1$, и есть шаг, отвечающий предельному ординалу, то есть ординалу, не имеющему наибольшего элемента.

Следствие 2.5. *Пусть κ — (бесконечный) регулярный кардинал. Тогда $|\mathsf{ML}_\kappa| \leqslant \kappa$.*
Для $\kappa = \omega_1$ получаем точное равенство: $|\mathsf{ML}_{\omega_1}| = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Пусть $\kappa = \omega_1$. На этапе F_1 мы уже имеем континуум формул $\bigwedge\Phi$, где $\Phi \subseteq \mathsf{Var}$. Итак, $|F_1| = \mathfrak{c}$. На очередном непредельном этапе $F_{\lambda+1}$ добавляется количество формул, соответствующее множеству всех счетных подмножеств континуума, то есть континуум (простая задача). На предельном этапе берется счетное объединение множеств мощности континуум. Очевидно, что в результате получается $|F_\lambda| = \mathfrak{c}$ для каждого счетного ординала λ. Таким образом, F_{ω_1} есть объединение ω_1 множеств мощности континуум: $|F_{\omega_1}| \leqslant \omega_1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

В общем случае, нужно использовать два факта. 1) Если взять все подмножества множества мощности κ, каждое из которых имеет мощность $< \kappa$, то в результате получим множество мощности κ; для этого для каждого кардинала $\sigma < \kappa$ надо убедиться, что $|\{X \subseteq \kappa \colon |X| = \sigma\}| = \kappa$, то есть $\kappa^\sigma = \kappa$. Для этого достаточно проверить, что $\kappa^\lambda = \kappa$ для каждой мощности $\lambda < \kappa$. 2) Объединение κ множеств мощности $\leqslant\kappa$ имеет мощность $\leqslant \kappa \cdot \kappa = \kappa$ (последнее равенство верно для любого бесконечного кардинала, оно использует аксиому выбора). □

2.2.2 Обобщение модально насыщенных моделей

Очевидно, бисимуляция $\simeq$ по-прежнему влечет неотличимость модальными формулами из ML_κ:

$$(M, a) \simeq (M', a') \qquad \Longrightarrow \qquad (M, a) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M', a').$$

Кроме того, новая модальная эквивалентность $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$, конечно же, сильнее обычной $\equiv_{\mathsf{ML}}$ (и чем больше кардинал κ, тем сильнее), то есть она приближается к бисимуляции $\simeq$. Картина такова: если $\kappa < \kappa'$ — любые два кардинала, то имеем импликации:

$$\boxed{\simeq \quad \Longleftrightarrow \quad \equiv_{\mathsf{ML}_\infty} \quad \Longrightarrow \quad \equiv_{\mathsf{ML}_{\kappa'}} \quad \Longrightarrow \quad \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} \quad \Longrightarrow \quad \equiv_{\mathsf{ML}_\omega} \quad \Longleftrightarrow \quad \equiv_{\mathsf{ML}}}$$

Приведем класс моделей, на которых модальная эквивалентность ML_κ равносильна бисимуляции.

Множество формул Γ *выполнимо в множестве точек* $X \subseteq W$ модели M, если $\exists a \in X \colon M, a \models \Gamma$.

Определение 2.6. Модель Крипке $M = (W, R, V)$ назовем *κ-модально насыщенной*, если для каждой ее точки $a \in W$ и всякого множества модальных формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ имеет место следующая импликация:

если каждое подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в множестве точек $R(a)$,
то всё множество Γ выполнимо в множестве точек $R(a)$.

Теорема 2.7. *На κ-модально насыщенных моделях бисимуляция совпадает с отношением $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$.*
Более точно, пусть M и M' — κ-модально насыщенные модели, $a \in M$ и $a' \in M'$. Тогда:

$$(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M', a') \qquad \Longleftrightarrow \qquad (M, a) \simeq (M', a')$$

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Очевидно. ($\Longrightarrow$) Почти дословно повторяем рассуждение про обычные модально насыщенные модели. Покажем, что отношение $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$ является бисимуляцией между M и M', соединяющей точки a и a'. Уже дано: $a \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} a'$. Осталось показать, что $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$ является бисимуляцией. Условие **(var)** очевидно. Проверяем лишь условие **(zig)**, ибо **(zag)** проверяется аналогично.

Пусть $(M, c) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M', c')$ и $c\,R\,d$. Рассмотрим модальную теорию точки d в κ-инфинитарном модальном языке: $\Gamma = \{A \in \mathsf{ML}_\kappa \mid M, d \models A\}$. Для каждого подмножества $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ имеем: $\bigwedge\Delta \in \mathsf{ML}_\kappa$, кроме того $M, d \models \bigwedge\Delta$, значит $M, c \models \Diamond\bigwedge\Delta$. Поскольку $(M, c) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M', c')$, мы имеем $M', c' \models \Diamond\bigwedge\Delta$, то есть формула $\bigwedge\Delta$ истина в некотором последователе точки c'.

Итак, всякое множество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в множестве точек $R'(c')$. Модель M' является κ-модально насыщенной. Поэтому всё Γ выполнимо в множестве точек $R'(c')$. Это значит, что $\exists d' \colon c'\,R'\,d'$ и $M', d' \models \Gamma$. Поскольку Γ является *теорией точки* d, получаем $(M, d) \equiv_{\mathsf{ML}_\kappa} (M', d')$. □

Задача 2.8. Запишите условие κ-модальной насыщенности инфинитарной формулой (какого языка?).

Естественное желание — выяснить, как связаны классы κ-насыщенных моделей при разных κ. Чтобы подойти к этому вопросу, дадим более тонкое определение. В приведенном выше обобщении насыщенных моделей можно выделить не один, а два параметра-кардинала: мощность конъюнкций (то есть выбор языка ML_κ) и ограничение на мощность множеств Δ.

Определение 2.9. Модель Крипке $M = (W, R, V)$ назовем (κ, λ)-*модально насыщенной* (кратко: (κ, λ)-м.н.), где[8] $\omega \leqslant \lambda \leqslant \kappa$, если для каждой ее точки $a \in W$ и всякого множества модальных формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ имеет место следующая импликация:

если каждое подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \lambda$ выполнимо в множестве точек $R(a)$, то всё множество Γ выполнимо в множестве точек $R(a)$.

Модель M называется κ-*модально насыщенной*, если она (κ, κ)-модально насыщенна.

Очевидно, что данное понятие антимонотонно по κ и монотонно по λ:

$$\begin{array}{lclclr} \kappa < \kappa' & \Longrightarrow & [\ (\kappa', \lambda)\text{-м.н.} & \Longrightarrow & (\kappa, \lambda)\text{-м.н.}\ ] & \text{(антимонотонность)} \\ \lambda < \lambda' & \Longrightarrow & [\ (\kappa, \lambda)\text{-м.н.} & \Longrightarrow & (\kappa, \lambda')\text{-м.н.}\ ] & \text{(монотонность)} \end{array}$$

В частности, при $\lambda \leqslant \kappa$ мы имеем:

$$\begin{array}{lcl} (\kappa, \lambda)\text{-модальная насыщенность} & \Longrightarrow & \lambda\text{-модальная насыщенность,} \\ (\kappa, \lambda)\text{-модальная насыщенность} & \Longrightarrow & \kappa\text{-модальная насыщенность.} \end{array}$$

Поэтому не ясно, будет ли «диагонализация» этого понятия (анти)монотонной.

2.2.3 Модели с ветвлением менее κ

На лекции была доказана следующая теорема, принимая **гипотезу:** $|\mathsf{ML}_\kappa| \leqslant \kappa$.

Теорема 2.10. *Всякая модель с конечным ветвлением является κ-модально насыщенной.*

Доказательство. Берем любую точку $a \in M$ и любое бесконечное множество формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ (для конечных нечего доказывать). По гипотезе: $|\Gamma| \leqslant \kappa$. Обозначим кардинал[9] $\gamma := |\Gamma|$, то есть мощность множества Γ. Предположим, каждое подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в множестве точек $R(a)$. Последнее множество конечно; пусть $R(a) = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $n \geqslant 1$.

Вполне упорядочим множество Γ по типу γ: $\Gamma = \{A_\lambda \mid \lambda < \gamma\}$. Рассмотрим начальные отрезки этого множества: $\Delta_\lambda = \{A_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, для каждого ординала $\lambda < \gamma$. Исходное множество Γ равно объединению этих начальных отрезков: $\Gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} \Delta_\lambda$, поскольку γ — предельный ординал. Кроме того, их мощность $|\Delta_\lambda| = |\lambda| < \gamma \leqslant \kappa$; таким образом, $|\Delta_\lambda| < \kappa$, для каждого ординала $\lambda < \gamma$.

Значит, для каждого ординала $\lambda < \gamma$ множество формул Δ_λ выполнимо в некоторой из точек b_i, то есть $\forall \lambda < \gamma\ \exists i \leqslant n$: $M, b_i \models \Delta_\lambda$. Следовательно, существует функция $I\colon \gamma \to \{1, \ldots, n\}$, дающая по каждому ординалу $\lambda < \gamma$ тот номер $I(\lambda)$, для которого $M, b_{I(\lambda)} \models \Delta_\lambda$. Иначе говоря, мы имеем дело с γ-последовательностью I чисел из множества $\{1, \ldots, n\}$.

Утверждение 1. Существует число $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, которое в γ-последовательности I встречается сколь угодно далеко:

$$\exists i_0 \leqslant n\ \forall \lambda < \gamma\ \exists \lambda'\colon \lambda < \lambda' < \gamma \text{ и } I(\lambda') = i_0.$$

Действительно, допустим такого i_0 не существует. Тогда число 1 не встречается, начиная с некоторого λ_1, ..., число n не встречается, начиная с некоторого λ_n. Но тогда все числа $\{1, \ldots, n\}$ не встречаются, начиная с максимального из этих ординалов $\lambda_0 := \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, чего не может быть, ибо $\lambda_0 < \gamma$ и γ — предельный ординал, то есть после λ_0 есть ещё члены последовательности.

Утверждение 2. Число i_0 — искомое, то есть $M, b_{i_0} \models \Gamma$.

Действительно, возьмем произвольную формулу $A_\lambda \in \Gamma$, $\lambda < \gamma$. По выбору i_0 найдется ординал λ' такой, что $\lambda < \lambda' < \gamma$ и $I(\lambda') = i_0$. Последнее означает, что $M, b_{i_0} \models \Delta_{\lambda'}$. Но поскольку $\lambda < \lambda'$, мы заключаем, что $A_\lambda \in \Delta_{\lambda'}$, и поэтому $M, b_{i_0} \models A_\lambda$, что и требовалось. $\square$

На самом деле, можно аналогично доказать следующий результат.

---

[8] Поскольку мы не знаем, верно ли равенство $\kappa = |\mathsf{ML}_\kappa|$, более естественно (хотя и менее наглядно) давать это определение, ограничивая λ сверху не кардиналом κ, а кардиналом $|\mathsf{ML}_\kappa|$.

[9] Напомним терминологию из теории множеств. Кардинал γ — это наименьший из ординалов, равномощный с γ. Значит, любой ординал $\lambda < \gamma$ имеет мощность, меньше чем γ, то есть $|\lambda| < \gamma$. Кроме того, всякий бесконечный кардинал является предельным ординалом, иначе мы отнимем от него единицу и получим меньший ординал той же мощности.

Теорема 2.11. *Пусть κ — (бесконечный) регулярный кардинал. Всякая модель с ветвлением менее κ является κ-модально насыщенной.*

Доказательство. Берем любую точку $a \in M$ и любое множество формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}_\kappa$ мощности[10] $|\Gamma| = \kappa$. Предположим, каждое подмножество $\Delta \subset \Gamma$ мощности $|\Delta| < \kappa$ выполнимо в множестве точек $R(a)$, мощность которого по условию $\sigma := |R(a)| < \kappa$. Требуется доказать, что всё Γ выполнимо в $R(a)$.

Занумеруем формулы множества Γ ординалами $< \kappa$, то есть $\Gamma = \{A_\lambda \mid \lambda < \kappa\}$. Рассмотрим начальные отрезки: $\Delta_\lambda = \{A_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, для каждого ординала $\lambda < \kappa$. Множество Γ равно объединению начальных отрезков: $\Gamma = \bigcup_{\lambda<\kappa} \Delta_\lambda$. Мощность каждого: $|\Delta_\lambda| = |\lambda| < \kappa$, для каждого ординала $\lambda < \gamma$.

Значит, для каждого ординала $\lambda < \kappa$ множество формул Δ_λ выполнимо в некоторой точке из $R(a)$:

$$\forall \lambda < \kappa \ \ \exists b_\lambda \in R(a) \colon \quad M, b_\lambda \models \Delta_\lambda.$$

Итак, имеем функцию $I \colon \kappa \to R(a)$, дающую по каждому ординалу $\lambda < \kappa$ ту точку $I(\lambda) \in R(a)$, для которой $M, I(\lambda) \models \Delta_\lambda$. Иначе говоря, мы имеем дело с κ-последовательностью I точек из $R(a)$.

Утверждение 1. В последовательности I некоторая точка $b \in R(a)$ встречается сколь угодно далеко:

$$\exists b \in R(a) \ \forall \lambda < \gamma \ \exists \lambda' \colon \lambda < \lambda' < \gamma \text{ и } I(\lambda') = b.$$

$\triangleright$ Допустим противное: $\forall b \in J := R(a) \ \exists \lambda_b < \kappa \ \forall \lambda' \ \big(\lambda_b < \lambda' < \kappa \Rightarrow I(\lambda') \neq b\big)$.

Рассмотрим $\lambda := \sup\{\lambda_b \mid b \in J\}$. Поскольку κ — регулярный кардинал, то $\lambda < \kappa$. Но тогда после λ в последовательности I не встречается ни одна из точек b: $\forall b \in J \ \forall \lambda'$ такого, что $\lambda < \lambda' < \kappa$, имеем $\lambda_b < \lambda' < \kappa$, а значит $I(\lambda') \neq b$; то есть $I(\lambda') \notin J$. Однако этого не может быть, ведь $I(\lambda + 1) \in J$. $\triangleleft$

Утверждение 2. Точка b — искомая, то есть $M, b \models \Gamma$.

Действительно, возьмем произвольную формулу $A_\lambda \in \Gamma$, $\lambda < \kappa$. По выбору b найдется ординал λ' такой, что $\lambda < \lambda' < \gamma$ и $I(\lambda') = b$. Последнее означает, что $M, b \models \Delta_{\lambda'}$. Но $A_\lambda \in \Delta_{\lambda'}$, поскольку $\lambda < \lambda'$. Поэтому $M, b \models A_\lambda$, что и требовалось. $\square$

[10] А что если $|\mathsf{ML}_\kappa| < \kappa$? Ведь равенство мы не доказали... Тогда все модели будут κ-модально насыщенными.

3 Полнота модальных логик

Историческая справка. Первые, довольно сложные примеры неполных по Крипке нормальных модальных логик были предъявлены в 1974 году Fine[11] и Thomason[12]. Простой пример неполной логики предложил в 1978 году van Benthem[13]. В 2002 году Benton[14] еще более упростил его пример, удалив одну из аксиом, в итоге получилась следующая неполная по Крипке логика:

$$L \ := \ \mathbf{K} \ + \ \Box p \to p \ + \ \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \ + \ \Box(p \to \Box p) \to (\Diamond p \to p).$$

Класс шкал этой логики $\mathsf{Frames}(L)$ — это класс шкал, в которых отношение достижимости есть равенство: $\forall x, y\,(xRy \ \leftrightarrow \ x = y)$. На этом классе (фактически, на одноэлементных рефлексивных шкалах) общезначима также формула $\Box p \leftrightarrow p$, а значит, и логика **Triv**; но в логике L данная формула не выводится (значит, $L \subsetneq \mathbf{Triv}$). Этот пример оптимален в смысле модальной глубины аксиом ввиду следующего результата:

Теорема (Lewis,[15] 1974). *Если модальная глубина формулы A равна 1, то логика $\mathbf{K} + A$ полна.*

Неполноту следующей логики установил в 1980 году Roberto Magari:[16]

$$\mathbf{KH} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \Box p.$$

Эта логика близка к логике доказуемости Гёделя–Лёба $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Имеет место строгое включение: $\mathbf{KH} \subsetneq \mathbf{GL}$ (более конкретно, в **KH** недоказуема формула транзитивности $\Box p \to \Box\Box p$, доказуемая в **GL**). Однако обе логики общезначимы на одних и тех же шкалах: $\mathsf{Frames}(\mathbf{KH}) = \mathsf{Frames}(\mathbf{GL})$, а именно, на транзитивных шкалах без бесконечно возрастающих цепей. Название логики **KH** происходит из вопроса, который задал Леон Хенкин и на который ответил Лёб: «В теореме Гёделя о неполноте было построено арифметическое предложение, доказуемо эквивалентное своей недоказуемости в арифметике. Что если взять предложение, доказуемо эквивалентное своей доказуемости — будет ли оно доказуемым (и истинным), или недоказуемым (и тем самым ложным)?» Как показал Лёб, будет верна первая из альтернатив, причем для этого достаточно даже не $\Box(\Box p \leftrightarrow p)$, а более слабого условия $\Box(\Box p \to p)$.

Пример неполной по Крипке, но разрешимой логики предложил в 1984 году Max Cresswell.[17] Конечно же, разрешимость данной логики нельзя доказать, установив ее f.m.p., иначе она оказалась бы полна относительно класса своих конечных шкал; ее разрешимость доказана с использованием теоремы Рабина о разрешимости монадической теории второго порядка бесконечного бинарного дерева.

Имеется континуум нормальных модальных логик. Среди них континуум полных и континуум неполных.

Упражнение. Пусть имеется строгое включение между двумя логиками $L \subsetneq L'$, но при этом у них одни и те же шкалы: $\mathsf{Frames}(L) = \mathsf{Frames}(L')$. Докажите, что тогда логика L не полна.

3.1 Каноническая модель

Основное содержание лекции см. в конспектах лекций 2014–2015 и 2015–2016 гг.

---

[11] K. Fine. “An incomplete logic containing **S4**”. *Theoria*, 1974, vol. 40, pp. 23–29.

[12] S. K. Thomason. “An incompleteness theorem in modal logic”. *Theoria*, 1974, vol. 40, pp. 30–34.

[13] J. F. A. K. van Benthem. “Two simple incomplete modal logics”. *Theoria*, 1978, vol. 44, issue 1, pp. 25–37.

[14] Roy A. Benton. “A simple incomplete extension of **T** which is the union of two complete modal logics with f.m.p.”, *Journal of Philosophical Logic*, 2002, vol. 31, issue 6, pp. 527–541.

[15] D. Lewis. “Intensional logics without iterative axioms”, *Journal of Philosophical Logic*, 1974, vol. 3, pp. 457–466.

[16] Доказательство см. в главе 11 книги: G. Boolos. *The Logic of Provability*, CUP, 1993.

[17] M. J. Cresswell. “An incomplete decidable modal logic”. *The Journal of Symbolic Logic*, 1984, vol. 49, No. 2, pp. 520–527.

3.2 Конечные канонические модели

Каноническая модель для всякой непротиворечивой логики строилась единообразно, в том смысле, что определение множества точем этой модели, отношения достижимости в нем и оценки переменных было одно и то же для всех логик. Конечные же канонические модели[18] строятся для каждой логики своим индивидуальным способом, и сама конструкция применима лишь к узкому (но довольно важному) классу логик. Дело в том, что данная конструкция позволяет доказать, помимо собственно полноты, еще и полноту относительно класса конечных шкал данной логики. Приведем связанную с этим теорему (доказательство см. в лекциях 2014–2015 года, теорема 9.6).

Теорема 3.1 (Харроп)**.** *Конечно аксиоматизируемая финитно аппроксимируемая логика разрешима.*

3.2.1 Конечные максимальные непротиворечивые множества

Прежде чем указать, для каких именно логик мы построим конечную каноническую модель и докажем соответствующую теорему, мы опишем общую часть конструкции. Ниже многие понятия являются конечными аналогами понятий, введенных в лекции про каноническую модель, а доказательства — либо прежние, либо становятся тривиальными.

Пусть L — непротиворечивая модальная логика, Γ — непустое *конечное* множество формул, замкнутое относительно взятия подформул: $\mathsf{Sub}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Положим

$$\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma, \text{ где } \neg\Gamma = \{\neg A \mid A \in \Gamma\}.$$

Введем «экономное» отрицание: $\sim A := \begin{cases} B, & \text{если } A = \neg B \text{ для некоторой формулы } B, \\ \neg A, & \text{иначе.} \end{cases}$

Очевидно: $L \vdash \neg A \leftrightarrow \sim A$. Имеем: множество Γ' замкнуто относительно экономного отрицания.

Множество формул $x \subseteq \Gamma'$ назовем *L-непротиворечивым* (или кратко *непротиворечивым*), если в L не доказуемо отрицание конъюнкции всех формул из x, то есть $L \nvdash \neg\bigwedge x$.

Лемма 3.2 (О пополнении)**.** *Если $X \subseteq \Gamma'$ — L-непротиворечивое множество, $A \in \Gamma$ — произвольная формула, то $X \cup \{A\}$ непротиворечиво или $X \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.*

Множество формул $x \subseteq \Gamma'$ назовем *максимальным L-непротиворечивым* (МНМ), если (дадим, как всегда, два эквивалентных определения; доказательство эквивалентности прежнее):
– если оно является максимальным (по $\subseteq$) среди непротиворечивых подмножеств Γ';
– для каждой формулы $A \in \Gamma$ имеем $A \in x$ или $\neg A \in x$.

Лемма 3.3 (Лемма Линденбаума)**.** *Всякое L-непротиворечивое множество $X \subseteq \Gamma'$ содержится в некотором максимальном L-непротиворечивом.*

Лемма Линденбаума в нашем (конечном) случае тривиальна, так как в конечном частично упорядоченном множестве, очевидно, над любым элементом всегда есть максимальный.

Лемма 3.4 (О конечных МНМ)**.** *Пусть $x \subseteq \Gamma'$ — любое МНМ.*

1. *Пусть $A, B \in \Gamma'$ и $L \vdash A \to B$. Тогда если $A \in x$, то $B \in x$.*
2. *Пусть $A \in \Gamma$. Тогда: $\neg A \in x \iff A \notin x$.*
3. *Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \wedge B) \in x \iff A \in x$ и $B \in x$.*
4. *Пусть $(A \vee B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \vee B) \in x \iff A \in x$ или $B \in x$.*
5. *Пусть $(A \to B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \to B) \in x \iff (A \in x \Rightarrow B \in x)$.*
6. *Пусть $A_1, \ldots, A_n \in x$ и $L \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, где $B \in \Gamma'$. Тогда $B \in x$.*

Доказательство. Доказательства прежние. Новым является лишь последний пункт; докажем его.

Если бы $B \notin x$, то $\sim B \in x$. Но $L \vdash \neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B)$, откуда $L \vdash \neg\bigwedge x$. □

[18] Данное название не является устоявшимся; обычно этим моделям никакого специального названия не дают.

3.2.2 Конечная каноническая модель (ККМ)

Для нескольких логик L, которые мы перечислим ниже, будет доказана следующая теорема. Мы приведем общую часть доказательства, а недостающую деталь будем строить позже для каждой логики.

Теорема 3.5 (Полнота и финитная аппроксимируемость)**.**
Для произвольной формулы A следующие условия эквивалентны:[19]

(a) $L \vdash A$;
(b) $L \models A$;
(c) $L \models_{\mathsf{fin}} A$.

Доказательство. Импликация $(a) \Rightarrow (b)$ есть теорема о корректности (в каждой шкале, в которой общезначимы все аксиомы логики, общезначимы также и все ее теоремы); она справедлива для любой логики. Импликация $(b) \Rightarrow (c)$ тривиальна. Остается доказать импликацию $(c) \Rightarrow (a)$.

Рассуждаем от противного. Допустим $L \nvdash A_0$. Возьмем $\Gamma := \mathsf{Sub}(A_0)$. Строим Γ' как описано выше.

Конечная каноническая шкала $F^\star_{\mathbf{L}} = (W^\star_{\mathbf{L}}, R^\star_{\mathbf{L}})$ и ***модель*** $M^\star_{\mathbf{L}} = (W^\star_{\mathbf{L}}, R^\star_{\mathbf{L}}, V^\star_{\mathbf{L}})$ строятся так:

- $W^\star_{\mathbf{L}} = \{x \subseteq \Gamma' \mid\ x$ есть максимальное L-непротиворечивое множество$\}$;
- оценка $V^\star_{\mathbf{L}}$ задана так, что $x \models p \Leftrightarrow p \in x$, для каждой переменной p;
- отношение $R^\star_{\mathbf{L}}$ задано так, что выполнены следующие два условия:[20]

  (1) $F^\star_{\mathbf{L}} \models L$;
  (2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W^\star_{\mathbf{L}}\ \big(\ \Box A \in x \iff \forall y \in R^\star_{\mathbf{L}}(x)\ A \in y\ \big)$.

Условие (2) нужно, чтобы доказать следующий аналог «леммы о канонической модели».

Лемма 3.6 (Ключевая)**.** $M^\star_{\mathbf{L}}, x \models A \iff A \in x,$ *для всех* $x \in W^\star_{\mathbf{L}}$ *и* $A \in \Gamma$.

$\triangleright$ Индукция по построению формулы A (заметим, что все подформулы формулы A лежат в Γ). Для случаев p, $\bot$, $(B \to C)$ доказательство тривиально. Остается случай модальности. Имеем:

$$x \models \Box A \quad \overset{(i)}{\iff} \quad \forall y \in R^\star_{\mathbf{L}}(x)\ y \models A \quad \overset{(ii)}{\iff} \quad \forall y \in R^\star_{\mathbf{L}}(x)\ A \in y \quad \overset{(iii)}{\iff} \quad \Box A \in x.$$

Здесь верно $\overset{(i)}{\iff}$ по определению семантики, $\overset{(ii)}{\iff}$ по предположению индукции, $\overset{(iii)}{\iff}$ по условию (2). $\triangleleft$

Окончание доказательства теоремы: так как $L \nvdash A_0$, то множество $\{\neg A_0\} \subseteq \Gamma'$ является L-непротиворечивым и, следовательно, содержится в некотором $x \in W^\star_{\mathbf{L}}$. По Ключевой лемме $M^\star_{\mathbf{L}}, x \not\models A_0$. Таким образом, формула A_0 опровергнута в некоторой конечной модели, основанной на шкале, в которой общезначима логика L, по условию (1). Тем самым $L \not\models_{\mathsf{fin}} A$. $\Box$

3.2.3 ККМ для некоторых модальных логик

Лемма 3.7 (**K**-правило)**.** *Всякая нормальная модальная логика L замкнута относительно правила:*

$$\frac{B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A}{\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A}$$

Доказательство. Если $L \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$, то $L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A)$.
Используя аксиому дистрибутивности, выводим $L \vdash \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to \Box A$.
Наконец, используем выводимость $\mathbf{K} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$
(выводима даже эквивалентность), чтобы получить $L \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$. $\Box$

Упражнение 3.8. $\mathbf{K} \vdash \Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$.

---

[19] Напомним (см. подробности в разделе 9 лекций 2014–2015 года):
– запись $L \models A$ означает, что для каждой *шкалы* F имеем: $F \models L \Rightarrow F \models A$.
– запись $L \models_{\mathsf{fin}} A$ означает, что для каждой *конечной шкалы* F имеем: $F \models L \Rightarrow F \models A$.

[20] Именно отношение достижимости будет строиться индивидуально для каждой логики.

Итак, нам осталось для рассматриваемых логик[21] L построить отношение $R^\star_{\mathbf{L}}$ на $W^\star_{\mathbf{L}}$ так, чтобы выполнились условия (1) и (2). Удобное обозначение: $\sharp x := \{A \mid \Box A \in x\}$ для всякого $x \in W^\star_{\mathbf{L}}$.

Логика K. Положим $x\, R^\star_{\mathbf{K}}\, y \leftrightharpoons \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \;\Rightarrow\; B \in y\,)$, то есть $\sharp x \subseteq y$.

Условие (1) тривиально: логика **K** общезначима на любой шкале, в частности, на $F^\star_{\mathbf{K}}$.

Проверим условие (2).

($\Rightarrow$) Если $\Box A \in x$ и $x\, R^\star_{\mathbf{K}}\, y$, то $A \in \sharp x$ и $\sharp x \subseteq y$, значит, $A \in y$.

($\Leftarrow$) Допустим $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} = \sharp x \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma'.$$

Остается доказать, что множество Y является **K**-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^\star_{\mathbf{K}}$, и мы будем иметь $x\, R^\star_{\mathbf{K}}\, y$ (ибо $\sharp x \subseteq Y \subseteq y$) и $A \notin y$.

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Допустим, что Y является **K**-противоречивым, тогда: $\mathbf{K} \vdash \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg A)$, $\mathbf{K} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$, и наконец, $\mathbf{K} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$, используя **K**-правило. Поскольку $\Box B_i \in x$, то $\Box A \in x$. Противоречие.

Условие (2)($\Rightarrow$) мы более проверять не будем, так как приведенная выше проверка использует лишь условие $\sharp x \subseteq y$, которое всегда будет включено в определение $R^\star_{\mathbf{L}}$ явно или будет следовать из него.

Логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Box p \to \Box\Box p$. Шкалы этой логики — *транзитивные* (упражнение).

Положим $x\, R^\star_{\mathbf{K4}}\, y \leftrightharpoons \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \;\Rightarrow\; B, \Box B \in y\,)$, то есть $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$.

Условие (1): $R := R^\star_{\mathbf{K4}}$ транзитивно: если $x\, R\, y\, R\, z$, то $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq \sharp z$, значит, $x\, R\, z$.

Проверим условие (2)($\Leftarrow$). Допустим $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

Остается доказать, что множество Y является **K4**-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^\star_{\mathbf{K4}}$, и мы будем иметь $x\, R^\star_{\mathbf{K4}}\, y$ и $A \notin y$.

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Допустим, что Y является **K4**-противоречивым, тогда:

$\mathbf{K4} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to A$, тогда по **K**-правилу

$\mathbf{K4} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_n \to \Box A$. Но $\mathbf{K4} \vdash \Box B_i \to \Box\Box B_i$, поэтому

$\mathbf{K4} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$. Поскольку $\Box B_i \in x$, то $\Box A \in x$. Противоречие.

Логика $\mathbf{KB} = \mathbf{K} + p \to \Box\Diamond p$. Шкалы этой логики — *симметричные* (упражнение).

Положим $x\, R^\star_{\mathbf{KB}}\, y \leftrightharpoons \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \;\Rightarrow\; B \in y\,)$ и $\forall C \in \Gamma\, (\, \Box C \in y \;\Rightarrow\; C \in x\,)$.

Иначе говоря, $x\, R^\star_{\mathbf{KB}}\, y \leftrightharpoons \sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq x$.

Симметричность отношения $R^\star_{\mathbf{KB}}$ очевидна. Проверим условие (2)($\Leftarrow$).

Допустим $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg C \in x \text{ и } \Box C \in \Gamma\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

Остается доказать, что множество Y является **KB**-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^\star_{\mathbf{KB}}$, и тогда $A \notin y$ и $x\, R^\star_{\mathbf{KB}}\, y$. Проверим последнее: если $\Box B \in x$, то $B \in Y \subseteq y$; если $\Box C \in y$, то $\Box C \in \Gamma$, и тогда $C \in x$, иначе бы $\neg C \in x$ и $\neg\Box C \in Y \subseteq y$.

Пусть $Y = \{B_1, \ldots, B_n\} \cup \{\neg\Box C_1, \ldots, \neg\Box C_m\} \cup \{\neg A\}$. Допустим, Y — **KB**-противоречивое, тогда:

$\mathbf{KB} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A$. По **K**-правилу

$\mathbf{KB} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg\Box C_m \to \Box A$.

$\mathbf{KB} \vdash \neg C_j \to \Box\neg\Box C_j$, поэтому

$\mathbf{KB} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg C_1 \wedge \ldots \wedge \neg C_m \to \Box A$.

Поскольку все $\Box B_i$ и $\neg C_j$ лежат в x, то и $\Box A \in x$. Противоречие.

---

[21] См. «куб» из 15 «традиционных» логик в лекциях 2014–2015 года, стр. 10. Помимо них мы рассмотрим **GL** и **Grz**.

Если логика L «рефлексивна», то есть содержит аксиому $\Box p \to p$, то $\sharp x \subseteq x$ для каждого $x \in W^\star_{\mathbf{L}}$. Действительно, пусть $\Box A \in x$. Поскольку $L \vdash \Box A \to A$, по лемме 3.4 мы заключаем, что $A \in x$.

<u>Логика</u> $\mathbf{T} = \mathbf{K} + \Box p \to p$. Шкалы этой логики — *рефлексивные.*

Зададим отношение $R^\star_{\mathbf{T}}$ так же, как в случае логики $\mathbf{K}$, то есть $\sharp x \subseteq y$.

Согласно вышесказанному, имеем $\sharp x \subseteq x$, то есть отношение $R^\star_{\mathbf{T}}$ рефлексивно.

<u>Логика</u> $\mathbf{S4} = \mathbf{T} + \Box p \to \Box\Box p$. Шкалы этой логики — *рефлексивные транзитивные.*

Зададим отношение $R^\star_{\mathbf{S4}}$ так же, как в случае логики $\mathbf{K4}$.

Оно рефлексивно и транзитивно (проверка как для логик $\mathbf{T}$ и $\mathbf{K4}$, соответственно).

<u>Логика</u> $\mathbf{B} = \mathbf{T} + \Box p \to \Box\Diamond p$. Шкалы этой логики — *рефлексивные симметричные.*

Отношение $R^\star_{\mathbf{B}}$ зададим как в случае логики $\mathbf{KB}$. Его симметричность очевидна; рефлексивность проверяется как для логики $\mathbf{T}$, поскольку условие $x\,R^\star_{\mathbf{B}}\,x$ вырождается в $\sharp x \subseteq x$.

<u>Логика</u> $\mathbf{K5} = \mathbf{K} + \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Шкалы этой логики — *евклидовы*: $\forall x, y, z\ \big(\ xRy\ \wedge\ xRz\ \Rightarrow\ yRz\ \big)$.

Положим $x\,R^\star_{\mathbf{K5}}\,y \leftrightharpoons \forall B\,(\,\Box B \in x\ \Rightarrow\ B \in y\,)$ и $\forall C\,(\,\Box C \in y\ \Rightarrow\ \Box C \in x\,)$. Т.е. $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp y \subseteq \sharp x$.

Верно ли, что отношение $R := R^\star_{\mathbf{K5}}$ евклидово? ***(пока остается открытым вопросом)***

Проверим условие (2)($\Leftarrow$). Допустим $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg\Box C \in x\} \cup \{\neg A\}\ \subseteq\ \Gamma'.$$

Остается доказать, что множество Y является $\mathbf{K5}$-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^\star_{\mathbf{K5}}$, и тогда $A \notin y$ и $x\,R\,y$. Проверим последнее. Если $\Box B \in x$, то $B \in y$. Обратно: $\Box C \in y \Rightarrow \neg\Box C \notin y \Rightarrow \neg\Box C \notin Y \Rightarrow \neg\Box C \notin x \Rightarrow \Box C \in x$.

Пусть $Y = \{B_1, \dots, B_n\} \cup \{\neg\Box C_1, \dots, \neg\Box C_m\} \cup \{\neg A\}$.

Допустим, множество Y — $\mathbf{K5}$-противоречивое, тогда

$\mathbf{K5} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A$, тогда по $\mathbf{K}$-правилу

$\mathbf{K5} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg\Box C_m \to \Box A$. Но мы имеем

$\mathbf{K5} \vdash \neg\Box C_j \to \Box\neg\Box C_j$. Поэтому

$\mathbf{K5} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to \Box A$.

Поскольку $\Box B_i, \neg\Box C_j \in x$, то $\Box A \in x$. Противоречие.

Попытки доказать, что отношение $R := R^\star_{\mathbf{K5}}$ евклидово.

1) Пусть $x\,R\,y$ и $x\,R\,z$, то есть $\sharp y \subseteq \sharp x \subseteq y$ и $\sharp z \subseteq \sharp x \subseteq z$. Докажем $y\,R\,z$, то есть $\sharp z \subseteq \sharp y \subseteq z$.
   а) $\sharp y \subseteq z$ доказывается просто: $\sharp y \subseteq \sharp x \subseteq z$;
   б) пробуем доказать $\sharp z \subseteq \sharp y$: пусть $\Box C \in z$, надо доказать $\Box C \in y$. Допустим противное: $\neg\Box C \in y$. Поскольку $\mathbf{K5} \vdash \neg\Box C \to \Box\neg\Box C$, то $\Box\neg\Box C \in y$, откуда ввиду $\sharp y \subseteq \sharp x$ получаем $\Box\neg\Box C \in x$, а поскольку $\sharp x \subseteq z$, то $\neg\Box C \in z$, противоречие с предположением $\Box C \in z$.
   В этом доказательстве есть дырка: если $\Box C \in \Gamma$, то вовсе не обязательно $\Box\neg\Box C \in \Gamma$. Поэтому мы безосновательно заключили, что $\Box\neg\Box C \in y$.
2) Попробуем модифицировать конструкцию: рассмотрим, как и прежде, $\Gamma = \mathsf{Sub}(A_0)$, а также
   $$\Gamma'\ :=\ \Gamma \cup \{\Box\neg\Box A \mid \Box A \in \Gamma\} \cup \{\text{их отрицания}\}.$$
   Элементами модели $W^\star_{\mathbf{K5}}$ теперь будут м.н.м. $x \subseteq \Gamma'$. В определении отношения $R := R^\star_{\mathbf{K5}}$ есть выбор, брать $\Box B$ и $\Box C$ из Γ или Γ'. Вспомним, что в предыдущем доказательстве затруднение возникло, когда $\Box C \in \Gamma$, но $\Box\neg\Box C \notin \Gamma$. Это приводит к следующей модификации:
   $$x\,R^\star_{\mathbf{K5}}\,y \leftrightharpoons \forall \Box B \in \Gamma'\,(\,\Box B \in x\ \Rightarrow\ B \in y\,) \text{ и } \forall \Box C \in \Gamma\,(\,\Box C \in y\ \Rightarrow\ \Box C \in x\,).$$
   Заметим, что проверке условия (2)($\Leftarrow$) такие модификации никак не повредят — там вообще было не важно, какое множество пробегают формулы B_i и C_j. Итак, пробуем доказать, что новое отношение $R := R^\star_{\mathbf{K5}}$ евклидово. Пусть $x\,R\,y$ и $x\,R\,z$. Докажем $y\,R\,z$.
   а) если $\Box B \in y$, то $\Box B \in x$ и $B \in z$. Но первая импликация верна лишь для формул $\Box B \in \Gamma$, а нам нужно доказать этот пункт для любой формулы $\Box B \in \Gamma'$. Не сходится...
   б) Пусть $\Box C \in z$, надо доказать $\Box C \in y$. Допустим противное: $\neg\Box C \in y$. Поскольку $\mathbf{K5} \vdash \neg\Box C \to \Box\neg\Box C$ и (что важно) $\Box\neg\Box C \in \Gamma'$, то $\Box\neg\Box C \in y$. Но теперь мы не можем заключить, что $\Box\neg\Box C \in x$, поскольку так переносить из y в x можно только формулы вида $\Box\varphi$ из Γ, а не Γ'... Снова не получилось!
   Итак, для доказательства импликации $\Box C \in z \Rightarrow \Box C \in y$ для формулы $\Box C$ приходится пользоваться аналогичной импликацией для формулы $\Box\neg\Box C$. То есть этот пункт требует бесконечного множества Γ.

Логика $\mathbf{K45} = \mathbf{K4} + \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Шкалы этой логики — *транзитивные евклидовы*.

Положим $x\,R^\star_{\mathbf{K45}}\,y \leftrightharpoons \forall B \in \Gamma\,(\,\Box B \in x \;\Rightarrow\; B, \Box B \in y\,)$ и $\forall C \in \Gamma\,(\,\Box C \in y \;\Rightarrow\; \Box C \in x\,)$.

Иначе говоря, $x\,R^\star_{\mathbf{K45}}\,y \leftrightharpoons \sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$ и $\sharp y \subseteq \sharp x$, то есть еще проще: $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x = \sharp y$.

Отношение $R := R^\star_{\mathbf{K45}}$ транзитивно: пусть $x\,R\,y\,R\,z$; тогда $\sharp x = \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x = \sharp y = \sharp z$; значит, $x\,R\,z$.

Отношение R евклидово: пусть $x\,R\,y$ и $x\,R\,z$; тогда $\sharp y = \sharp x \subseteq z$ и $\sharp y = \sharp x = \sharp z$; значит, $y\,R\,z$.

Проверим условие (2)($\Leftarrow$). Допустим $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg\Box C \in x\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

Остается доказать, что множество Y является **K45**-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^\star_{\mathbf{K45}}$, и тогда $A \notin y$ и $x\,R^\star_{\mathbf{K45}}\,y$. Проверим последнее. Если $\Box B \in x$, то $B, \Box B \in y$. Обратно: $\Box C \in y \Rightarrow \neg\Box C \notin y \Rightarrow \neg\Box C \notin Y \Rightarrow \neg\Box C \notin x \Rightarrow \Box C \in x$.

Пусть $Y = \{B_1, \Box B_1, \ldots, B_n, \Box B_n\} \cup \{\neg\Box C_1, \ldots, \neg\Box C_m\} \cup \{\neg A\}$.

Допустим, множество Y — **K45**-противоречивое, тогда

$\mathbf{K45} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A$, тогда по **K**-правилу

$\mathbf{K45} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_n \wedge \Box\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg\Box C_m \to \Box A$. Но мы имеем

$\mathbf{K45} \vdash \Box B_i \to \Box\Box B_i$ и $\mathbf{K45} \vdash \neg\Box C_j \to \Box\neg\Box C_j$. Поэтому

$\mathbf{K45} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to \Box A$.

Поскольку $\Box B_i, \neg\Box C_j \in x$, то $\Box A \in x$. Противоречие.

Логика $\mathbf{KB4} = \mathbf{KB} + \Box p \to \Box\Box p = \mathbf{KB5} = \mathbf{KB45}$. (Докажите эти равенства исчислений.)

Шкалы этой логики — *симметричные транзитивные* (а следовательно, и *евклидовы*).

Введем вспомогательное отношение: $x\,S\,y \leftrightharpoons \forall B\ (\Box B \in x \Rightarrow B, \Box B \in y)$. То есть $\sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subseteq \sharp y$. Фактически это $R^\star_{\mathbf{K4}}$, но ограниченное[22] на множество $W^\star_{\mathbf{KB4}}$. Отношение S транзитивно.

Положим: $x\,R^\star_{\mathbf{KB4}}\,y \;\leftrightharpoons\; x\,S\,y$ и $y\,S\,x$. Отношение $R := R^\star_{\mathbf{KB4}}$ симметрично и транзитивно.

Проверим условие (2)($\Leftarrow$). Пусть $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \Box C \in \Gamma \text{ и } C \notin x\}\{\neg\Box D \mid \Box D \in \Gamma \text{ и } \Box D \notin x\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

Остается доказать, что множество Y является **KB4**-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^\star_{\mathbf{KB4}}$, и тогда $A \notin y$ и $x\,R\,y$. Проверим последнее. Если $\Box B \in x$, то $B, \Box B \in y$; тем самым $x\,S\,y$. Обратно: пусть $\Box C \in y$, значит, $\Box C \in \Gamma$. Тогда $C, \Box C \in x$ (и тем самым $y\,S\,x$), поскольку если бы $\neg C \in x$ или $\neg\Box C \in x$, то мы бы имели $\neg\Box C \in Y \subseteq y$.

Пусть $Y = \{B_1, \Box B_1, \ldots, B_n, \Box B_n\} \cup \{\neg\Box C_1, \ldots, \neg\Box C_m\} \cup \{\neg\Box D_1, \ldots, \neg\Box D_t\} \cup \{\neg A\}$.

Допустим, множество Y — **KB4**-противоречивое, тогда

$\mathbf{KB4} \vdash \bigwedge_{i,j,s}\big(B_i \wedge \Box B_i \wedge \neg\Box C_j \wedge \neg\Box D_s\big) \to A$, тогда по **K**-правилу

$\mathbf{KB4} \vdash \bigwedge_{i,j,s}\big(\Box B_i \wedge \Box\Box B_i \wedge \Box\neg\Box C_j \wedge \Box\neg\Box D_s\big) \to \Box A$. Но мы имеем

$\mathbf{KB4} \vdash \Box B_i \to \Box\Box B_i$ (аксиома **4**),

$\mathbf{KB4} \vdash \neg C_j \to \Box\neg\Box C_j$ (аксиома **B**),

$\mathbf{KB4} \vdash \neg\Box D_s \to \Box\neg\Box D_s$ (выводимая в **KB4** аксиома евклидовости **5**).[23] Поэтому

$\mathbf{KB4} \vdash \bigwedge_{i,j,s}\big(\Box B_i \wedge \neg C_j \wedge \neg\Box D_s\big) \to \Box A$. Покуда $\Box B_i, \neg C_j, \neg\Box D_s \in x$, то $\Box A \in x$, противоречие.

Логика $\mathbf{S5} = \mathbf{S4} + p \to \Box\Diamond p \;= \mathbf{T} + \Diamond p \to \Box\Diamond p$. (Докажите равносильность этих аксиоматик.)

Шкалы этой логики — *рефлексивные симметричные транзитивные* (отношения эквивалентности).

Положим[24] $x\,R^\star_{\mathbf{S5}}\,y \leftrightharpoons \forall B \in \Gamma\,(\,\Box B \in x \;\Leftrightarrow\; \Box B \in y\,)$. То есть $\sharp x = \sharp y$ (отн. эквивалентности!).

Поскольку $\mathbf{S5} \supseteq \mathbf{T}$, то $\sharp y \subseteq y$. Поэтому из $x\,R^\star_{\mathbf{S5}}\,y$ следует $\sharp x \subseteq y$, Значит, (2)($\Rightarrow$) не проверяем.

Проверим условие (2)($\Leftarrow$). Допустим $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{\Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\neg\Box C \mid \neg\Box C \in x\} \cup \{\neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

---

[22] Очевидно, что если $L \subseteq L'$, то $W^\star_{\mathbf{L}} \supseteq W^\star_{\mathbf{L'}}$.

[23] Почему для **KB4** потребовалось использовать «производную» аксиому? Можно ли без нее (изменив R)?

[24] Можно определить отношение для **S5** как для **K45**, и оно совпадёт с тем, что мы определяем здесь. Но наличие рефлексивности в логике **S5** позволяет записать определение (того же!) отношения короче.

Остается доказать, что множество Y является **S5**-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^\star_{\mathbf{S5}}$, и тогда $A \notin y$ и $x\,R^\star_{\mathbf{S5}}\,y$. Проверим последнее. Если $\Box B \in x$, то $\Box B \in y$. Обратно: $\Box C \in y \Rightarrow \neg\Box C \notin y \Rightarrow \neg\Box C \notin x \Rightarrow \Box C \in x$.

Пусть $Y = \{\Box B_1, \ldots, \Box B_n\} \cup \{\neg\Box C_1, \ldots, \neg\Box C_m\} \cup \{\neg A\}$. Допустим, Y — **S5**-противоречивое, тогда
$\mathbf{S5} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A$, тогда по **K**-правилу
$\mathbf{S5} \vdash \Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_n \wedge \Box\neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box\neg\Box C_m \to \Box A$. Но мы имеем
$\mathbf{S5} \vdash \Box B_i \to \Box\Box B_i$ и $\mathbf{S5} \vdash \neg\Box C_j \to \Box\neg\Box C_j$. Поэтому
$\mathbf{S5} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to \Box A$. Поскольку $\Box B_i, \neg\Box C_j \in x$, то $\Box A \in x$. Противоречие.

<u>Логика</u> $\mathbf{D} = \mathbf{K} + \Box p \to \Diamond p = \mathbf{K} + \Diamond\top$. Шкалы этой логики — *сериальные*: $\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y)$.

Отношение $R^\star_{\mathbf{D}}$ зададим как для логики **K**, то есть: $x\, R^\star_{\mathbf{D}}\, y \leftrightharpoons \sharp x \subseteq y$. Докажем, что оно сериально.

Пусть $x \in W^\star_{\mathbf{D}}$. Достаточно доказать, что множество $Y = \sharp x$ является **D**-непротиворечивым, ибо тогда оно содержится в некотором $y \in W^\star_{\mathbf{D}}$ и, очевидно, $x\, R^\star_{\mathbf{D}}\, y$.

Пусть $Y = \sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$, тогда $\Box B_i \in x$. Допустим, Y — **D**-непротиворечиво, тогда
$\mathbf{D} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to \bot$. По **K**-правилу выводим
$\mathbf{D} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box\bot$. Но $\mathbf{D} \vdash \Box\bot \to \bot$, значит,
$\mathbf{D} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \bot$. Получили **D**-противоречивость множества x, чего не может быть.

Проверка условия (2)($\Leftarrow$) — дословно та же, что и для логики **K** (с заменой «$\mathbf{K} \vdash$» на «$\mathbf{D} \vdash$»).

И для логики **D**, и для каждой из перечисленных ниже логик с аксиомой сериальности нужно брать то же самое определение отношения достижимости, что и для соответствующей логики без аксиомы сериальности, а затем можно поступить двояко:

– либо каждый раз отдельно доказывать, что это отношение сериально (как мы выше сделали для **KD**). Это доказательство фактически повторяет проверку условия (2)($\Leftarrow$) для формулы $\Box A = \Box\bot$, которая заведомо не лежит в x, ибо $\mathbf{D} \vdash \Box\bot \to \bot$. Доказательство приходится повторять, ведь мы не можем напрямую воспользоваться условием (2)($\Leftarrow$), поскольку не знаем, лежит ли формула $\Box\bot$ в Γ);

– либо изначально добавить в Γ формулу $\Box\bot$, затем проверить условие (2)($\Leftarrow$) дословно тем же рассуждением, что и для логики без аксиомы сериальности, а затем для доказательства сериальности отношения использовать единое рассуждение: поскольку $\Box\bot \notin x$ (ведь $\mathbf{D} \vdash \Box\bot \to \bot$), но $\Box\bot \in \Gamma$, то ввиду условия (2)($\Leftarrow$) существует y такой, что $x\, R\, y$ и $\bot \notin y$, тем самым x имеет R-последователя.

<u>Логика</u> $\mathbf{D4} = \mathbf{D} + \Box p \to \Box\Box p$. Шкалы этой логики — *сериальные транзитивные.*

<u>Логика</u> $\mathbf{DB} = \mathbf{D} + p \to \Box\Diamond p$. Шкалы этой логики — *сериальные симметричные.*

<u>Логика</u> $\mathbf{D5} = \mathbf{D} + \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Шкалы этой логики — *сериальные евклидовы.*

<u>Логика</u> $\mathbf{D45} = \mathbf{D} + \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Шкалы этой логики — *сериальные транзитивные евклидовы.*

<u>Логика</u> GL $= \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. *Конечные* шкалы этой логики — *иррефлексивные транзитивные.*

Положим $x\, R^{\star}_{\mathbf{GL}}\, y \leftrightharpoons \forall B \in \Gamma\, (\, \Box B \in x \;\Rightarrow\; B, \Box B \in y\,)$ и $\exists C \in \Gamma\, (\, \Box C \notin x \;\Rightarrow\; \Box C \in y\,)$.

Иначе говоря, $x\, R^{\star}_{\mathbf{GL}}\, y \leftrightharpoons \sharp x \subseteq y$ и $\sharp x \subsetneq \sharp y$. Очевидно, отношение $R := R^{\star}_{\mathbf{GL}}$ иррефлексивно.

Докажем транзитивность: если $x\, R\, y\, R\, z$, то $\sharp x \subseteq \sharp y \subseteq z$ и $\sharp x \subsetneq \sharp y \subseteq \sharp z$, значит, $\sharp x \subseteq z$ и $\sharp x \subsetneq \sharp z$.

Проверим условие (2)($\Leftarrow$). Допустим $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Рассмотрим множество

$$Y = \{B, \Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\Box A, \neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

Остается доказать, что множество Y является **GL**-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^{\star}_{\mathbf{GL}}$, и тогда $A \notin y$ и $x\, R^{\star}_{\mathbf{GL}}\, y$ (последнее использует то, что $\Box A \notin x$ и $\Box A \in y$).

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Допустим, множество Y **GL**-противоречиво, тогда:

$\mathbf{GL} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to (\Box A \to A)$, тогда по **K**-правилу

$\mathbf{GL} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_n \to \Box(\Box A \to A)$. Но мы имеем

$\mathbf{GL} \vdash \Box B_i \to \Box\Box B_i$, а также $\mathbf{GL} \vdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$. Поэтому

$\mathbf{GL} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$. Поскольку $\Box B_i \in x$, заключаем $\Box A \in x$. Противоречие.

<u>Логика</u> Grz $= \mathbf{K} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$.

Утверждение. $\mathbf{Grz} \vdash \Box p \to p$ (легко); $\mathbf{Grz} \vdash \Box p \to \Box\Box p$ (трудно). Итак, $\mathbf{Grz} \supseteq \mathbf{S4}$.

Конечные шкалы этой логики — *рефлексивные транзитивные антисимметричные* (то есть конечные *частичные порядки*).[25] Для построения конечной каноничекой модели нужно слегка изменить начало конструкции. Положим $\Gamma = \mathsf{Sub}(A_0)$ и (что необычно)

$$\Gamma' = \Gamma \cup \mathsf{Sub}\{\Box(A \to \Box A) \mid \Box A \in \Gamma\} + \{\text{отрицания этих формул}\}.$$

Однако ключевую лемму 3.6 нужно по-прежнему доказывать лишь для формул из Γ. А значит, условие (2)($\Leftarrow$) нужно по-прежнему проверять лишь для $\Box A \in \Gamma$.

Положим $x\, R^{\star}_{\mathbf{Grz}}\, y \leftrightharpoons x = y$ или $\sharp x \subsetneq \sharp y$ — очевидно, частичный порядок; обозначим $R := R^{\star}_{\mathbf{Grz}}$.

Проверим условие (2)($\Leftarrow$). Допустим $\Box A \notin x$, но $\Box A \in \Gamma$. Нужно предъявить $y \in W^{\star}_{\mathbf{Grz}}$, такой что $x\, R\, y$ и $A \notin y$. Возможны два случая:

1) $A \notin x$. Тогда годится $y := x$, поскольку R рефлексивно.

2) $A \in x$. Тогда рассмотрим множество формул:

$$Y = \{\Box B \mid \Box B \in x\} \cup \{\Box(A \to \Box A), \neg A\} \;\subseteq\; \Gamma'.$$

Досточно доказать, что множество Y является **Grz**-непротиворечивым, поскольку тогда оно содержится в некотором $y \in W^{\star}_{\mathbf{Grz}}$, и тогда $A \notin y$ и $x\, R\, y$. Для проверки последнего убедимся, что $\sharp x \subsetneq \sharp y$ (ибо очевидно, что $x \neq y$). По построению, $\sharp x \subseteq \sharp y$. Включение строгое, поскольку формула $\Box(A \to \Box A)$ лежит в y, но не в x; действительно, иначе ввиду рефлексивности $\mathbf{Grz} \vdash \Box C \to C$ мы имели бы $(A \to \Box A) \in x$, что вместе с $A \in x$ влекло бы $\Box A \in x$, а это противоречит предположению.

Пусть $\sharp x = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Имеем: $\Box B_i \in x$. Допустим, множество Y — **Grz**-противоречиво, тогда:

$\mathbf{Grz} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to (\Box(A \to \Box A) \to A)$, тогда по **K**-правилу

$\mathbf{Grz} \vdash \Box\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box\Box B_n \to \Box(\Box(A \to \Box A) \to A)$. Но мы имеем

$\mathbf{Grz} \vdash \Box B_i \to \Box\Box B_i$ и $\mathbf{Grz} \vdash \Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to A$. Поэтому

$\mathbf{Grz} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to A$. Снова применим **K**-правило и снова уберем $\Box\Box$, получим:

$\mathbf{Grz} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A$. Поскольку $\Box B_i \in x$, то $\Box A \in x$, противоречие.

[25] То есть рефлексивные напарники конечных шкал логики **GL**. Это верно для любых, не только для конечных, шкал.

4 Секвенциальные исчисления для модальных логик

Секвенциальные исчисления отличаются от рассматривавшихся выше аксиоматических исчислений (которые еще называются гильбертовскими исчислениями) тем, что секвенциальные системы обычно более приспособлены для *поиска вывода* формулы (или секвенции). Зачастую они обладают свойством *подформульности* — вывод формулы (или секвкенции) содержит лишь формулы (секвенции), составленные из подформул формулы, которую мы пытаемся вывести. Это свойство обычно гарантирует, что поиск вывода завершается за конечное время (что влечет разрешимость логики).

Секвенцией называется пара $\langle \Pi, \Sigma \rangle$, обычно записываемая как $\Pi \Rightarrow \Sigma$, где Π и Σ — конечные объекты, «составленные» из формул. При этом Π называется *антецедентом*, а Σ — сукцедентом данной секвенции. Наиболее распростронены три типа секвенциальных исчислений — в которых Π и Σ являются *последовательностями* формул, *мультимножествами* формул или *множествами* формул. Для нас наиболее удобным будет второй вариант — с мультимножествами.

Мультимножеством формул называется (сначала неформально) множество формул с указанием кратности вхождения каждой формулы в него; формально, это функция $\mathsf{Fm} \to \mathbb{N}$, сопоставляющая каждой формуле ее кратность вхождения в данное мультимножество. Мультимножество называется конечным, если эта функция отлична от нуля лишь на конечном множестве формул. Мы будем записывать мультимножества в виде множества, в котором некоторые элементы перечислены несколько раз, например, $\Pi = \{A, B, A, A, C, C, B\}$. Добавление формулы к мультимножеству пишем через запятую (или даже вовсе запятую опускаем): $\Pi, A = \Pi\, A = \Pi \cup \{A\}$. Еще обозначение: $\Box\Pi = \{\Box A \mid A \in \Pi\}$.

Секвенции сопоставим ее перевод — модальную формулу: $\boxed{(\Pi \Rightarrow \Sigma)^\star = \bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma}$.

Этот перевод можно считать задающим и семантику Крипке для секвенций:

$$M, x \models \Pi \Rightarrow \Sigma \quad \leftrightharpoons \quad \big(\forall A \in \Pi\ M, x \models A \quad \Longrightarrow \quad \exists B \in \Sigma\ M, x \models B\big).$$

Секвенциальное исчисление для логики высказываний [ИВ]

Аксиомы: $\Pi\, p \Rightarrow p\, \Sigma \;\; (p \in \mathsf{Var})$ $\qquad \bot, \Pi \Rightarrow \Sigma \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma, \top$

Правила вывода:

$$\frac{\Pi\, A \Rightarrow \Sigma}{\Pi \Rightarrow \neg A\, \Sigma} \qquad \frac{\Pi\, A\, B \Rightarrow \Sigma}{\Pi\, (A \wedge B) \Rightarrow \Sigma} \qquad \frac{\Pi \Rightarrow A\, \Sigma \quad \Pi \Rightarrow B\, \Sigma}{\Pi \Rightarrow (A \wedge B)\, \Sigma} \qquad \frac{\Pi\, A \Rightarrow B\, \Sigma}{\Pi \Rightarrow (A \to B)\, \Sigma}$$

$$\frac{\Pi \Rightarrow A\, \Sigma}{\Pi\, \neg A \Rightarrow \Sigma} \qquad \frac{\Pi \Rightarrow A\, B\, \Sigma}{\Pi \Rightarrow (A \vee B)\, \Sigma} \qquad \frac{\Pi\, A \Rightarrow \Sigma \quad \Pi\, B \Rightarrow \Sigma}{\Pi\, (A \vee B) \Rightarrow \Sigma} \qquad \frac{\Pi \Rightarrow A\, \Sigma \quad \Pi\, B \Rightarrow \Sigma}{\Pi\, (A \to B) \Rightarrow \Sigma}$$

Упомянем также *структурные правила*[26] (зачем они нужны, скажем отдельно позже):

$$\text{(ослабление)} \quad \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma}{A\, \Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma}{\Pi \Rightarrow \Sigma\, A}$$

$$\text{(сокращение)} \quad \frac{A\, A\, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A\, \Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma\, A\, A}{\Pi \Rightarrow \Sigma\, A}$$

$$\text{(сечение)} \quad \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma\, A \qquad A\, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Pi \Rightarrow \Sigma}$$

Понятие *выводимости* секвенции определяется очевидным образом; обозначение: $[\mathsf{ИВ}] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$.

Теорема 4.1 (Полнота секвенциального исчисления высказываний)**.** *Для любых* Π, Σ*:*

$$[\mathsf{ИВ}] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{ИВ} \vdash (\Pi \Rightarrow \Sigma)^\star.$$

Это верно как для исчисления без сечения, так и для исчисления с сечением.

Задача 4.2. Выводима любая секвенция вида $A, \Pi \Rightarrow \Sigma, A$, где A — произвольная формула.

Задача 4.3. Правила ослабления и сокращения допустимы в секвенц. исчислении высказываний.

[26] Помимо этих структурных правил, есть еще правила *перестановки*, меняющие местами формулы (внутри антецедента или внутри сукцедента), но поскольку мы рассматриваем мультимножества, эти правила не нужны.

4.1 Правила

Ниже мы подразумеваем следующее: чтобы получить для логики L ее секвенциальное исчисление, которое мы будем обозначать $[L]$, нужно к исчислению высказываний (с сечением!) добавить перечисленные правила. Об устранимости сечения мы поговорим отдельно.

$$(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K5}})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, \Box A} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{GL}})\ \frac{\Box A, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A}$$

$$(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K4}})\ \frac{\Pi, \Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K45}})\ \frac{\Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, \Box A} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{\Box(A \to \Box A), \Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A}$$

$$(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{KB}})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Box A} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{KB45}})\ \frac{\Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, \Sigma, \Box A}$$

Для «рефлексивных напарников» логик **K**, **K4**, **KB**, **K45** — то есть для логик **T**, **S4**, **B**, **S5** — а также для логики **Grz** добавляется *правило рефлексивности*:

$$(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{T}})\ \frac{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Box A, \Pi \Rightarrow \Sigma}$$

В рефлексивных транзитивных логиках (**S4** и **S5**) правило можно упростить, убрав из посылки Π:

$$(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{S4}})\ \frac{\Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{S5}})\ \frac{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, \Box A}$$

Дополнительные правила для «сериальных» логик (получаются из обычных удалением A и $\Box A$):

$$(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{D}})\ \frac{\Pi \Rightarrow}{\Box\Pi \Rightarrow} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{D4}})\ \frac{\Pi, \Box\Pi \Rightarrow}{\Box\Pi \Rightarrow} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{DB}})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Box\Sigma}{\Box\Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{D5}})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Box\Sigma}{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma} \qquad (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{D45}})\ \frac{\Pi, \Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma}{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma}$$

Задача 4.4. Выведите аксиомы каждой из рассматриваемых логик L в исчислении $[L]$. Под выводимостью формулы A в секвенциальном исчислении понимается выводимость секвенции $\varnothing \Rightarrow A$.

Замечание 4.5. Вывод в секвенциальном исчислении, если его строить снизу вверх, можно воспринимать как способ построения «контрмодели» к секвенции, поэтому секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ трактуется так: в «текущей точке» все формулы из Π (из Σ) истинны (ложны). Как следствие, всякое «естественное» секвенциальное правило «введения модальности в сукцедент» (то есть в Σ), обычно[27] имеет вид:

$$\frac{\ldots\ \Pi \Rightarrow A\ \ldots}{\ldots\ \Box\Pi \Rightarrow \Box A\ \ldots}, \quad \text{или более развернуто,} \quad \frac{\Gamma, \quad \Pi \Rightarrow A, \quad \Delta}{\Gamma', \Box\Pi \Rightarrow \Box A, \Delta'}.$$

Это следует из интерпретации данных правил (при их чтении снизу вверх) как правил перехода от некоторой точки x к ее R-последователю y (то есть $x\,R\,y$). Действительно, пусть в точке x ложна формула $\Box A$ (смотрим на заключение правила). Тогда должен найтись последователь y, в котором ложна формула A. Что еще мы можем сказать про связь формул, истинных в x и истинных в y? Как минимум, если формула вида $\Box B$ истинна в x (то есть формула $\Box B \in \Box\Pi$ имеется в левой части заключения правила), то формула B обязана быть истинной в y (то есть формула $B \in \Pi$ должна присутствовать в левой части посылки правила). Остальные формулы ($\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$) достраиваются исходя из того, каково отношение достижимости (транзитивно, симметрично и т.п.). Например, в случае транзитивного отношения в точке y также должна быть истинна формула $\Box B$, поэтому у «транзитивных» логик в левой части посылки правила имеется еще и $\Box\Pi$. Проведите этот анализ для других логик.

Замечание 4.6. В исчислениях для **K**, **K4**, **T**, **S4**, **D**, **GL**, **Grz** сечение устранимо. В исчислениях для **B** и **S5** сечение неустранимо, но можно ограничиться так называемым *аналитическим* сечением, в котором $A \in \mathsf{Sub}(\Pi\Sigma)$. В этом случае свойство подформульности становится верно в исчислении для **S5**; в исчислении для **B** это свойство нарушает модальное правило, однако можно ограничиться лишь применениями этого правила, сохраняющими свойство подформульности. Мы не будем заниматься этим кругом вопросов. (Про остальные логики нам не известно.)

[27] За исключением исчислений для логик $\mathbf{S4}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}$, где рефлексивность позволила упростить правило.

Вопросы. $[\mathbf{KB45}] = [\mathbf{KB}] + (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K4}}) + (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K5}})$? $[\mathbf{K45}] = [\mathbf{K4}] + (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K5}})$? $[\mathbf{S5}] = [\mathbf{K5}] + (\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{T}})$?

Задача 4.7. Добавьте в $[\mathbf{GL}]$ правило рефлексивности и выведите противоречие (пустую секвенцию).

Замечание 4.8. Исчисления для сериальных логик можно получить добавлением не указанных правил, а аксиомы $\Box\bot \Rightarrow \bot$. Но по тому же принципу можно и исчисления для рефлексивных логик получить добавлением аксиомы $\Box A \Rightarrow A$. Аналогично, по-видимому, и для других аксиом ($\Box A \Rightarrow \Box\Box A$, $A \Rightarrow \Box\Diamond A$, $\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond A$). Но это всё уже противоречит философии секвенциальных исчислений, в которые принято добавлять правила, а не аксиомы.

4.2 Корректность

Будем говорить, что логика L *замкнута* относительно секвенциально правила $\dfrac{\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1}{\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2}$ (или что данное правило *допустимо* в логике L), если для любых формул, составляющих фигурирующие в этом правиле мультимножества, из выводимости $L \vdash (\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1)^*$ следует выводимость $L \vdash (\Pi_2 \Rightarrow \Sigma_2)^*$.

Замечание 4.9. Пусть $L \subset L'$ — две нормальные логики. Если логика L замкнута относительно некоторого правила, то вовсе не обязательно, что и логика L' будет замкнута относительно этого правила. Однако для приведенных выше правил это верно, как утверждает следующая лемма.

Лемма 4.10 (Корректность)**.** *Для каждой из перечисленных выше модальных логик L правила секвенциального исчисления $[L]$ допустимы в логике L и даже в любой нормальной логике $L' \supseteq L$.*

Доказательство. Доказанная нами ранее лемма 3.7 означает, что правило $(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K}})$ допустимо в любой нормальной модальной логике. Корректность правил для остальных логик была проверена нами в разделе 3.2.3, когда мы доказывали свойства конечных канонических моделей для них. Например, для логики **KB** мы доказали, что из выводимости

$$\begin{array}{rl} \text{из выводимости} & \mathbf{KB} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg\Box C_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Box C_m \to A \\ \text{следует выводимость} & \mathbf{KB} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \wedge \neg C_1 \wedge \ldots \wedge \neg C_m \to \Box A. \end{array}$$

Это равносильно тому, что

$$\begin{array}{rl} \text{из выводимости} & \mathbf{KB} \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \ \to \ \Box C_1 \vee \ldots \vee \Box C_m \vee A \\ \text{следует выводимость} & \mathbf{KB} \vdash \Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \ \to \ C_1 \vee \ldots \vee C_m \vee \Box A. \end{array}$$

А это и есть допустимость правила $(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{KB}})$ в логике **KB**, где $\Pi = \{B_1, \ldots, B_n\}$, $\Sigma = \{C_1, \ldots, C_m\}$.

Более детально, рассуждение было таким: к выводимости посылки правила $(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{KB}})$ в логике **KB** (либо в произвольном ее расширении L') применили **K**-правило, допустимое в любой нормальной логике; затем использовали выводимость в **KB**, а значит, и в L', аксиомы симметричности; в результате получили выводимость заключения правила $(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{KB}})$ в логике **KB** (а значит, и в L'). Следовательно, это доказывает допустимость правила $(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{KB}})$ в любом нормальном расширении логики **KB**. $\Box$

Замечание 4.11. Если нам просто требуется доказать равносильность гильбертовского и секвенциально исчисления для некоторой логики L, то это можно сделать гораздо проще, чем доказывать формулируемую ниже теорему 4.15 о полноте и финитной аппроксимируемости: нужно
– во-первых, в секвенциальном исчислении $[L]$ вывести каждую аксиому логики L;
– во-вторых, доказать допустимость секвенциальных правил исчисления $[L]$ в логике L.
Попутно потребуется доказать обратимость «правила введения импликации в сукцедент» в $[L]$.

Задача 4.12. Во всех рассматриваемых секвенциальных исчислениях $[L]$ «правило введения импликации в сукцедент» обратимо, то есть допустимо правило

$$\frac{\Pi \Rightarrow (A \to B)\,\Sigma}{\Pi\, A \Rightarrow B\,\Sigma}.$$

Задача 4.13. В модальных секвенциальных исчислениях выводима любая секвенция вида $A\,\Pi \Rightarrow \Sigma\, A$, где A — произвольная модальная формула.

Задача 4.14. Правила ослабления и сокращения допустимы в модальных секвенц. исчислениях.

4.3 Полнота

Наша цель — доказать для (почти) всех упомянутых выше логик следующую теорему.

Теорема 4.15 (Совместная теорема о полноте гильбертовских и генценовских исчислений и об их финитной аппроксимируемости)**.** *Для каждой из перечисленных выше модальных логик L и для любой секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ следующие четыре условия эквивалентны:*

(a) $[L] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, **(c)** $L \models (\Pi \Rightarrow \Sigma)^\star$,
(b) $L \vdash (\Pi \Rightarrow \Sigma)^\star$, **(d)** $L \models_{\mathsf{fin}} (\Pi \Rightarrow \Sigma)^\star$.

Доказательство. Для доказательства импликации $(a) \Rightarrow (b)$ надо проверить, что правила секвенциального исчисления $[L]$ допустимы в логике L; это было сделано в лемме 4.10; аксиомы же и секвенциальные правила исчисления высказываний (включая структурные правила) допустимы в любой модальной логике. Импликация $(b) \Rightarrow (c)$ есть корректность логики L относительно семантики Крипке; она имеет место для любой нормальной логики. Импликация $(c) \Rightarrow (d)$ тривиальна. Основная часть доказательства — импликация $(d) \Rightarrow (a)$ — есть собственно полнота, ей посвящен остаток раздела. □

Доказываем $(d) \Rightarrow (a)$ от противного. Допустим $[L] \nvdash \Pi_0 \to \Sigma_0$. Мы построим конечную контрмодель $M_{[L]}$ к данной секвенции, основанную на L-шкале. Основное отличие модели $M_{[L]}$ от конечной канонической модели (ККМ) в том, что если ККМ состояла из максимальных L-непротиворечивых множеств формул, то модель $M_{[L]}$ будет состоять из «насыщенных» $[L]$-невыводимых секвенций.

Рассмотрим множество формул[28] $\Gamma = \mathsf{Sub}(\Pi_0 \cup \Sigma_0)$. Секвенцию $\Pi \Rightarrow \Sigma$ назовем
– *тонкой*, если Π и Σ являются множествами, то есть формулы в них имеют кратность 1;
– Γ-*насыщенной*, если для каждой формулы $A \in \Gamma$ имеем $A \in \Pi$ или $A \in \Sigma$.

Лемма 4.16 (О насыщении)**.** *Всякая невыводимая в $[L]$ секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$, где $\Pi, \Sigma \subseteq \Gamma$, содержится в некоторой Γ-насыщенной секвенции $\Pi' \Rightarrow \Sigma'$ (содержится в смысле $\Pi \subseteq \Pi'$ и $\Sigma \subseteq \Sigma'$).*

Доказательство. Каждую формулу $A \in \Gamma$ можно добавить либо в Π, либо в Σ с сохранением невыводимости секвенции, поскольку обе если секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma, A$ и $A, \Pi \Rightarrow \Sigma$ выводимы, то по правилу сечения[29] выводима и секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$. Пополнив таким образом секвенцию всеми формулами из Γ, мы получим Γ-насыщенную секвенцию, по-прежнему невыводимую в $[L]$. □

Лемма 4.17 (Свойства насыщенных секвенций)**.** *Пусть $\Pi \Rightarrow \Sigma$ — Γ-насыщенная секвенция, такая что $[L] \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Тогда для любых формул из Γ верны следующие утверждения.*

1. $A \in \Pi \iff A \notin \Sigma$.
2. $(A \wedge B) \in \Pi \iff A \in \Pi$ *и* $B \in \Pi$.
   $(A \wedge B) \in \Sigma \iff A \in \Sigma$ *или* $B \in \Sigma$.
3. $(A \vee B) \in \Pi \iff A \in \Pi$ *или* $B \in \Pi$.
   $(A \vee B) \in \Sigma \iff A \in \Sigma$ *и* $B \in \Sigma$.
4. $(A \to B) \in \Pi \iff A \in \Sigma$ *или* $B \in \Pi$.
   $(A \to B) \in \Sigma \iff A \in \Pi$ *и* $B \in \Sigma$.

Доказательство. Пункт 1 использует задачу 4.13. Докажем лишь последний пункт. Если $(A \to B) \in \Pi$, то $A \in \Sigma$ или $B \in \Pi$, поскольку иначе $A \in \Pi$ и $B \in \Sigma$ и секвенция имеет вид $(A \to B), A, \Pi' \Rightarrow B, \Sigma'$, а значит, выводима (даже в исчислении высказываний). Обратно, если $A \in \Sigma$, то $(A \to B) \in \Pi$, так как в противном случае $(A \to B) \in \Sigma$ и наша секвенция имеет вид $\Pi \Rightarrow \Sigma', A, (A \to B)$, то есть является выводимой. Аналогично доказывается, что если $B \in \Pi$, то $(A \to B) \in \Pi$. □

[28] Аналог множества $\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma$ нам не нужен: вместо добавления отрицания формулы в антецедент мы будем формулу добавлять в сукцедент, и наоборот.

[29] Более «осторожный» вариант — пополнять секвенцию $\Pi \Rightarrow \Sigma$ лишь подформулами формул из $\Pi \cup \Sigma$. В этом случае будет достаточно так называемого *аналитического* правила сечения, то есть в которых высекаемая формула содержится среди подформул остальных формул секвенции, стоящей в заключении правила сечения. Такого сечения некоторым исчислениям недостаточно (обзор давать пока не будем). Есть еще более рациональный вариант — обойтись без сечения. Для этого насыщенные секвенции надо определять аккуратнее. Например, одно из условий: если $(A \to B) \in \Pi$, то либо $B \in \Pi$, либо $A \in \Sigma$; если $(A \to B) \in \Sigma$, то $A \in \Pi$ и $B \in \Sigma$. Легко видеть, что насыщенности в этом смысле можно достичь без правила сечения. Но устранимостью сечения обладают еще меньше исчислений (обзор отложим).

Ниже удобно пользоваться обозначением: если $x = (\Pi \Rightarrow \Sigma)$, то обозначим $\Pi_x := \Pi$, $\Sigma_x := \Sigma$.

Модель $M_{[L]} = (W_{[L]}, R_{[L]}, V_{[L]})$, основанную на ***шкале*** $F_{[L]} = (W_{[L]}, R_{[L]})$, строим так:

- $W_{[L]} = \{\Pi \Rightarrow \Sigma \mid \ \Pi, \Sigma \subseteq \Gamma$, секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ тонкая,[30] Γ-насыщенная, $[L] \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma\}$;
- оценка $V_{[L]}$ задана так: пусть $x \in W_{[L]}$; тогда[31] $x \models p \leftrightharpoons p \in \Pi_x$, для всех $p \in \mathsf{Var}$;
- отношение $R_{[L]}$ задано так, что выполнены следующие два условия:[32]

  (1) $F_{[L]} \models L$;

  (2) $\forall \Box A \in \Gamma\ \forall x \in W_{[L]}\ \ \big(\Box A \in \Pi_x \iff \forall y \in R_{[L]}(x)\ A \in \Pi_y\big)$.

Свойство (2) нужно, чтобы доказать следующую стандартную лемму.

Лемма 4.18. *Пусть* $x \in W_{[L]}$ *есть секвенция* $\Pi \Rightarrow \Sigma$. *Тогда* $M_{[L]}, x \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$.
Более развернуто, для каждой формулы $A \in \Gamma$ *имеем:*

$$\begin{array}{lcl} M_{[L]}, x \models A & \iff & A \in \Pi, \\ M_{[L]}, x \not\models A & \iff & A \in \Sigma. \end{array}$$

Доказательство. Индукция по построению формулы A. Случаи $\bot$, p тривиальны.
Случай $\to$: пусть $(A \to B) \in \Gamma$. Тогда (используя последний пункт леммы 4.17):

$$x \models A \to B \iff x \not\models A \text{ или } x \models B \iff A \in \Sigma \text{ или } B \in \Pi \iff (A \to B) \in \Pi.$$

Случай $\Box$: пусть $\Box A \in \Gamma$; обозначим $R := R_{[L]}$. Имеем цепь эквивалентностей:

$$x \models \Box A \iff \forall y \in R(x)\ y \models A \iff \forall y \in R(x)\ A \in \Pi_y \iff \Box A \in \Pi_x.$$

Последняя эквивалентность использует условие (2). $\Box$

Окончание доказательства теоремы о полноте стандартно: поскольку $[L] \nvdash \Pi_0 \Rightarrow \Sigma_0$, то данная секвенция погружается[33] в некоторую секвенцию $x = (\Pi \Rightarrow \Sigma) \in W_{[L]}$. Тогда $x \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$ и тем более $x \not\models \Pi_0 \Rightarrow \Sigma_0$. Таким образом, данная секвенция опровергнута в некоторой точке конечной модели, основанной на L-шкале. Это и означает, что $L \not\models_{\mathsf{fin}} \Pi_0 \Rightarrow \Sigma_0$.

Осталось для изучаемых логик построить отношение $R_{[L]}$, удовлетворяющее условиям (1) и (2).

<u>Логика K.</u> Полагаем: $x\,R\,y \leftrightharpoons \forall A\,(\Box A \in \Pi_x \implies A \in \Pi_y)$.
Условие (1) тривиально, ибо логика $\mathbf{K}$ общезначима на любой шкале. Проверим условие (2).
($\Rightarrow$) Если $\Box A \in \Pi_x$ и $x\,R\,y$, то $A \in \Pi_y$.
($\Leftarrow$) Пусть $\Box A \notin \Pi_x$, но $\Box A \in \Gamma$. Тогда $\Box A \in \Sigma_x$. Секвенция $\Pi' \Rightarrow A$, где $\Pi' := \{B \mid \Box B \in \Pi_x\}$, не выводима в $[\mathbf{K}]$, иначе из нее по правилу $(\mathsf{R}^{\Box}_{\mathbf{K}})$ вывели бы $\Box\Pi' \Rightarrow \Box A$, а по правилу ослабления (см. задачу 4.14) вывели бы и $\Pi_x \Rightarrow \Sigma_x$, то есть x, что невозможно.
Значит, секвенция $\Pi' \Rightarrow A$ содержится в некоторой тонкой Γ-насыщенной невыводимой в $[\mathbf{K}]$ секвенции $y \in W_{[\mathbf{K}]}$, то есть $\Pi' \subseteq \Pi_y$ и $A \in \Sigma_y$. Очевидно, $x\,R_{[\mathbf{K}]}\,y$ и $A \notin \Pi_y$, что и требовалось.

Можно заметить, что здесь мы переписываем в терминах секвенций доказательство про ККМ из раздела 3.2.3, изначально написанное в терминах множеств формул. Если раньше мы строили множество формул Y и доказывали его непротиворечивость, то теперь мы строим секвенцию $\Pi' \Rightarrow \Sigma'$, кладя в Π' «положительные» формулы (не имеющие отрицания в начале), а в Σ' — «отрицательные» формулы (имеющие вид $\neg C$), а также формулу A. Предлагаем читателю самостоятельно переписать таким же образом доказательства для остальных логик.

[30]Ограничиваемся тонкими секвенциями, ибо всевозможных секвенций $\Pi \Rightarrow \Sigma$, где $\Pi, \Sigma \subseteq \Gamma$, бесконечно много.
[31]Интуиция: пусть $x = (\Pi \Rightarrow \Sigma)$; тогда формулы, входящие в Π (в Σ), считаются истинными (ложными) в точке x.
[32]Как и в ККМ, отношение достижимости будет строиться индивидуально для каждой логики.
[33]Без учета кратностей формул, но это не принципиально, так как правила ослабления и сокращения позволяют иметь любую кратность формул, не меняя выводимости секвенции.

5 Операции над моделями и шкалами

Основное содержание лекции — операции над моделями и шкалами (несвязная сумма, порожденная подмодель, p-морфизм) — содержится в конспектах 2014–2015 года (глава 2). Здесь мы дополним некоторыми новыми фактами об операциях и рассмотрим простые приложения операций.

(*Модальной*) *теорией* отмеченной модели (M, a), где $a \in W$, или модели M называется множество истинных в ней формул:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{Theory}(M, a) & = & \{A \in \mathsf{Fm} \mid M, a \models A\} \\ \mathsf{Theory}(M) & = & \{A \in \mathsf{Fm} \mid M \models A\} \end{array}$$

(*Модальной*) *логикой* отмеченной шкалы (F, a), где $a \in W$, или шкалы F называется множество общезначимых на ней формул:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{Logic}(F, a) & = & \{A \in \mathsf{Fm} \mid F, a \models A\} \\ \mathsf{Logic}(F) & = & \{A \in \mathsf{Fm} \mid F \models A\} \end{array}$$

Аналогично определяется теория класса (отмеченных моделей) $\mathsf{Theory}(\mathbb{K})$ и логика класса (отмеченных) шкал $\mathsf{Logic}(\mathbb{K})$. Все эти термины согласуются со следующим определением.

Определение 5.1. *Теория* — это произвольное множество модальных формул, содержащее все тавтологии, все подстановочные примеры аксиомы дистрибутивности $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ и замкнутое относительно правила (MP). *Нормальная теория* — это теория, замкнутая относительно правила (Nec). Если добавить замкнутость относительно правила подстановки (Sub), то получится *логика* и *нормальная логика*, соответственно.

Итак, помимо тавтологий, аксиомы дистрибутивности и правила (MP), мы имеем правила:

	любая	нормальная
теория		Nec
логика	Sub	Nec, Sub

Легко видеть, что все определенные выше $\mathsf{Theory}(\cdot)$ являются теориями, а все $\mathsf{Logic}(\cdot)$ — логиками. Теория модели или класса моделей — нормальна; логика шкалы или класса шкал — нормальна. Очевидно, что минимальной нормальной теорией (и даже логикой) является логика $\mathbf{K}$.

Лемма 5.2. *Теории и логики преобразуются следующим образом при взятии несвязной суммы моделей или шкал. Пусть $M = \biguplus_{i \in I} M_i$, $F = \biguplus_{i \in I} F_i$, $i \in I$, $a \in W_i$, тогда*

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \mathsf{Theory}(M, \langle i, a\rangle) & = & \mathsf{Theory}(M_i, a), & \mathsf{Theory}(M) & = & \bigcap_{i \in I} \mathsf{Theory}(M_i), \\ \mathsf{Logic}(F, \langle i, a\rangle) & = & \mathsf{Logic}(F_i, a), & \mathsf{Logic}(F) & = & \bigcap_{i \in I} \mathsf{Logic}(F_i). \end{array}$$

Лемма 5.3. *Теории и логики преобразуются следующим образом при взятии порожденной подмодели или подшкалы. Пусть $M' \hookrightarrow M$, $F' \hookrightarrow F$, $a \in W' \subseteq W$, тогда*

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \mathsf{Theory}(M, a) & = & \mathsf{Theory}(M', a), & \mathsf{Theory}(M) & \subseteq & \mathsf{Theory}(M'), \\ \mathsf{Logic}(F, a) & = & \mathsf{Logic}(F', a), & \mathsf{Logic}(F) & \subseteq & \mathsf{Logic}(F'). \end{array}$$

Лемма 5.4. *Теории и логики преобразуются следующим образом при наличии p-морфизма между моделями или шкалами. Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$, $f\colon F \twoheadrightarrow F'$ (т.е. f — сюръекция), $a \in W$, $f(a) = a'$. Тогда*

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \mathsf{Theory}(M, a) & = & \mathsf{Theory}(M', a'), & \mathsf{Theory}(M) & = & \mathsf{Theory}(M'), \\ \mathsf{Logic}(F, a) & \subseteq & \mathsf{Logic}(F', a'), & \mathsf{Logic}(F) & \subseteq & \mathsf{Logic}(F'). \end{array}$$

Без требования сюръективности мы имеем лишь (обратите внимание, в какую сторону включение):

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \mathsf{Theory}(M, a) & = & \mathsf{Theory}(M', a'), & \mathsf{Theory}(M) & \supseteq & \mathsf{Theory}(M'), \\ \mathsf{Logic}(F, a) & \subseteq & \mathsf{Logic}(F', a'). & & & \end{array}$$

5.1 Применения операций

Следующее утверждение показывает, что теории *классов* моделей не дают ничего нового — все их разнообразие достигается уже среди теорий отдельных моделей. Аналогично для логик шкал.

Теорема 5.5. *Логика непустого класса шкал является логикой некоторой шкалы.*
Теория непустого класса моделей является теорией некоторой модели.

Доказательство. Докажем для шкал; для моделей аналогично. Пусть $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$, где класс шкал $\mathbb{K} \neq \varnothing$. Для каждой $A \notin L$ существует шкала $F_A \in \mathbb{K}$, такая что $F_A \not\models A$. Берем несвязную сумму шкал: $F := \biguplus_{A \notin L} F_A$. Тогда для любой формулы A верны эквивалентности (а значит, $L = \mathsf{Logic}(F)$):

$$A \in L \quad \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \quad \mathbb{K} \models A \quad \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \quad \forall B \notin L\ F_B \models A \quad \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \quad F \models A.$$

Здесь (1) ввиду равенства $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$; (3) по свойству $\uplus$; импликация (2)($\Rightarrow$) очевидна; импликация (2)($\Leftarrow$) доказывается просто: $\mathbb{K} \not\models A \;\Rightarrow\; A \notin L \;\Rightarrow\; F_A \not\models A$. $\square$

Напомним, что *полной* называется логика, являющаяся логикой некоторого класса шкал.

Логика $\mathbf{Triv} = \mathbf{K} + \Box p \leftrightarrow p$ есть логика одноточечной *рефлексивной* шкалы.

Логика $\mathbf{Ver} = \mathbf{K} + \Box p \leftrightarrow \top$ есть логика одноточечной *иррефлексивной* шкалы.

Строго содержит эти логики лишь противоречивая логика (множество всех формул). Следующий результат означает, что среди непротиворечивых логик эти две логики — единственные максимальные.

Теорема 5.6 (Д. Макинсон, 1971; слабая форма[34])**.**
Всякая полная непротиворечивая логика содержится в **Triv** *или в* **Ver**.

Доказательство. Пусть $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$, где класс шкал $\mathbb{K} \neq \varnothing$, ибо логика L непротиворечива. Фиксируем какую-нибудь шкалу $F = (W, R) \in \mathbb{K}$. Возможны два случая.

1) В шкале F есть точка без последователей: $\exists a \in W\ \ R(a) = \varnothing$. Тогда подшкала $F' \hookrightarrow F$, порожденная точкой a, является одноточечной иррефлексивной шкалой и мы имеем включения:

$$L \;=\; \mathsf{Logic}(\mathbb{K}) \;\subseteq\; \mathsf{Logic}(F) \;\subseteq\; \mathsf{Logic}(F') \;=\; \mathbf{Ver}.$$

2) У каждой точки шкалы F есть последователь: $\forall a \in W\ \exists b \in W\colon a\,R\,b$. Тогда это условие гарантирует, что из шкалы F существует (очевидным образом задаваемый) p-морфизм на одноточечную рефлексивную шкалу F''. Следовательно,

$$L \;=\; \mathsf{Logic}(\mathbb{K}) \;\subseteq\; \mathsf{Logic}(F) \;\subseteq\; \mathsf{Logic}(F'') \;=\; \mathbf{Triv}.$$

Теорема доказана. $\square$

[34]Макинсон доказал эту теорему для любой нормальной логики, но его доказательство использует алгебраическую семантику модальной логики, которую мы здесь не рассматривали.

6 Модально насыщенные и модально компактные модели

В этом разделе $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$ — две модели Крипке, $a \in W$, $a' \in W'$. Говорим, что множество формул Γ *выполнимо в подмножестве* $X \subseteq W$, если $M, a \models \Gamma$ для некоторой $a \in X$. Сначала напомним следующее определение и факт.

Определение 6.1. Модель M — *модально насыщенная* (м.н.), если (эквивалентные определения):

- для любого множества модальных формул Γ и любой точки $a \in W$ верно следующее:

  если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $R(a)$,
  то и всё множество формул Γ выполнимо в $R(a)$.

- для любого множества модальных формул Γ, замкнутого относительно конъюнкции, и любой точки $a \in W$ верно следующее:

  если каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в $R(a)$,
  то и всё множество формул Γ выполнимо в $R(a)$.

Вспомним, что всегда из $(M, a) \simeq (M', a')$ следует $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a')$.

Лемма 6.2. *Пусть модели M и M' модально насыщенные. Тогда:*

$$(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a') \quad \Longrightarrow \quad (M, a) \simeq (M', a').$$

Доказательство. Отношение $\equiv_{\mathsf{ML}}$ является бисимуляцией (теорема 4.5 в лекциях 2015–2016 года). □

Для получения глобального аналога этого факта нужно дополнительное понятие.

Определение 6.3. Модель M — *модально компактная* (м.к.), если (эквивалентные определения):

- для любого множества модальных формул Γ верно следующее:

  если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в M,
  то и всё множество формул Γ выполнимо в M.

- для любого множества модальных формул Γ, замкнутого относительно конъюнкции, верно:

  если каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в M,
  то и всё множество формул Γ выполнимо в M.

Модели M и M' *глобально бисимулируют* (обозначение: $M :\simeq: M'$), если существует бисимуляция Z между M и M', такая что $\mathsf{Dom}(Z) = W$, $\mathsf{Ran}(Z) = W'$. Очевидно, из $M :\simeq: M'$ следует $M \equiv_{\mathsf{ML}} M'$.

Лемма 6.4. *Пусть модели M и M' модально насыщенные и модально компактные. Тогда:*

$$M \equiv_{\mathsf{ML}} M' \quad \Longrightarrow \quad M :\simeq: M'.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что отношение $\equiv_{\mathsf{ML}}$ глобально, то есть $\mathsf{Dom}(\equiv_{\mathsf{ML}}) = W$ и $\mathsf{Ran}(\equiv_{\mathsf{ML}}) = W'$, ибо тогда, согласно *доказательству* леммы 6.2, оно будет являться бисимуляцией (причем глобальной). В силу симметрии достаточно доказать, что $\mathsf{Ran}(\equiv_{\mathsf{ML}}) = W'$.

Берем любую точку $a' \in W'$, положим $T = \mathsf{Theory}(M', a')$. Надо доказать, что $\exists a \in W$ такая, что $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M', a')$, то есть (поскольку T — теория *точки*) $M, a \models T$. Другими словами, надо доказать, что множество формул T выполнимо в M. Ввиду модальной компактности модели M и замкнутости T относительно конъюнкции, достаточно доказать, что каждая формула $A \in T$ выполнима в M. Допустим, A не выполнима в M, то есть $M \models \neg A$. Тогда ввиду $M \equiv_{\mathsf{ML}} M'$ получаем $M' \models \neg A$, а значит $M', a' \models \neg A$, что не так, поскольку $A \in T$ и $M', a' \models T$. (В Handbook of ML, p.299, Prop.87 неверно!) □

Для доказательства того, что $\mathsf{Ran}(\equiv_{\mathsf{ML}}) = W'$, использовали то, что истинность модальных формул переносится с модели M на модель M'. Этот факт полезно сформулировать в явном виде.

Будем писать $M \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} M'$, если для каждой формулы A из $M \models A$ следует $M' \models A$. Будем писать $M \simeq: M'$ (и говорить, что модель M' является *бисимуляционным образом* модели M), если существует бисимуляция Z между M и M', такая что $\mathsf{Ran}(Z) = W'$. Аналогично определяется отношение $M :\simeq M'$. Очевидно, что если $M :\simeq M'$ и $M \simeq: M'$, то $M :\simeq: M'$, поскольку объединение двух (и даже любого количества) бисимуляций является бисимуляцией. Итак, в лемме 6.4 фактически доказана следующая

Лемма 6.5. *Пусть модели M и M' модально насыщенные и модально компактные. Тогда:*

$$M \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} M' \quad \Longrightarrow \quad M \simeq: M'.$$

6.1 Каноническая модель нормальной теории

Ранее (лекции 2014–2015 года, глава 6) мы строили каноническую модель $M_L = (W_L, R_L, V_L)$ для непротиворечивой нормальной *логики* L. Проанализировав конструкцию, можно придти к выводу, что она применима не только к нормальным логикам, но и к нормальным *теориям*. Для разнообразия дадим другое (но эквивалентное прежнему) определение точек этой модели.

Теория T называется *непротиворечивой*, если не существует формулы A, такой что $A, \neg A \in T$.

Теория T называется *полной*, если для каждой формулы A имеет место: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Определение 6.6. ***Каноническая модель*** $M_T = (W_T, R_T, V_T)$ нормальной теории T задается так:

- $W_T = \{\, x \mid x$ — полная непротиворечивая теория и $x \supseteq T \,\}$;
- $x \, R_T \, y \;\leftrightharpoons\; \forall A \in \mathsf{Fm} \;\; (\Box A \in x \Rightarrow A \in y\,)$; иначе говоря, $\sharp x \subseteq y$, где обозначено $\sharp x := \{B \mid \Box B \in x\}$;
- оценка V_T задается так: $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x$, для каждой переменной $p \in \mathsf{Var}$.

Множество формул Γ называется *T-непротиворечивым*, если не существует конечного подмножества $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Gamma$, такого что $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \in T$.

Упражнение 6.7. Докажите, что новое определение точек множества W_T совпадает с прежним; напомним его: $W_T = \{\, x \mid x$ — максимальное T-непротиворечивое множество формул $\}$.

Сохраняется прежнее доказательство основных утверждений о канонической модели:
– всякое T-непротиворечивое множество формул Γ содержится в некотором $x \in W_T$;
– для каждой формулы A и каждого $x \in W_T$ имеем: $M_T, x \models A \;\Leftrightarrow\; A \in x$;
– для каждой формулы A имеем: $M_T \models A \;\Leftrightarrow\; A \in T$.

Нормальность теории T нужна при доказательстве второго из этих утверждений: там требуется из $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A) \in T$ получить $(\Box B_1 \wedge \ldots \wedge \Box B_n \to \Box A) \in T$, для этого нужно правило (Nec).

Лемма 6.8. *Каноническая модель всякой теории является модально компактной.*

Доказательство. Пусть каждое конечное подмножество $\{A_1, \dots, A_n\}$ множества формул Γ выполнимо в модели M_T. Это значит, что для некоторого $x \in W_T$ имеем $M_T, x \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, откуда $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \in x$. Тогда $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \notin T$, иначе ввиду $T \subseteq x$ теория x оказалась бы противоречивой. Таким образом, множество Γ является T-непротиворечивым и, следовательно, содержится в некотором $y \in W_T$. Значит, $M_T, y \models \Gamma$, то есть Γ выполнимо в модели M_T. $\Box$

Лемма 6.9. *Каноническая модель всякой теории является модально насыщенной.*

Доказательство. Пусть $x \in W_T$ и каждое конечное подмножество множества формул Γ выполнимо в $R_T(x)$. Чтобы доказать, что Γ выполнимо в $R_T(x)$, достаточно проверить, что множество $\Gamma' = \Gamma \cup \sharp x$ является T-непротиворечивым, ибо тогда оно содержится в некотором $z \in W_T$, для которого мы имеем $\sharp x \subseteq z$, то есть $x \, R_T \, z$, и $\Gamma \subseteq z$, а значит, $z \models \Gamma$.

Для любых $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$ и $B_1, \dots, B_m \in \sharp x$ множество $\{A_1, \dots, A_n\}$ выполнимо в $R_T(x)$. Это означает, что для некоторого $y \in R_T(x)$ имеем $y \models A_i$ и все $A_i \in y$. Поскольку $\sharp x \subseteq y$, то все $B_j \in y$. Значит, $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_m) \in y$. Тогда $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_1 \wedge \ldots \wedge B_m) \notin T$, иначе ввиду $T \subseteq y$ теория y была бы противоречивой. Таким образом, множество Γ' является T-непротиворечивым. $\Box$

Лемма 6.10. *Пусть $T \subseteq T'$ — нормальные теории. Тогда $M_{T'} \hookrightarrow M_T$ (порожденная подмодель).*

Доказательство. Очевидно, что $W_{T'} \subseteq W_T$, ибо из $T' \subseteq x$ следует $T \subseteq x$. Отношение R_T и оценка V_T задаются «равномерно» (без упоминания теории T). Значит, остается проверить, что «маленькое» множество $W_{T'}$ замкнуто по «большому» отношению R_T.

Пусть $x \in W_{T'}$ и $x \, R_T \, y$. Надо доказать, что $y \in W_{T'}$, то есть $T' \subseteq y$. Имеем: если $A \in T'$, то $\Box A \in T'$ (по нормальности теории T), тогда $\Box A \in x$ (ведь $T' \subseteq x$); и значит, $A \in y$ (ввиду $x \, R_T \, y$). $\Box$

Модель называется *модально различимой*, если любые две ее точки модально не эквивалентны.

Лемма 6.11. *Каноническая модель модально различима.*

Доказательство. Модальная теория всякой точки $x \in W_T$, то есть множество формул, истинных в x, есть в точности множество x: $\mathsf{Theory}(M_T, x) = x$. Поэтому теории различных точек — различны. $\square$

Для всякой модели M обозначим через M^{can} модель M_T теории $T = \mathsf{Theory}(M)$. Итог раздела:

Теорема 6.12. *Для всякой модели M модель M^{can} является модально насыщенной, модально компактной, а также модально эквивалентной исходной модели: $M \equiv_{\mathsf{ML}} M^{\mathsf{can}}$.*

Как следствие, у модально эквивалентных моделей одна и та же каноническая модель (ибо она строится по *теории* исходной модели):

$$\text{если } M \equiv_{\mathsf{ML}} N, \text{ то } M^{\mathsf{can}} = N^{\mathsf{can}}.$$

В частности, поскольку $M^{\mathsf{can}} \equiv_{\mathsf{ML}} M$, мы получаем $(M^{\mathsf{can}})^{\mathsf{can}} = M^{\mathsf{can}}$.

Лемма 6.13. *Пусть модель M — м.к. и м.н. Тогда $M \twoheadrightarrow M^{\mathsf{can}}$ (р-морфный образ).*

Доказательство. Поскольку обе модели M и M^{can} являются м.к. и м.н. и они модально эквивалентны, то по лемме 6.4 имеется глобальная бисимуляция $M :\simeq: M^{\mathsf{can}}$; более того, этой бисимуляцией является отношение $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Но по лемме 6.11 в модели M^{can} нет модально эквивалентных точек. Значит, отношение $\equiv_{\mathsf{ML}}$ не может соединять какую-либо точку модели M с более чем одной точкой модели M^{can}. Другими словами, это отношение является *функцией* (причем всюду определенной и сюръективной) из M в M^{can}. Это и означает, что модель M^{can} является р-морфным образом модели M. $\square$

Заметим, что условие «M является м.н.» обеспечивает то, что $\equiv_{\mathsf{ML}}$ будет бисимуляцией, а условие «M является м.к.» гарантирует, что эта бисимуляция сюръективна. Ее функциональность и всюду определенность гарантируется свойствами M^{can}.

Выпишем в явном виде ту функцию f, которая является р-морфизмом из M в M^{can}. Эта функция есть $\equiv_{\mathsf{ML}}$, то есть она соединяет точки модели M и M^{can}, имеющие одну и ту же модальную теорию; но модальная теория точки x модели M^{can} есть в точности x. Поэтому $f(a) = \mathsf{Theory}(M, a)$, для $a \in W$.

Связь с фильтрацией

На получение модели $M^{\mathsf{can}} = (W^{\mathsf{can}}, R^{\mathsf{can}}, V^{\mathsf{can}})$ из модели M можно смотреть и с другой точки зрения. Отождествим в модели M точки, модально не отличимые друг от друга. Каждый получившийся класс эквивалентности $[a]$ однозначно задается своей модальной теорией $\mathsf{Theory}(M, a)$, то есть однозначно соответствует некоторой точке из W^{can}. На этих классах эквивалентности естественным образом вводится отношение достижимости:

$$[a]\, R^{\mathsf{can}}\, [b] \quad \leftrightharpoons \quad \forall A \in \mathsf{Fm}\ (M, a \models \Box A \Rightarrow M, b \models A),$$

а также оценка V^{can} задается: $[a] \models p \Leftrightarrow a \models p$. Такая конструкция носит специальное название — *фильтрация* модели M по отношению $\equiv_{\mathsf{ML}}$, более точно, *максимальной* фильтрацией (если не требовать от понятия фильтрации того, что результирующая модель конечна).

При таком построении могут возникнуть два момента:
– получатся не все точки из W^{can} (чтобы получились все, нужна модальная компактность модели M);
– сопоставление каждой точке её класса эквивалентности $a \mapsto [a]$ может не быть р-морфизмом. Конечно, условие (var) из определения р-морфизма выполнено автоматически. Условие (zig), то есть существование в M^{can} требуемого напарника каждой точки из M, гарантируется тем, что модель M^{can} всегда модально насыщенная. Условие же (zag) можно гарантировать, потребовав модальной насыщенности модели M.

6.2 Модальная насыщенность ультра-расширения модели

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель. Для $X \subseteq W$ обозначим:

$$\begin{array}{rcl} \Diamond X &=& \{\, a \in W \mid \exists b \in W \colon a\,R\,b \ \&\ b \in X\,\}, \\ \Box X &=& \{\, a \in W \mid \forall b \in W \colon a\,R\,b \Rightarrow b \in X\,\}. \end{array}$$

Обозначая $V(A) = \{a \in W \mid M, a \models A\}$, легко проверить, что $V(\Box A) = \Box V(A)$ и $V(\Diamond A) = \Diamond V(A)$.

Определение 6.14. ***Ультра-расширение*** $M^{\mathrm{ue}} = (W^{\mathrm{ue}}, R^{\mathrm{ue}}, V^{\mathrm{ue}})$ модели $M = (W, R, V)$ строится так:

- $W^{\mathrm{ue}} \ = \ \{u \subseteq 2^W \mid u$ есть ультрафильтр над $W\}$;
- $u\,R^{\mathrm{ue}}\,v \quad \leftrightharpoons \quad \forall X \subseteq W\ (\,\Diamond X \in u \ \Leftarrow\ X \in v\,)$
  $\Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq W\ (\,\Box X \in u \ \Rightarrow\ X \in v\,)$;
- $u \models p \ \leftrightharpoons\ V(p) \in u$.

Основная теорема об ультра-расширениях: $M^{\mathrm{ue}}, u \models A \Leftrightarrow V(A) \in u$. См. файл про ТГТ.

Лемма 6.15. *Ультра-расширение всякой модели является модально компактным.*

Доказательство. Пусть каждое конечное подмножество $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$ множества формул Γ выполнимо в M^{ue}, то есть существует u, такой что $M^{\mathrm{ue}}, u \models A_i$, а значит, $V(A_i) \in u$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда множество $V(A_1) \cap \ldots \cap V(A_n)$ принадлежит ультрафильтру u и потому непусто. Таким образом, семейство множеств $\{V(A) \mid A \in \Gamma\}$ центрировано. Следовательно, оно содержится в некотором ультрафильтре v над W, и тем самым $M^{\mathrm{ue}}, v \models \Gamma$. Значит, Γ выполнимо в M^{ue}. $\Box$

Лемма 6.16. *Ультра-расширение всякой модели является модально насыщенным.*

Доказательство. Пусть каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $R^{\mathrm{ue}}(u)$, где $u \in W^{\mathrm{ue}}$. Докажем, что всё Γ выполнимо в $R^{\mathrm{ue}}(u)$, то есть что существует ультрафильтр $v \in W^{\mathrm{ue}}$, такой что

– $u\,R^{\mathrm{ue}}\,v$, то есть v содержит семейство множеств $S_1 := \{X \subseteq W \mid \Box X \in u\}$;

– $M^{\mathrm{ue}}, v \models \Gamma$, то есть v содержит семейство множеств $S_2 := \{V(A) \mid A \in \Gamma\}$.

Для этого достаточно доказать, что семейство $S_1 \cup S_2$ центрировано. Возьмем произвольные $X_1, \ldots, X_m \in S_1$ и $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$; надо проверить, что

$$X_1 \cap \ldots \cap X_m \,\cap\, V(A_1) \cap \ldots \cap V(A_n) \neq \varnothing.$$

Но по условию множество Δ выполнимо в $R^{\mathrm{ue}}(u)$, то есть существует такой ультрафильтр w, что

– $u\,R^{\mathrm{ue}}\,w$, то есть w содержит семейство множеств S_1, в частности, $X_i \in w$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$;

– $M^{\mathrm{ue}}, w \models \Delta$, то есть $V(A_j) \in w$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$.

Итак, все X_i и все $V(A_j)$ принадлежат ультрафильтру w, а значит, их пересечение непусто. $\Box$

Лемма 6.17. $M \equiv_{\mathsf{ML}} M^{\mathrm{ue}}$.

Доказательство. Обозначим через a^{ue} главный ультрафильтр, порожденный точкой $a \in W$. Из основной теоремы об ультра-расширении следует, что $M, a \models A \Leftrightarrow M^{\mathrm{ue}}, a^{\mathrm{ue}} \models A$ для всех формул A. Поэтому для каждой формулы A имеем: если $M^{\mathrm{ue}} \models A$, то $M^{\mathrm{ue}}, a^{\mathrm{ue}} \models A$, а значит и $M, a \models A$, для всех $a \in W$; следовательно, $M \models A$.

Обратно:[35] если $M \models A$, то $V(A) = W$, а тогда $V(A) \in u$ для каждого ультрафильтра $u \in W^{\mathrm{ue}}$, и следовательно, $M^{\mathrm{ue}}, u \models A$; поскольку это верно для всех $u \in W^{\mathrm{ue}}$, мы заключаем, что $M^{\mathrm{ue}} \models A$. $\Box$

Лемма 6.18. *Связь между теорией (логикой) исходной модели (шкалы) и ее ультра-расширения:*

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathsf{Theory}(M, a) &=& \mathsf{Theory}(M^{\mathrm{ue}}, a^{\mathrm{ue}}), && \mathsf{Logic}(F, a) &\supseteq& \mathsf{Logic}(F^{\mathrm{ue}}, a^{\mathrm{ue}}), \\ \mathsf{Theory}(M) &=& \mathsf{Theory}(M^{\mathrm{ue}}), && \mathsf{Logic}(F) &\supseteq& \mathsf{Logic}(F^{\mathrm{ue}}). \end{array}$$

[35] Казалось бы, в M^{ue} помимо главных ультрафильтров есть много неглавных, истинность формул в которых не связана напрямую с истинностью формул в какой-либо точке модели M. Тем не менее, обратная импликация тоже имеет место!

Примечание. В Handbook of Modal Logic, page 297, Corollary 80 написана лишь одна импликация: $M^{\mathrm{ue}} \models A \Rightarrow M \models A$. Чуть ниже они (ошибочно) утверждают, что обратная импликация не имеет места; но в качестве «контрпримера» (Example 81) приводят аргумент, касающийся шкал (для которых действительно импликация необратима), а не моделей.

7 Элементарные и канонические логики

Мы докажем (обещанную в лекциях 2015–2016 г., раздел 1.3) первую импликацию в следующей цепи:

$$\boxed{L \text{ элементарна} \implies L \text{ канонична} \implies L \text{ сильно полна} \implies L \text{ полна}}$$

7.1 Компактность логики первого порядка

Напомним теорему о компактности для языка (и структур) первого порядка.

Теорема 7.1 (Компактность)**.** *Пусть* Γ *— некоторое множество формул первого порядка (не обязательно замкнутых) некоторой сигнатуры* Σ*. Если каждое конечное подмножество* $\Delta \subseteq \Gamma$ *выполнимо, то и всё множество формул* Γ *выполнимо.*

Из нее без труда получается следующая «релятивизованная» теорема о компактности. Выполнимость множества формул Γ в классе структур $\mathbb{K}$ означает, что существует модель из $\mathbb{K}$ (и оценка свободных переменных, если таковые переменные имеются в Γ), в которой все формулы из Γ истинны.

Теорема 7.2 (Компактность элементарных классов)**.** *Пусть* Γ *— некоторое множество формул первого порядка (не обязательно замкнутых) некоторой сигнатуры* Σ*, и пусть* $\mathbb{K}$ *— элементарный класс структур сигнатуры* Σ*. Если каждое конечное подмножество* $\Delta \subseteq \Gamma$ *выполнимо в* $\mathbb{K}$*, то и всё множество формул* Γ *выполнимо* $\mathbb{K}$*.*

Доказательство. Пусть класс $\mathbb{K}$ задан множеством формул первого порядка Φ. Применим предыдущую теорему 7.1 к множеству формул $\Gamma' = \Gamma \cup \Phi$. По условию нашей теоремы, каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$; это значит, что для каждого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Gamma$ множество $\Delta \cup \Phi$ выполнимо, поэтому тем более каждое конечное подмножество $\Delta' \subseteq \Gamma'$ выполнимо. По предыдущей теореме всё множество Γ' выполнимо, то есть множество Γ выполнимо в классе $\mathbb{K}$. $\square$

7.2 Модальная компактность элементарных классов шкал

Класс шкал $\mathbb{K}$ называется *элементарным*, если он задается некоторым (быть может бесконечным) множеством замкнутых формул первого порядка сигнатуры $\{\mathsf{R}, =\}$.

Говорят, что множество модальных формул Γ *выполнимо* в классе шкал $\mathbb{K}$, если существует шкала $F = (W, R) \in \mathbb{K}$, основанная на ней модель $M = (F, V)$ и точка $a \in W$, такие что $M, a \models \Gamma$.

Определение 7.3. Класс шкал $\mathbb{K}$ — *модально компактный*, если (эквивалентные определения):

- для любого множества модальных формул Γ верно следующее:

  если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в классе $\mathbb{K}$,
  то и всё множество формул Γ выполнимо в классе $\mathbb{K}$.

- для любого множества модальных формул Γ, замкнутого относительно конъюнкции, верно:

  если каждая формула $A \subseteq \Gamma$ выполнима в классе $\mathbb{K}$,
  то и всё множество формул Γ выполнимо в классе $\mathbb{K}$.

Вспомним, что имеется *стандартный перевод*, преобразующий модальную формулу A в формулу первого порядка сигнатуры $\{R, P_0, P_1, \ldots\}$ (подробнее см. лекции 2015–2016, глава 2):

$$\bot^*(x) \;=\; \bot, \quad p_i^*(x) \;=\; P_i(x),$$
$$(A \to B)^*(x) \;=\; A^*(x) \to B^*(x),$$
$$(\Box A)^*(x) \;=\; \forall y\,(\mathsf{R}(x,y) \to A^*(y)).$$

Здесь y — свежая переменная. Имеет место следующая связь семантики формул A и $A^*(x)$.

Лемма 7.4. $M, a \models A \quad \iff \quad M \models A^*[a]$.

Лемма 7.5. *Всякий элементарный класс шкал является модально компактным.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K}$ — элементарный класс шкал, то есть он задается некоторым множеством формул Φ первого порядка сигнатуры $\{R, =\}$. Рассмотрим все модели, основанные на его шкалах:

$$\mathcal{M} := \{M = (F, V) \mid F \in \mathbb{K}\}.$$

Этот класс структур сигнатуры $\{R, =, P_0, P_1, \ldots\}$ тоже элементарный, ибо задается тем же множеством формул Φ сигнатуры $\{R, =\}$. Для множества модальных формул Γ обозначим $\Gamma^*(x) := \{A^*(x) \mid A \in \Gamma\}$.

> **Утверждение.** Следующие два условия эквивалентны:
>
> - множество модальных формул Γ выполнимо в классе шкал $\mathbb{K}$;
> - множество формул первого порядка $\Gamma^*(x)$ выполнимо в классе моделей $\mathcal{M}$.

Поэтому модальная компактность класса шкал $\mathbb{K}$ получается применением теоремы о компактности 7.2 к множеству формул первого порядка $\Gamma^*(x)$ и классу структур $\mathcal{M}$. $\square$

7.3 Теорема об ω-насыщении моделей первого порядка

Приведем без доказательства известный (и часто используемый) результат о языке первого порядка.

Теорема 7.6 (Об ω-насыщении моделей первого порядка)**.** *Для каждой модели M сигнатуры Σ существует модель M' той же сигнатуры, такая что $M \equiv_{\mathbf{FO}} M'$ и модель M' является ω-насыщенной.*[36]

Мы не будем давать определение ω-насыщенности, а приведем следующую лемму.

Лемма 7.7. *Если модель Крипке является ω-насыщенной, то она является м.н. и м.к.*

7.4 Теорема Файна о каноничности

Логика L называется *элементарной*, если она есть логика некоторого элементарного класса шкал $\mathbb{K}$. Логика L называется *канонической*, если она общезначима на своей канонической шкале: $F_L \models L$.

Теорема 7.8 (Файн,[37] 1973)**.** *Всякая элементарная логика канонична.*

Доказательство. Дано: $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — элементарный класс шкал. Заметим: $\mathbb{K} \models L$.

Надо доказать: $F_L \models L$. Возьмем произвольный $x \in W_L$ и докажем, что $F_L, x \models L$.

(1) Множество формул x выполнимо в классе шкал $\mathbb{K}$.

Действительно, множество формул x замкнуто относительно конъюнкции, и для любой формулы $A \in x$ мы имеем $L \nvdash \neg A$. Поскольку L — логика класса $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K} \not\models \neg A$, то есть формула A выполнима в $\mathbb{K}$. Но класс $\mathbb{K}$ модально компактен; значит, всё множество x выполнимо в $\mathbb{K}$.

(2) Итак, существуют шкала $F = (W, R) \in \mathbb{K}$, модель $M = (F, V)$ и точка $a \in W$, такие что $M, a \models x$.

Заметим, что $F \models L$, а значит и $M \models L$. Обозначим $T := \mathsf{Theory}(M)$. Ясно: $T \subseteq x$, то есть $x \in M_T$.

(3) Очевидно: $L \subseteq T$. Значит, $M_T \hookrightarrow M_L$ и тем самым $F_T \hookrightarrow F_L$ по лемме 6.10.

(4) Возьмем ω-насыщение модели M — м.н. и м.к. модель $M' = (F', V')$, причем $M \equiv_{\mathbf{FO}} M'$.

Значит, $M \equiv_{\mathsf{ML}} M'$ и тем самым $\mathsf{Theory}(M') = T$. Кроме того, $F \equiv_{\mathbf{FO}} F'$, а значит $F' \in \mathbb{K}$ (ведь элементарный класс замкнут относительно элементарной эквивалентности). Поэтому $F' \models L$.

(5) По лемме 6.13 имеется сюръективный p-морфизм $M' \twoheadrightarrow M_T$ и тем самым $F' \twoheadrightarrow F_T$.

Ввиду $F' \models L$ получаем $F_T \models L$. В частности $F_T, x \models L$. Но $F_T \hookrightarrow F_L$. Поэтому $F_L, x \models L$. $\square$

---

[36] Для справки: модель M' получается из M взятием ультрастепени M^U. Известно, что ультрастепень всегда элементарно эквивалентна исходной модели: $M \equiv_{\mathbf{FO}} M^U$. Для получения ω-насыщенной модели M^U нужно взять *счетно-неполный* ультрафильтр U, если сигнатура счётна (если она несчетна, то нужны более сложно устроенные ультрафильтры).

[37] Kit Fine, Some connections between elementary and modal logic. In S. Kanger (ed), *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium*, University of Uppsala, Sweden, April 9–11, 1973, pp. 15–31. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, volume 82. North-Holland Publishing Company, 1975.

7.5 Теорема Гольдблатта об ультра-каноничности

Примечание. В изложении теоремы Файна мы постарались избежать ультрафильтров, ультрапроизведений, ультрастепеней. В этом же разделе они потребуются существенно, в самом определении понятия.

Определение 7.9. Логика L — *ультра-каноническая*, если $F_L{}^U \models L$ для каждого ультрафильтра U.

Очевидно, что всякая ультра-каноническая логика является канонической. Поэтому следующая теорема является усилением теоремы Файна.

Теорема 7.10 (Гольдблатт,[38] 2015)**.** *Всякая элементарная логика является ультра-канонической.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 7.11 (О p-морфизме ультрапроизведений шкал)**.**

(а) *Пусть имеются p-морфизмы шкал $h_i\colon F_i \to G_i$ для каждого $i \in I$.*
Пусть U — произвольный ультрафильтр над I.
Обозначим ультрапроизведения $F := \prod^U_{i\in I} F_i$ и $G := \prod^U_{i\in I} G_i$.
Тогда существует p-морфизм шкал $h\colon F \to G$, а именно, $h([(a_i)_{i\in I}]) = [(h_i(a_i))_{i\in I}]$.

(б) *Если $c = (c_i)_{i\in I}$ и $c_i \in \mathsf{Ran}(h_i)$ для всех $i \in I$, то $[c] \in \mathsf{Ran}(h)$.*

(в) *В частности, если все p-морфизмы h_i сюръективны, то и h сюръективен.*

Доказательство. Рутинное. Обозначения: $F_i = (W_i, R_i)$, $F = (W, R)$, $G_i = (W'_i, R'_i)$, $G = (W', R')$, элементы W являются классами эквивалентности $[a]$ последовательностей $a = (a_i)_{i\in I}$, где $a_i \in W_i$.

(а) Докажем, что $h([a])$ определен корректно. Пусть $[a] = [b]$, то есть $\{i \mid a_i = b_i\} \in U$. Очевидно включение: $\{i \mid a_i = b_i\} \subseteq \{i \mid h_i(a_i) = h_i(b_i)\} \in U$. Значит, $[(h_i(a_i))_{i\in I}] = [(h_i(b_i))_{i\in I}]$.

Докажем, что h является p-морфизмом.

(zig) Пусть $[a]\, R\, [b]$, то есть $\{i \mid a_i\, R_i\, b_i\} \in U$. Проверим, что $h([a])\, R'\, h([b])$, то есть $[(h_i(a_i))_{i\in I}]\, R'\, [(h_i(b_i))_{i\in I}]$. Это вытекает из включения $\{i \mid a_i\, R_i\, b_i\} \subseteq \{i \mid h_i(a_i)\, R'_i\, h_i(b_i)\} \in U$, ведь каждый h_i удовлетворяет условию (zig).

(zag) Пусть $h([a])\, R'\, [c]$; построим такой $[b] \in W$, что $[a]\, R\, [b]$ и $h([b]) = [c]$.
Имеем: $[(h_i(a_i))_{i\in I}]\, R'\, [c]$, то есть $S := \{i \mid h_i(a_i)\, R'_i\, c_i\} \in U$. Для каждого $i \in S$, поскольку h_i удовлетворяет условию (zag), существует такая точка $b_i \in W_i$, что $a_i\, R_i\, b_i$ и $h_i(b_i) = c_i$. Для остальных же индексов $i \notin S$ фиксируем произвольную точку $b_i \in W_i$. Покажем, что построенная последовательность $b = (b_i)_{i\in I}$ — искомая:
1) $[a]\, R\, [b]$, поскольку $S \subseteq \{i \mid a_i\, R_i\, b_i\} \in U$;
2) $h([b]) = [c]$, поскольку $S \subseteq \{i \mid h_i(b_i) = c_i\} \in U$.

(б) Условие избыточное; достаточно было потребовать, чтобы $S := \{i \mid c_i \in \mathsf{Ran}(h_i)\} \in U$.

Для каждого $i \in S$ возьмем тот $a_i \in W_i$, для которого $h_i(a_i) = c_i$; для остальных же индексов $i \notin S$ фиксируем произвольный элемент $a_i \in W_i$. Тогда последовательность $a = (a_i)_{i\in I}$ такова, что $h([a]) = [c]$, поэтому $[c] \in \mathsf{Ran}(h)$. $\square$

Приступим к доказательству теоремы Гольдблатта.

Доказательство. Дано: $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — элементарный класс шкал. Заметим: $\mathbb{K} \models L$. Пусть U — произвольный ультрафильтр на некотором множестве $I \neq \varnothing$. Требуется доказать: $F_L{}^U \models L$.

В доказательстве теоремы Файна мы установили, что каждая точка x канонической шкалы F_L покрывается некоторым p-морфизмом h из некоторой шкалы F (там была F') из класса $\mathbb{K}$ в шкалу F_L:

$$\forall x \in W_L\ \exists F \in \mathbb{K}\ \exists \text{ p-морфизм } h\colon F \to F_L :\ x \in \mathsf{Ran}(h). \qquad (*)$$

Этого было достаточно: ибо тогда из $\mathbb{K} \models L$ вытекает $F \models L$ и далее $F_L, x \models L$.

Для доказательства теоремы Гольдблатта мы установим аналогичное свойство для шкалы $F_L{}^U$:

$$\forall [x] \in W_L{}^U\ \exists F \in \mathbb{K}\ \exists \text{ p-морфизм } h\colon F \to F_L{}^U :\ [x] \in \mathsf{Ran}(h). \qquad (**)$$

Итак, пусть $[x] \in W_L{}^U$, где последовательность $x = (x_i)_{i\in I}$, $x_i \in W_L$. Согласно (*), для каждой точки x_i этой последовательности существует шкала $F_i \in \mathbb{K}$ и p-морфизм $h_i\colon F_i \to F_L$, такие что $x_i \in \mathsf{Ran}(h_i)$.

Возьмем ультрапроизведение $F := \prod^U_{i\in I} F_i$ и ультрастепень $F_L{}^U$. Поскольку класс $\mathbb{K}$ элементарный, то он замкнут относительно ультрапроизведений, значит, $F \in \mathbb{K}$. По лемме 7.11, существует p-морфизм $h\colon F \to F_L{}^U$, причем $[x] \in \mathsf{Ran}(h)$ согласно пункту (б) этой леммы. $\square$

[38] Robert Goldblatt, *Fine's theorem on first-order complete modal logics*, 2015.

Ультра-каноничность не только следует из элементарности логики, но и равносильна ей:

Теорема 7.12 (Гольдблатт, 2015)**.** *Логика L элементарна $\iff$ она ультра-канонична.*

Доказательство. Пусть L ультра-канонична. Докажем, что L элементарна, а именно, является логикой следующего элементарного класса:[39] $\mathbb{K} = \langle F_L \rangle_{\mathbf{FO}} = [F_L]_{\mathbf{FO}}$, то есть $\mathsf{Logic}(\mathbb{K}) = L$.

($\subseteq$) $\mathsf{Logic}(\mathbb{K}) \subseteq \mathsf{Logic}(F_L) \subseteq \mathsf{Theory}(M_L) = L$.

($\supseteq$) Покажем, что $\mathbb{K} \models L$, то есть $[F_L] \models L$. Берем произвольную шкалу $F \equiv_{\mathbf{FO}} F_L$. По теореме Кейслера–Шелаха,[40] существуют ультрафильтры U, V такие, что $F^U \cong {F_L}^V$. Ввиду ультра-каноничности логики L имеем ${F_L}^V \models L$. Значит, $F^U \models L$. Поскольку общезначимость модальных формул сохраняется при «извлечени ультра-корня» (см. лемму 7.13 ниже), то $F \models L$. $\square$

Таким образом, картина теперь следующая:

$$\boxed{L \text{ элементарна} \iff L \text{ ультра-канонична} \implies L \text{ канонична} \implies L \text{ сильно полна} \implies L \text{ полна}}$$

Замечание. Буквально так же доказывается аналогичное утверждение, где вместо обычной канонической шкалы (со счетным множеством «порождающих» переменных Var) рассматривается каноническая шкала с κ переменными, для каждого фиксированного кардинала κ. В частности, модальные логики классов $\langle F_{L_\kappa} \rangle$ совпадают. Открытый вопрос: совпадают ли сами эти классы? То есть являются ли элементарно эквивалентными все канонические шкалы (для всех кардиналов κ) данной логики? (для каких логик это верно?)

Замечание. В общем случае теорема Файна не обратима. Однако она обратима для так называемых *субфреймовых* логик. Написать подробнее.

[39] Здесь $\langle F \rangle = \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}_{\mathbf{FO}}(F))$, $[F]_{\mathbf{FO}} = \{G \mid F \equiv_{\mathbf{FO}} G\}$. Поскольку семантика языка первого порядка согласована с отрицанием, то $\langle F \rangle = [F]$. Доказательство (элементарное) см. в лемме 8.12 в следующем разделе.

[40] Глубокая **теорема Кейслера–Шелаха** утверждает: *если две модели первого порядка M и N элементарно эквивалентны: $M \equiv_{\mathbf{FO}} N$, то существуют ультрафильтры U, V (на некоторых множествах I, J) такие, что соответствующие ультрастепени изоморфны: $M^U \cong N^V$.* Обратное тоже верно (тривиально).

7.6 Теорема Лося для моделей и шкал Крипке

Вспомним **Теорему Лося** применительно к моделям Крипке и модальным формулам (она является следствием обычной теоремы Лося для языка первого порядка, поскольку модальные формулы — с точки зрения моделей Крипке — это формулы первого порядка):

> *Для любых моделей Крипке $(M_i)_{i\in I}$, если обозначить их ультрапроизведение по некоторому ультрафильтру U через $M := \prod_{i\in I}^U M_i$, то для любой модальной формулы A имеем:*
>
> $$\{i \in I \mid M_i \models A\} \in U \qquad \Longleftrightarrow \qquad M \models A.$$
>
> *Как следствие, модель Крипке и ее ультрастепень модально эквивалентны: $M \equiv_{\mathsf{ML}} M^U$.*

Для общезначимости модальных формул на шкалах Крипке[41] имеет место лишь одна импликация:

Лемма 7.13. *Для любых шкал Крипке $(F_i)_{i\in I}$, если обозначить их ультрапроизведение по некоторому ультрафильтру U через $F := \prod_{i\in I}^U F_i$, то для любой модальной формулы A имеет место импликация:*

$$\{i \in I \mid F_i \models A\} \in U \qquad \Longleftarrow \qquad F \models A.$$

Доказательство. Допустим $\{i \mid F_i \models A\} \notin U$, тогда $X := \{i \mid F_i \not\models A\} \in U$. Для каждого $i \in X$ имеем $F_i \not\models A$, значит, $\exists M_i = (F_i, V_i)\ \exists a_i \in W_i$: $M_i, a_i \models \neg A$. Возьмем ультрапроизведение получившихся моделей по тому же ультрафильтру: $M := \prod_{i\in I}^U M_i$. Заметим, что эта модель — над шкалой F, то есть $M = (F, V)$. Для каждого $i \notin X$ в качестве a_i возьмем любой элемент из W_i; тем самым получили последовательность $a = (a_i)_{i\in I}$. Поскольку множество $\{i \in I \mid M_i, a_i \models \neg A\}$ содержит X, а значит, лежит в U, то по теореме Лося для моделей имеем: M, $[a] \models \neg A$. Таким образом, $M \not\models A$ и $F \not\models A$. □

Следствие 7.14. *Общезначимость модальных формул на шкалах анти-сохраняется при взятии ультрастепени шкалы (т.е. сохраняется при «извлечении ультракорня из шкалы»): $F^U \models A \Rightarrow F \models A$.*

Следствие 7.15. *Если класс шкал $\mathbb{K}$ задан множеством модальных формул Γ, то его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуто относительно ультрастепеней.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(\Gamma)$. Тогда: $F^U \in \mathbb{K} \iff F^U \models \Gamma \implies F \models \Gamma \iff F \in \mathbb{K}$. □

Следствие 7.16. *Если класс шкал $\mathbb{K}$ задан одной модальной формулой A, то его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуто относительно ультрапроизведений.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(A)$ и $F = \prod_{i\in I}^U F_i$. Надо доказать импликацию:
$\forall i \in I\ F_i \in \overline{\mathbb{K}} \implies F \in \overline{\mathbb{K}}$. По контрапозиции это равносильно следующему:
$F \in \mathbb{K} \implies \exists i \in I\ F_i \in \mathbb{K}$. Поскольку формула A задает класс $\mathbb{K}$, то это равносильно следующему:
$F \models A \implies \exists i \in I\ F_i \models A$. Докажем эту импликацию. Пусть $F \models A$. Тогда, по лемме 7.13, множество $\{i \in I \mid F_i \models A\}$ лежит в U, а значит, не пусто, то есть $\exists i \in I$: $F_i \models A$. □

Задача 7.17. Получите аналогичные результаты для отмеченных моделей и отмеченных шкал.

[41] Как и вообще для истинности формул второго порядка, начинающихся с кванторов всеобщности по второпорядковым переменным, после которых идет формула первого порядка.

8 Общая теория моделей

Естественный вопрос при рассмотрении любого языка и интерпретирующих его структур (в нашем случае, модального языка и моделей или шкал Крипке) — какие классы структур задаются формулой либо множеством множеством формул данного языка. Но оказывается, что эти два «типа» классов составляют лишь первый и второй «этажи» некоего «трехэтажного здания», на которое мы сейчас и посмотрим с самых общих позиций.

8.1 Иерархия типов классов структур

Пусть $\mathcal{S}$ — класс так называемых *моделей* (структур произвольной природы), $\mathcal{L}$ — так называемый *язык*, то есть множество (а если угодно, класс) так называемых *формул*; обычно множество $\mathcal{L}$ счетно. Пусть также задано семантическое отношение между моделями $M \in \mathcal{S}$ и формулами $A \in \mathcal{L}$, записываемое так: $M \models A$ (читается: «в модели M истинна формула A»). Отношение $\models$ естественным образом распространяется на классы моделей $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ и на множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$. Можно определить следующие классы моделей и множества формул:

$$\begin{array}{rclrcl} \mathsf{Models}(A) & = & \{M \in \mathcal{S} \mid M \models A\}, & \quad \mathsf{Theory}(M) & = & \{A \in \mathcal{L} \mid M \models A\}, \\ \mathsf{Models}(\Gamma) & = & \{M \in \mathcal{S} \mid M \models \Gamma\}, & \quad \mathsf{Theory}(\mathbb{K}) & = & \{A \in \mathcal{L} \mid \mathbb{K} \models A\}. \end{array}$$

Будем писать:

$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$ — если $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(A)$ для некоторой формулы $A \in \mathbb{L}$.

$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$ — если $\mathbb{K} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$ и некоторого множества $I \neq \varnothing$.

$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$ — если $\mathbb{K} = \bigcup\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J_i} \mathbb{K}_{i,j}$ для некоторых классов $\mathbb{K}_{i,j} \in \mathbb{L}$ и множеств $I \neq \varnothing$ и $J_i \neq \varnothing$.

Читатель без труда даст определения для $\Cup\mathbb{L}$, $\Cap\Cup\mathbb{L}$ и так далее.[42]

Лемма 8.1 (Дистрибутивность). *Для любых множеств или классов $\mathbb{K}_{i,j}$ и для любых множеств $I \neq \varnothing$ и $J_i \neq \varnothing$ справедливо следующее равенство:*[43]

$$\boxed{\textstyle\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} \mathbb{K}_{i,j} \; = \; \bigcup\limits_{f \in J} \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{K}_{i,f(i)}} \qquad \text{где} \quad J = \prod_{i \in I} J_i.$$

Аналогичное равенство имеет место, если заменить $\cap$ на $\cup$ и наоборот.

Доказательство. ($\supseteq$) Пусть M в правой части равенства. Тогда существует функция $f \in J$, такая что $M \in \mathbb{K}_{i,f(i)}$ для всех $i \in I$. Покажем, что M в левой части равенства: для каждого $i \in I$ существует такой j, что $M \in \mathbb{K}_{ij}$, а именно, надо взять $j = f(i)$.

($\subseteq$) Пусть M в левой части равенства. Значит, для каждого $i \in I$ мы можем выбрать такой $j \in J_i$, что $M \in \mathbb{K}_{ij}$. Согласно аксиоме выбора, существует функция $f \in J$, для каждого $i \in I$ выбирающая указанный j. Тогда для каждого $i \in I$ получаем $M \in \mathbb{K}_{i,f(i)}$. □

Теорема 8.2. $\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}$.

Доказательство. Если $\mathbb{K}$ представим в виде пересечения объединений классов из $\mathbb{L}$, то по дистрибутивности (лемма 8.1) он представим в виде объединения пересечений классов из $\mathbb{L}$; и наоборот. □

[42] Если $\mathcal{L}$ — язык первого порядка, то классы из $\mathbb{L}$ называются *элементарными*, классы из $\Cup\mathbb{L}$ — Σ*-элементарными*, классы из $\Cap\mathbb{L}$ — Δ*-элементарными*, классы из $\Cup\Cap\mathbb{L}$ — $\Sigma\Delta$*-элементарными* и т.д. Позже терминология смешалась — теперь элементарными часто называют классы, задаваемые множеством элементарных формул, то есть классы из $\Cap\mathbb{L}$. Другая терминология: классы из $\Cap\mathbb{L}$ называются *аксиоматизируемыми*, а классы из $\mathbb{L}$ — *конечно-аксиоматизируемыми* (в предположении, что в языке есть конъюнкция и потому всякий класс, задаваемый конечным множеством формул, можно задать и одной формулой — их конъюнкцией).

[43] Напомним, что $J = \prod_{i \in I} J_i$ называется *декартовым произведением* множеств J_i и состоит из всевозможных функций f из множества I, таких что $f(i) \in J_i$ для каждого $i \in I$. Такие функции называются *функциями выбора* для семейства множеств $(J_i)_{i \in I}$. Если все $J_i \neq \varnothing$, то $J \neq \varnothing$ по аксиоме выбора.

Лемма 8.3. 1) *Семейство* $\Cap\mathbb{L}$ *замкнуто относительно произвольных* $\cap$*;*
2) *Семейство* $\Cup\mathbb{L}$ *замкнуто относительно произвольных* $\cup$*;*
3) *Семейство* $\Cup\Cap\mathbb{L}$ *замкнуто относительно произвольных* $\cup$*, и т.д.*

Следствие 8.4. 1) *Семейство* $\Cup\Cap\mathbb{L}$*, оно же* $\Cap\Cup\mathbb{L}$*, замкнуто относительно произвольных* $\cap$ *и* $\cup$*.*
2) *Семейство* $\Cap\Cup\Cap\mathbb{L}$ *совпадает с* $\Cap\Cup\mathbb{L}$*, и так далее.*

Доказательство. 1) по предыдущей теореме; 2) если класс $\mathbb{K}$ есть пересечение классов $\mathbb{K}_i \in \Cup\Cap\mathbb{L}$, то $\mathbb{K}_i \in \Cap\Cup\mathbb{L}$, но семейство $\Cap\Cup\mathbb{L}$ замкнуто относительно пересечений, тем самым $\mathbb{K} \in \Cap\Cup\mathbb{L}$. $\square$

Итак, рассматривать дальнейшие типы не нужно, и мы имеем следующую ***иерархию типов***:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Cup\Cap\mathbb{L} & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \Cap\mathbb{L} & & & & \Cup\mathbb{L} \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & \mathbb{L} & & \end{array}$$

Лемма 8.5. (а) $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L} \iff \mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$ *для некоторого множества формул* $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$*.*
(б) $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L} \iff \mathbb{K} = \bigcup_{i\in I} \mathsf{Models}(\Gamma_i)$ *для некоторых множеств формул* $\Gamma_i \subseteq \mathcal{L}$*.*

Если язык $\mathcal{L}$ счетный, то очевидно, что имеется не более чем счетное число классов в $\mathbb{L}$, не более континуума классов в $\Cap\mathbb{L}$, не более гиперконтинуума классов в $\Cup\Cap\mathbb{L}$.

Пример 8.6. Пусть $\mathcal{L}$ — язык первого порядка, точнее, множество всех предложений некоторой сигнатуры Σ; $\mathcal{S}$ — класс всех структур первого порядка сигнатуры Σ. В тип $\mathbb{L}$ попадают: классы всех групп, колец, полей, линейных порядков. В тип $\Cap\mathbb{L}$ попадают: класс всех бесконечных групп (колец, полей, линейных порядков), класс всех полей характеристики 0, класс алгебраически замкнутых полей. В тип $\Cup\mathbb{L}$ попадают: класс конечных групп (колец, полей, линейных порядков). В тип $\Cup\Cap\mathbb{L}$ попадает: класс всех бесконечных полей конечной характиристики. Класс всех вполне упорядоченных множеств не попадает даже в $\Cup\Cap\mathbb{L}$. (без доказательства)[44]

8.2 Критерий для объединения аксиоматизируемых классов

Говорим, что класс $\mathbb{K}$ *замкнут* относительно некоторого бинарного отношения $\sim$ между моделями, если из $M \in \mathbb{K}$ и $M \sim N$ следует $N \in \mathbb{K}$. Если отношение $\sim$ симметрично, то очевидно, что класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\sim \iff$ его дополнение $\overline{\mathbb{K}} = \mathcal{S} \setminus \mathbb{K}$ замкнуто относительно $\sim$.

Введем два отношения на моделях (для каждого — два эквивалентных определения):[45]

$$\begin{array}{lclcl} M \equiv N & \leftrightharpoons & \forall A \in \mathcal{L}\ (M \models A \ \Leftrightarrow\ N \models A) & \iff & \mathsf{Theory}(M) = \mathsf{Theory}(N), \\ M \sqsubseteq N & \leftrightharpoons & \forall A \in \mathcal{L}\ (M \models A \ \Rightarrow\ N \models A) & \iff & \mathsf{Theory}(M) \subseteq \mathsf{Theory}(N). \end{array}$$

Теорема 8.7 (Критерий для $\Cup\Cap\mathbb{L}$)**.** $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L} \iff$ *класс* $\mathbb{K}$ *замкнут относительно* $\sqsubseteq$*.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Очевидно, любой класс из $\mathbb{L}$ замкнут относительно $\sqsubseteq$. Кроме того, замкнутость (относительно любого отношения $\sim$) сохраняется при объединении или пересечении классов.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv$. Докажем следующее представление класса $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K} \;=\; \bigcup_{\{T \subseteq \mathcal{L} \,|\, \exists M \in \mathbb{K}\colon\, T = \mathsf{Theory}(M)\}} \mathsf{Models}(T),$$

откуда ввиду леммы 8.5 будет следовать, что $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$. Итак, доказываем равенство.

($\subseteq$) Если $N \in \mathbb{K}$, то взяв $T := \mathsf{Theory}(N)$, мы получим $N \in \mathsf{Models}(T)$.

($\supseteq$) Пусть $N \in \mathsf{Models}(T)$, где $T = \mathsf{Theory}(M)$ для некоторой модели $M \in \mathbb{K}$. Тогда мы имеем $N \models \mathsf{Theory}(M)$, то есть $M \sqsubseteq N$. Поскольку $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\sqsubseteq$, то $N \in \mathbb{K}$. $\square$

[44] Глава 7 в книге: J. Bell, A. Slomson. *Models and Ultrafilters: An Introduction.* North-Holland Pub. Co., 1969.

[45] Строго говоря, надо писать $\equiv_{\mathcal{L}}$, $\sqsubseteq_{\mathcal{L}}$, а также $\mathsf{Theory}_{\mathcal{L}}$ выше, $[M]_{\mathcal{L}}$ и $\langle M\rangle_{\mathcal{L}}$ ниже, особенно, если в конкретном применении излагаемой здесь общей теории моделей для одних и тех же структур будут рассматриваться несколько языков одновременно, например, модальный и первопорядковый языки.

В доказанной выше теореме мы предъявили «каноническое» представление всякого класса $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$ в виде $\bigcup\bigcap \mathbb{K}_{ij}$. Поскольку $\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}$, то естественно задаться вопросом об аналогичном «каноническом» представлении всякого класса $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$ в виде $\bigcap\bigcup \mathbb{K}_{ij}$. Его дает следующая теорема. Помимо этой цели, данная теорема дает также элементарное (без использования аксиомы выбора!) доказательство равенства $\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}$. Это само по себе замечательно, ибо означает, что данное равенство справедливо даже когда $\mathcal{L}$ является не множеством, а классом формул (как в случае инфинитарного модального языка, см. главу 2.1).

Обозначим $\mathsf{TH}(\mathbb{K}) = \{\mathsf{Theory}(M) \mid M \in \mathbb{K}\} = \{T \subseteq \mathcal{L} \mid \exists M \in \mathbb{K}\colon T = \mathsf{Theory}(M)\}$.

Теорема 8.8. *Для всякого класса структур $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ следующие условия эквивалентны:*

(1a) $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$,

(1b) $\mathbb{K} \in \Cap\Cup\mathbb{L}$,

(2) $\mathbb{K}$ *замкнут относительно* $\sqsubseteq$,

(3a) $\mathbb{K} = \bigcup\limits_{T\in\mathsf{TH}(\mathbb{K})} \bigcap\limits_{A\in T} \mathsf{Models}(A)$,

(3b) $\mathbb{K} = \bigcap\limits_{T\in\mathsf{TH}(\overline{\mathbb{K}})} \bigcup\limits_{B\notin T} \mathsf{Models}(B)$.

Доказательство. Мы докажем импликации: (1a) ⇒ (2) ⇒ (3a) ⇒ (1a) и (1b) ⇒ (2) ⇒ (3b) ⇒ (1b). Все они очевидны, кроме (2) ⇒ (3a) и (2) ⇒ (3b); первая из них уже фактически доказана в теореме 8.7, но воспроизведем его здесь в новых обозначениях, чтобы была видна симметрия (3a) и (3b).

(2) ⇒ (3a) Надо доказать равенство. Значит, докажем два включения; одно из них не использует (2).

($\subseteq$) Пусть $M \in \mathbb{K}$. Положим $T := \mathsf{Theory}(M)$. Тогда $T \in \mathsf{TH}(\mathbb{K})$, а также $\forall A \in T\ M \models A$, то есть $M \in \mathsf{Models}(A)$.

($\supseteq$) Пусть $M \in \bigcup\bigcap$ (правая часть 3a). Это значит, что существует теория $T \in \mathsf{TH}(\mathbb{K})$ (то есть $T = \mathsf{Theory}(N)$ для некоторой модели $N \in \mathbb{K}$), такая что $\forall A \in T\ M \models A$, то есть $M \models T$. Тем самым $N \sqsubseteq M$. Поскольку класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\sqsubseteq$, отсюда следует, что $M \in \mathbb{K}$.

(2) ⇒ (3b) Надо доказать равенство. Значит, докажем два включения; одно из них не использует (2).

($\supseteq$) Допустим $N \notin \mathbb{K}$. Докажем, что $N \notin \bigcap\bigcup$ (правая часть 3b). Возьмем $T := \mathsf{Theory}(N)$, тем самым $T \in \mathsf{TH}(\overline{\mathbb{K}})$. Тогда для каждой формулы $B \notin T$ имеем $N \not\models B$, то есть $N \notin \mathsf{Models}(B)$.

($\subseteq$) Пусть $N \in \mathbb{K}$. Докажем, что $N \in \bigcap\bigcup$ (правая часть 3b). Возьмем любую теорию $T \in \mathsf{TH}(\overline{\mathbb{K}})$, то есть $T = \mathsf{Theory}(M)$ для некоторой модели $M \notin \mathbb{K}$. Ясно, что $\neg(N \sqsubseteq M)$, иначе было бы $M \in \mathbb{K}$ в силу замкнутости $\mathbb{K}$ относительно $\sqsubseteq$. Значит, найдется формула B, такая что $N \models B$, но $M \not\models B$. Тем самым $B \notin T$ и $N \in \mathsf{Models}(B)$. □

Поскольку при доказательстве этой теоремы мы не пользовались аксиомой выбора, то, как следствие, равенство $\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}$ верно не только когда I и J_i — множества, но и когда они — классы, как, например, в случае инфинитарного модального языка ML_∞, который мы рассматривали в разделе 2.1.

8.3 Наименьший аксиоматизируемый надкласс

Для модели M введем два класса:

$$\begin{array}{lcl} [M] & = & \{N \mid M \equiv N\}, \\ \langle M \rangle & = & \{N \mid M \sqsubseteq N\}. \end{array}$$

Лемма 8.9. (1) $M \in [M] \subseteq \langle M \rangle$.
(2) $\langle M \rangle = \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(M))$.
(3) *$\langle M \rangle$ есть наименьший класс из $\Cap\mathbb{L}$, содержащий модель M.*

Доказательство. (1) очевидно из определения.

(2) $N \in \langle M \rangle \iff M \sqsubseteq N \iff N \models \mathsf{Theory}(M) \iff N \in \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(M))$.

(4) Обозначим через $\mathbb{K}$ наименьший класс из $\Cap\mathbb{L}$, содержащий модель M. Докажем, что $\mathbb{K} = \langle M \rangle$.

($\subseteq$) Поскольку $\langle M \rangle$ лежит в $\Cap\mathbb{L}$ и содержит M, а $\mathbb{K}$ — наименьший из таких классов, то $\mathbb{K} \subseteq \langle M \rangle$.

($\supseteq$) Поскольку $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$, то $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$, где $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$. Тогда: если $N \in \langle M \rangle$, то $M \sqsubseteq N$; но $M \in \mathbb{K}$ и $\mathbb{K} \models \Gamma$, отсюда $M \models \Gamma$, поэтому $N \models \Gamma$ и значит, $N \in \mathbb{K}$. $\square$

Как следствие, в доказательстве теоремы о характеризации мы могли написать: $\mathbb{K} = \bigcup_{M \in \mathbb{K}} \langle M \rangle$. Однако, мы не стали этого делать, так как хотя формально это равенство верно, для доказательства того, что $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$ нам нужно представить класс $\mathbb{K}$ в виде объединения классов $\mathbb{K}_i$ из $\Cap\mathbb{L}$, в котором индекс i пробегает некоторое *множество* I, а не класс. Однако, это представление можно привести к требуемому виду, если заметить, что объединяемые сущности — классы $\langle M \rangle$ — различны лишь для попарно не эквивалентных (в смысле $\equiv$) моделей, то есть для моделей из различных классов эквивалентности $[M]$, коих (классов) имеется не более $2^{|\mathcal{L}|}$ и они образуют *множество* $\mathbb{K}/\!\equiv$. Поэтому мы можем переписать представление в виде объединения по элементам множества: $\mathbb{K} = \bigcup_{[M] \in (\mathbb{K}/\equiv)} \langle M \rangle$.

Будем писать $\mathbb{K} \sqsubseteq M$, если $\mathsf{Theory}(\mathbb{K}) \subseteq \mathsf{Theory}(M)$, то есть $M \models \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$. Введем классы:

$$\begin{array}{lclcl} [\mathbb{K}] & = & \{N \mid \exists M \in \mathbb{K}\colon M \equiv N\} & = & \bigcup_{M \in \mathbb{K}} [M], \\ (\mathbb{K}) & = & \{N \mid \exists M \in \mathbb{K}\colon M \sqsubseteq N\} & = & \bigcup_{M \in \mathbb{K}} \langle M \rangle, \\ \langle \mathbb{K} \rangle & = & \{N \mid \mathbb{K} \sqsubseteq N\} & = & \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K})). \end{array}$$

Заметим, что в случае $\mathbb{K} = \{M\}$, во-первых, имеем равенство $(M) = \langle M \rangle$, а во-вторых, классы $[\mathbb{K}]$ и $\langle \mathbb{K} \rangle$, определенные здесь, совпадают с классами $[M]$ и $\langle M \rangle$, определенными выше. Очевидно, что класс $[\mathbb{K}]$ есть замыкание класса $\mathbb{K}$ по $\equiv$, а класс $(\mathbb{K})$ есть замыкание класса $\mathbb{K}$ по $\sqsubseteq$.

Лемма 8.10. (1) *Имеют место включения:* $\mathbb{K} \subseteq [\mathbb{K}] \subseteq (\mathbb{K}) \subseteq \langle \mathbb{K} \rangle$.
(2) *$(\mathbb{K})$ есть наименьший класс из $\Cup\Cap\mathbb{L}$, содержащий $\mathbb{K}$.*
(3) *$\langle \mathbb{K} \rangle$ есть наименьший класс из $\Cap\mathbb{L}$, содержащий $\mathbb{K}$.*
(4) $(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \iff \mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$.
(5) $\langle \mathbb{K} \rangle = \mathbb{K} \iff \mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$.

Доказательство. (1) Первое и второе включения очевидны; докажем третье. Пусть $N \in (\mathbb{K})$, то есть $M \sqsubseteq N$ для некоторой $M \in \mathbb{K}$. Тогда $\mathbb{K} \sqsubseteq M$, а значит, $\mathbb{K} \sqsubseteq N$ и тем самым $N \in \langle \mathbb{K} \rangle$.

Очевидно, что из (2) следует (4), а из (3) следует (5). Остается доказать (2) и (3).

(2) Заметим, что $(\mathbb{K}) \in \Cup\Cap\mathbb{L}$, что вытекает из такого его представления (см. обсуждение выше):

$$(\mathbb{K}) = \bigcup_{\{T \subseteq \mathcal{L} \,\mid\, \exists M \in \mathbb{K}\colon T = \mathsf{Theory}(M)\}} \mathsf{Models}(T).$$

Обозначим через $\mathbb{K}'$ наименьший класс из $\Cup\Cap\mathbb{L}$, содержащий $\mathbb{K}$. Заметим, что $\mathbb{K}'$ существует, ибо класс всех моделей $\mathcal{S}$ лежит в $\Cup\Cap\mathbb{L}$ и семейство $\Cup\Cap\mathbb{L}$ замкнуто относительно произвольных пересечений. Докажем, что $\mathbb{K}' = (\mathbb{K})$. Включение $\mathbb{K}' \subseteq (\mathbb{K})$ очевидно, поскольку $(\mathbb{K})$ — один из классов с требуемыми свойствами, а $\mathbb{K}'$ — минимальный такой класс. Осталось доказать: $\mathbb{K}' \supseteq (\mathbb{K})$.

Пусть $N \in (\mathbb{K})$, то есть $M \sqsubseteq N$ для некоторой $M \in \mathbb{K}$. Поскольку $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$, то $M \in \mathbb{K}'$. Но $\mathbb{K}'$ замкнут относительно $\sqsubseteq$ (ведь он из $\Cup\Cap\mathbb{L}$; см. критерий — теорему 8.7). Значит, $N \in \mathbb{K}'$.

(3) Обозначим через $\mathbb{K}'$ наименьший класс из $\Cap\mathbb{L}$, содержащий класс $\mathbb{K}$. Докажем, что $\mathbb{K}' = \langle \mathbb{K} \rangle$.

($\subseteq$) Поскольку $\langle\mathbb{K}\rangle$ лежит в $\Cap\mathbb{L}$ и содержит $\mathbb{K}$, а $\mathbb{K}'$ — наименьший из таких классов, то $\mathbb{K}' \subseteq \langle\mathbb{K}\rangle$.

($\supseteq$) Поскольку $\mathbb{K}' \in \Cap\mathbb{L}$, то $\mathbb{K}' = \mathsf{Models}(\Gamma)$, где $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$. Заметим: $\mathbb{K} \models \Gamma$. Тогда: если $N \in \langle\mathbb{K}\rangle$, то $\mathbb{K} \sqsubseteq N$. Но $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$, значит, $\mathbb{K} \models \Gamma$, поэтому $N \models \Gamma$ и значит, $N \in \mathbb{K}'$. $\square$

Поскольку в случае $\mathbb{K} = \{M\}$ классы $(\mathbb{K})$ и $\langle\mathbb{K}\rangle$ совпадают, мы получаем такое следствие:

наименьший класс из $\Cup\Cap\mathbb{L}$, содержащий модель M,
совпадает с наименьшим классом из $\Cap\mathbb{L}$, содержащим модель M.

Замечание. Можно рассмотреть для данной модели M класс $\{N \mid \neg(N \sqsubseteq M)\}$. Оказывается, это наибольший класс из $\Cup\mathbb{L}$, не содержащий модель M. Его же можно представить следующим образом: если взять теорию данной модели $T = \mathsf{Theory}(M)$, то указанный класс равен $\bigcup_{B\notin T}\mathsf{Models}(B)$ — сравни с выражением в (3b) в теореме 8.8.

Задача. $[\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2] = [\mathbb{K}_1] \cup [\mathbb{K}_2]$, $\langle\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2\rangle \supseteq \langle\mathbb{K}_1\rangle \cup \langle\mathbb{K}_2\rangle$. Для $(\mathbb{K})$?

8.4 Семантика, согласованная с отрицанием

Пусть в языке $\mathcal{L}$ есть отрицание, то есть для всякой формулы $A \in \mathcal{L}$ имеется и формула $\neg A \in \mathcal{L}$.

Мы говорим, что *семантика согласована с отрицанием*, если $M \not\models A \Leftrightarrow M \models \neg A$.

Пример 8.11. Если $\mathcal{L}$ — язык первого порядка (множество всех предложений некоторой сигнатуры), а $\mathcal{S}$ — класс всех структур этой сигнатуры, то семантика согласована с отрицанием. Пусть $\mathcal{L}$ — модальный язык; если $\mathcal{S}$ — класс всех отмеченных моделей Крипке, то семантика согласована с отрицанием; если же $\mathcal{S}$ — класс всех моделей Крипке или всех (отмеченных) шкал Крипке, то семантика не согласована с отрицанием. Однако если $\mathcal{S}$ — класс всех шкал (либо моделей) Крипке, но $\mathcal{L}$ — язык первого порядка (в подходящей сигнатуре: $\{R, =\}$), то в этом случае семантика уже согласована с отрицанием. Аналогично для интуиционистского пропозиционального языка.

Лемма 8.12. *Пусть семантика согласована с отрицанием. Тогда:*
(1) *отношения $\equiv$ и $\sqsubseteq$ совпадают;*
(2) *$[M] = \langle M\rangle$ и, значит, $[M] \in \Cap\mathbb{L}$;*
(2) *$[\mathbb{K}] = (\mathbb{K})$, и, значит, $[\mathbb{K}] \in \Cup\Cap\mathbb{L}$.*

Доказательство. Очевидно, из (1) следуют (2) и (3). Докажем (1). Пусть $M \sqsubseteq N$. Докажем, что $N \sqsubseteq M$. Для всякой формулы $A \in \mathcal{L}$ надо доказать, что если $N \models A$, то $M \models A$. Доказываем от противного: если $M \not\models A$, то $M \models \neg A$, откуда ввиду $M \sqsubseteq N$ получаем $N \models \neg A$ и $N \not\models A$. $\square$

В случае классов одного лишь факта, что семантика согласована с отрицанием, не достаточно, чтобы было верно равенство $(\mathbb{K}) = \langle\mathbb{K}\rangle$. Нужна компактность класса $\mathbb{K}$ (см. ниже).

Как следствие, получаем следующий результат.

Теорема 8.13 (Критерий для $\Cup\Cap\mathbb{L}$). *Пусть семантика согласована с отрицанием. Тогда:*

$$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{класс } \mathbb{K} \text{ замкнут относительно } \equiv.$$

Следовательно, классы $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$ и только они представимы в виде $\mathbb{K} = \bigcup_{M\in\mathbb{K}}[M]$, или, если стремиться к объединению по элементам некоторого множества, $\mathbb{K} = \bigcup_{[M]\in(\mathbb{K}/\equiv)}[M]$.

Следствие 8.14. *Пусть семантика согласована с отрицанием. Тогда:* $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L} \iff [\mathbb{K}] = \mathbb{K}$.

Замечание 8.15. Данная характеризация классов типа $\Cup\Cap\mathbb{L}$ (теоремы 8.7 и 8.13) имеет недостаток — она описывает классы, изначально определенные в терминах языка $\mathcal{L}$, через замкнутость относительно отношений, также определенных в терминах языка $\mathcal{L}$. Понятно, что при абстрактном изучении языков и структур мы не сможем задать более «конкретные» операции или отношения. Для конкретных же языков (первого порядка, модального) стремятся дать «структурную» характеризацию классов из $\Cup\Cap\mathbb{L}$, а также $\Cap\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}$, не упоминающую язык вовсе; конечно, при этом используются присущие данным структурам операции и отношения (изоморфизм, бисимуляция, порожденные подструктуры, p-морфизмы, несвязные суммы, ультрапроизведение, ультрастепень, ультрарасширение).

Напомним, что дополнение класса $\mathbb{K}$ обозначается как $\overline{\mathbb{K}} = \mathcal{S} \setminus \mathbb{K}$.

Лемма 8.16. *Пусть семантика согласована с отрицанием. Тогда:*

(1)	$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\iff$	$\overline{\mathbb{K}} \in \mathbb{L}$,	*(тип $\mathbb{L}$ замкнут относительно дополнения)*
(2)	$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\iff$	$\overline{\mathbb{K}} \in \Cup\mathbb{L}$,	*(типы $\Cap\mathbb{L}$ и $\Cup\mathbb{L}$ переходят друг в друга при дополнении)*
(3)	$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\iff$	$\overline{\mathbb{K}} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	*(тип $\Cup\Cap\mathbb{L}$ замкнут относительно дополнения).*

Доказательство. (1) Если $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(A)$, то $\overline{\mathbb{K}} = \mathsf{Models}(\neg A)$.

(2) Если $\mathbb{K} = \bigcap_i \mathbb{K}_i$, где $\mathbb{K}_i \in \mathbb{L}$, то $\overline{\mathbb{K}} = \bigcup_i \overline{\mathbb{K}}_i$, где $\overline{\mathbb{K}}_i \in \mathbb{L}$.

(3) Если $\mathbb{K} = \bigcup_i \bigcap_j \mathbb{K}_{ij}$, где $\mathbb{K}_{ij} \in \mathbb{L}$, то $\overline{\mathbb{K}} = \bigcap_i \bigcup_j \overline{\mathbb{K}}_{ij}$, где $\overline{\mathbb{K}}_{ij} \in \mathbb{L}$. Но $\Cup\Cap\mathbb{L} = \Cap\Cup\mathbb{L}$. □

Следствия: Критерий для $\Cup\mathbb{L}$ получается из критерия для $\Cap\mathbb{L}$, если поменять местами условия, накладываемые на $\mathbb{K}$ и на $\overline{\mathbb{K}}$; Критерий для $\mathbb{L}$ получается из критерия для $\Cap\mathbb{L}$, если наложить условия и на $\mathbb{K}$, и на $\overline{\mathbb{K}}$. Таким образом, в случае семантики, согласованной с отрицанием, достаточно получить критерии для $\Cup\Cap\mathbb{L}$ и для $\Cap\mathbb{L}$.

8.4.1 Компактные классы структур

Мы формулируем понятие компактности для случая *семантики, согласованной с отрицанием* (в общем случае нужно иначе определять понятие выполнимости множества формул в классе структур, через апелляцию к другим структурам, для которых уже семантика согласована с отрицанием).

Определение 8.17. Множество формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ *выполнимо* в классе $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$, если существует такая модель $M \in \mathbb{K}$, что $M \models \Gamma$. В частности, мы имеем понятие «формула A *выполнима* в классе моделей $\mathbb{K}$».

Определение 8.18. Класс моделей $\mathbb{K}$ *компактен*,[46] если для каждого множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$:

если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$,
то и всё множество формул Γ выполнимо в $\mathbb{K}$.

Пусть в языке есть конъюнкция, то есть для любых формул $A, B \in \mathcal{L}$ имеется формула $(A \wedge B) \in \mathcal{L}$. Мы говорим, что *семантика согласована с конъюнкцией*, если $M \models A \wedge B \Leftrightarrow M \models A$ и $M \models B$.

Если семантика согласована с конъюнкцией, то определение компактного класса моделей можно переформулировать в терминах формул, а не конечных множеств формул: класс $\mathbb{K}$ называется *компактным*, если для всякого множества формул Γ, замкнутого относительно конъюнкции, имеем: если каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в $\mathbb{K}$, то и всё множество Γ выполнимо в $\mathbb{K}$. (Упражнение: докажите, что новое определение эквивалентно прежнему.)

Лемма 8.19. *Пусть семантика согласована с отрицанием и конъюнкцией.*
Пусть $\mathbb{K}$ — компактный класс моделей. Тогда $[\mathbb{K}] = \langle\mathbb{K}\rangle$.

Доказательство. Включение ($\subseteq$) верно всегда; докажем ($\supseteq$). Пусть $M \in \langle\mathbb{K}\rangle$, то есть $M \models \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$. Докажем, что теория $T := \mathsf{Theory}(M)$ выполнима в $\mathbb{K}$. Поскольку класс $\mathbb{K}$ компактен, а множество T замкнуто относительно конъюнкции, то достаточно проверить, что каждая формула $A \in T$ выполнима в $\mathbb{K}$. От противного: если A не выполнима в $\mathbb{K}$, то для каждой модели $N \in \mathbb{K}$ имеем $N \not\models A$, а значит, $N \models \neg A$, и таким образом $\mathbb{K} \models \neg A$. Но $M \models \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$, поэтому $M \models \neg A$, откуда $M \not\models A$ и $A \notin T$.

Итак, теория T выполнима в $\mathbb{K}$, значит, $N \models T$ для некоторой модели $N \in \mathbb{K}$. Это значит, что $M \sqsubseteq N$. Поскольку семантика согласована с отрицанием, то $\sqsubseteq$ совпадает с $\equiv$ (по лемме 8.12), поэтому $M \equiv N$. Наконец, поскольку $N \in \mathbb{K}$, мы получаем $M \in [\mathbb{K}]$. □

Следующая лемма представляет собой (сформулированный в самых общих предположениях) критерий конечной аксиоматизируемости, известный в логике первого порядка: *класс структур конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он и его дополнение являются аксиоматизируемыми.*

[46] Более точно, $\mathcal{L}$-*компактен*, ибо об одних и тех же структурах можно говорить на разных языках.

Лемма 8.20 (Критерий конечной аксиоматизируемости).
Пусть семантика согласована с отрицанием и конъюнкцией, а класс ***всех*** *моделей $\mathcal{S}$ компактен. Тогда для всякого класса моделей $\mathbb{K}$ верна следующая эквивалентность:*

$$\mathbb{K} \in \mathbb{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K}, \overline{\mathbb{K}} \in \Cap\mathbb{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L} \text{ и } \mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}.$$

Доказательство. В силу леммы 8.16 остается доказать: если $\mathbb{K}, \overline{\mathbb{K}} \in \Cap\mathbb{L}$, то $\mathbb{K} \in \mathbb{L}$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$, $\overline{\mathbb{K}} = \mathsf{Models}(\Delta)$. Поскольку $\Gamma \cup \Delta = \varnothing$, множество формул $\Gamma \cup \Delta$ не выполнимо (в классе всех моделей $\mathcal{S}$). В силу компактности класса $\mathcal{S}$ существуют конечные подмножества $\Gamma' \subseteq \Gamma$ и $\Delta' \subseteq \Delta$, такие что множество $\Gamma' \cup \Delta'$ не выполнимо (в $\mathcal{S}$). Значит, конъюнкции $A := \bigwedge\Gamma'$ и $B := \bigwedge\Delta'$ не имеют общей модели. Утверждается, что $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(A)$ и $\overline{\mathbb{K}} = \mathsf{Models}(B)$. Действительно, для каждой модели M имеем:

$$\begin{array}{ccccccc}
M \in \mathbb{K} & \Leftrightarrow & M \models \Gamma & \Rightarrow & M \models \Gamma' & \Leftrightarrow & M \models A \\
\Updownarrow & & & & & & \Downarrow \\
M \in \overline{\mathbb{K}} & \Leftrightarrow & M \not\models \Delta & \Leftarrow & M \not\models \Delta' & \Leftrightarrow & M \not\models B
\end{array}$$

Можно было сказать иначе: из того, что $\mathsf{Models}(A) \supseteq \mathsf{Models}(\Gamma) = \mathbb{K}$ и $\mathsf{Models}(B) \supseteq \mathsf{Models}(\Delta) = \overline{\mathbb{K}}$, ввиду $\mathsf{Models}(A) \cap \mathsf{Models}(B) = \varnothing$, вытекает, что $\mathsf{Models}(A) = \mathbb{K}$ и $\mathsf{Models}(B) = \overline{\mathbb{K}}$. □

8.4.2 Критерий аксиоматизируемости

Теорема 8.21 (Критерии аксиоматизируемости, конечной аксиоматизируемости).
Пусть семантика согласована с отрицанием и конъюнкцией, а класс ***всех*** *моделей $\mathcal{S}$ компактен. Тогда для всякого класса моделей $\mathbb{K}$ верны следующие эквивалентности:*

(а) $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L} \iff$ *$\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv$ и компактен.*
(б) $\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L} \iff$ *$\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно $\equiv$ и компактен.*
(в) $\mathbb{K} \in \mathbb{L} \iff$ *$\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуты относительно $\equiv$ и компактны.*

Доказательство. (а) ($\Leftarrow$) Поскольку $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv$, то $\mathbb{K} = [\mathbb{K}]$. Поскольку $\mathbb{K}$ компактен, то $[\mathbb{K}] = \langle\mathbb{K}\rangle$ по лемме 8.19. Значит, $\mathbb{K} = \langle\mathbb{K}\rangle$. Отсюда $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$ по лемме 8.10(5).

($\Rightarrow$) Пусть $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$, то есть $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(T)$ для некоторого множества формул $T \subseteq \mathcal{L}$. Замкнутость $\mathbb{K}$ относительно $\equiv$ очевидна. Докажем компактность класса $\mathbb{K}$. Пусть каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ некоторого множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ выполнимо в $\mathbb{K}$. Это значит, что для каждого конечного множества $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо (в классе всех моделей $\mathcal{S}$) множество формул $\Delta \cup T$. Тогда тем более каждое конечное подмножество множества формул $\Gamma \cup T$ выполнимо (в $\mathcal{S}$). Поскольку класс $\mathcal{S}$ компактен, то всё множество формул $\Gamma \cup T$ выполнимо (в $\mathcal{S}$). Это и означает, что Γ выполнимо в $\mathbb{K}$.

Пункты (б) и (в) легко следуют из пункта (а) с использованием леммы 8.16. □

Из этой теоремы вытекает следующий факт, интересный сам по себе:

Лемма 8.22. *Пусть семантика согласована с отрицанием, а класс* ***всех*** *моделей $\mathcal{S}$ компактен. Тогда каждый класс $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$ компактен.*

Заметим, что для семантики, не согласованной с отрицанием, это уже не всегда так: для модального языка и классов моделей Крипке это еще верно (так как они, по существу, — структуры первого порядка), тогда как для классов шкал Крипке — не верно: бывают классы шкал, определимые даже одной формулой, которые модально компактными не являются (они не являются элементарными).

Критерии в терминах компактности

Пусть семантика согласована с отрицанием и конъюнкцией,
а класс ***всех*** *моделей $\mathcal{S}$ компактен. Тогда:*

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv$		
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv$	компактен	
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv$		компактен
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv$	компактен	компактен

8.4.3 Ультрапроизведение структур

Этот раздел мы тоже излагаем лишь для семантики, согласованной с отрицанием, так как будет упоминаться компактность, определявшаяся нами (пока) только для этого случая.

Определение 8.23. *Ультрапроизведение* (УП) структур — это такая операция $\prod$, которая произвольному семейству моделей $(M_i)_{i\in I}$, заиндексированному произвольным непустым множеством $I \neq \varnothing$, и произвольному ультрафильтру U над I сопоставляет модель, обозначаемую $M := \prod_{i\in I}^{U} M_i$, обладающую следующим свойством: для каждой формулы $A \in \mathcal{L}$ имеет место:

$$\{\, i \in I \mid M_i \models A \,\} \in U \qquad \iff \qquad M \models A.$$

В случае, если все модели одинаковы: $M_i = N$, то это — *ультрастепень*: $M = N^U$.

Очевидно, что всегда $M \equiv M^U$.

Например, УП определено (и для него выполнено указанное условие!) для структур и языка первого порядка (фиксированной сигнатуры); для (отмеченных) моделей Крипке и модального языка. Для шкал Крипке тоже определено УП, однако указанному условию (применительно к модальному языку) оно не удовлетворяет — выполнена лишь импликация '$\Longleftarrow$' (см. лемму 7.13).

Лемма 8.24. *Пусть имеется операция УП. Если* $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$, *то* $\mathbb{K}$ *замкнут относительно УП.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$. Пусть $\forall i \in I\ M_i \in \mathbb{K}$, то есть $M_i \models \Gamma$. Тогда для их ультрапроизведения $M := \prod_{i\in I}^{U} M_i$ и для каждой формулы $A \in \Gamma$ имеем: $\{i \in I \mid M_i \models A\} = I \in \Phi$; значит, по определению УП имеем $M \models A$. Тем самым $M \models \Gamma$ и $M \in \mathbb{K}$. □

Следующую лемму мы доказываем лишь в предположении ССО, так как лишь в этом случае мы определяли понятие компактности.

Лемма 8.25. *Пусть имеется УП и пусть ССО. Если* $\mathbb{K}$ *замкнут отн. УП, то* $\mathbb{K}$ *компактен.*

Доказательство. Приведем два варианта доказательства; второй (использующий ССК) проще.

Способ 1. Пусть каждое конечное подмножество некоторого бесконечного множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ выполнимо в $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество $I = \{i \subseteq \Gamma \mid i \text{ конечное}\}$. Для каждой формулы $A \in \mathcal{L}$ рассмотрим все содержащие ее конечные множества: $X_A = \{i \in I \mid A \in i\}$. Покажем, что семейство этих множеств $Z = \{X_A \mid A \in \Gamma\}$ — центрированное. Действительно, множество $X_{A_1} \cap \ldots \cap X_{A_n}$ не пусто, ибо содержит в качестве элемента $i = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Следовательно, семейство Z содержится в некотором ультрафильтре U.

По условию, каждое множество $i \in I$ выполнимо в $\mathbb{K}$, то есть существует модель $M_i \in \mathbb{K}$, такая что $M_i \models i$. Возьмем ультрапроизведение этих моделей по построенному ультрафильтру: $M := \prod_{i\in I}^{U} M_i$. Так как класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно ультрапроизведений, то $M \in \mathbb{K}$. Покажем, что $M \models \Gamma$. Для каждой формулы $A \in \Gamma$, поскольку из $A \in i$ всегда следует $M_i \models A$, мы имеем:

$$\{i \in I \mid M_i \models A\} \ \supseteq\ \{i \in I \mid A \in i\} \ =\ X_A \ \in\ S \ \subseteq\ U,$$

поэтому $\{i \in I \mid M_i \models A\} \in U$, а значит, $M \models A$. Итак, Γ выполнимо в $\mathbb{K}$.

Способ 2 (ССК). Пусть множество формул $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$ замкнуто относительно конъюнкции и пусть каждая формула $A_i \in \Gamma$ выполнима в классе $\mathbb{K}$, то есть существует модель $M_i \in \mathbb{K}$, такая что $M_i \models A_i$.

Для каждого $i \in I$ рассмотрим множество $X_i = \{\ell \in I \mid M_\ell \models A_i\}$. Покажем, что семейство этих множеств $Z = \{X_i \mid i \in I\}$ — центрированное. Действительно, множество $X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_n}$ не пусто, ибо содержит индекс $\ell \in I$ конъюнкции: $A_\ell := A_{i_1} \wedge \ldots \wedge A_{i_n} \in \Gamma$. Следовательно, семейство Z содержится в некотором ультрафильтре U.

Возьмем ультрапроизведение наших моделей по построенному ультрафильтру: $M := \prod_{i\in I}^{U} M_i$. Так как класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно УП, то $M \in \mathbb{K}$. Покажем, что $M \models \Gamma$. Для каждой формулы $A_i \in \Gamma$ имеем $M \models A_i$, поскольку $\{\ell \in I \mid M_\ell \models A_i\} = X_i \in S \subseteq U$. Итак, Γ выполнимо в $\mathbb{K}$. □

Следствие 8.26. *Пусть имеется УП и пусть ССО. Тогда класс* ***всех*** *структур* $\mathcal{S}$ *компактен.*

Теорема 8.27 (Критерии)**.** *Пусть ССО и имеется УП. Тогда получаются следующие критерии:*

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\equiv$		
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\equiv$	УП	
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\equiv$		УП
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\equiv$	УП	УП

Доказательство. Для $\Cup\Cap\mathbb{L}$ критерий уже знаем. Надо лишь изучить критерий для $\Cap\mathbb{L}$, поскольку остальные из него следуют.

Утверждение следует тривиально из того, что $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$ влечет, что $\mathbb{K}$ замкнут отн. УП, а значит, компактен. Остается воспользоваться теоремой 8.21. $\square$

Если есть некоторое отношение $\sim$ между структурами, которое, во-первых, сильнее $\equiv$, то есть всегда $M \sim N \Rightarrow M \equiv N$, а во-вторых, из $M \equiv N$ следует, что для некоторых ультрафильтров U, V имеем $M^U \sim N^V$, то критерии приобретают следующий окончательный вид:

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$	$\sim$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$	$\sim$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{L}$	$\sim$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \mathbb{L}$	$\sim$	УП	УП

Например, для языка и структур первого порядка таким отношением $\sim$ является отношение изоморфизма $\cong$. Нужное свойство есть знаменитая и далеко не тривиальная **теорема Кейслера–Шелаха**: *две модели элементарно эквивалентны $\iff$ некоторые их ультрастепени изоморфны.*

8.5 Несвязная сумма структур

(Этот раздел в основном имеет смысл для структур, не согласованным с отрицанием.)

Определение 8.28. Говорим, что в системе $(\mathcal{S}, \mathcal{L}, \models)$ *имеется операция несвязной суммы структур* (коротко: *есть* $\uplus$), если имеется операция $\uplus$, которая произвольному семейству моделей $(M_i)_{i \in I}$, заиндексированному произвольным непустым множеством $I \neq \varnothing$, сопоставляет модель, обозначаемую $M := \biguplus_{i \in I} M_i$, обладающую следующим свойством: для каждой формулы $A \in \mathcal{L}$ имеет место:

$$M \models A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in I \ M_i \models A.$$

Другими словами, $\mathsf{Theory}(\biguplus\limits_{i \in I} M_i) = \bigcap\limits_{i \in I} \mathsf{Theory}(M_i)$. Заметим: $M \sqsubseteq M_i$ для всех $i \in I$.

Пример 8.29. Если мы рассматриваем модальный язык $\mathcal{L} = \mathsf{ML}$, то на классе всех моделей Крипке и на классе всех шкал Крипке есть операция $\uplus$, обладающая указанным свойством. Для языка и структур первого порядка (фиксированной сигнатуры) такой операции нет (можно ли это строго доказать?).

В последующих леммах предполагаем, что в нашей системе есть $\uplus$.

Лемма 8.30. *Всякий класс структур $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L}$ замкнут относительно $\uplus$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$. Пусть для всех $i \in I$ имеем $M_i \in \mathbb{K}$, то есть $M_i \models \Gamma$. Берем $M := \biguplus_{i \in I} M_i$. Тогда $M \models \Gamma$, а значит, $M \in \mathbb{K}$. $\square$

Лемма 8.31. *Для всякого класса структур $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{L}$ его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуто относительно $\uplus$.*

Доказательство. Рассмотрим $M := \biguplus_{i \in I} M_i$. Надо доказать:
$\forall i \in I \ M_i \in \overline{\mathbb{K}} \implies M \in \overline{\mathbb{K}}$. По контрапозиции это равносильно следующему:
$M \in \mathbb{K} \implies \exists i \in I \ M_i \in \mathbb{K}$. Мы докажем больше:
$M \in \mathbb{K} \implies \forall i \in I \ M_i \in \mathbb{K}$.

Пусть $M \in \mathbb{K}$. Тогда $\forall i \in I$ имеем $M \sqsubseteq M_i$. Но класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\sqsubseteq$. Значит, $M_i \in \mathbb{K}$. $\square$

Лемма 8.32. *Для всякого класса $\mathbb{K}$ существует модель M, такая что $\mathsf{Theory}(\mathbb{K}) = \mathsf{Theory}(M)$.*

Доказательство. Обозначим $T := \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$. Для каждой формулы $A \notin T$ по определению имеем $\mathbb{K} \not\models A$, значит, существует модель $M_A \in \mathbb{K}$, такая что $M_A \not\models A$. Заметим, что эти модели заиндексированы *множеством* формул $\mathcal{L} \setminus T$. Составим из них несвязную сумму: $M := \biguplus_{A \notin T} M_A$.

Осталось доказать, что $\mathsf{Theory}(M) = T$. Для любой формулы $B \in \mathcal{L}$ имеем:
– если $B \in T$, то $\mathbb{K} \models B$, в частности, $\forall A \notin T \ M_A \models B$, откуда $M \models B$;
– если $B \notin T$, то $M_B \not\models B$, а значит, $M \not\models B$. $\square$

9 Критерии для модального языка и моделей Крипке

Применим полученные общие факты к модальному языку и классам (отмеченных) моделей. Для этого случая введем специальные обозначения — вместо $\mathbb{L}$, $\Cap\mathbb{L}$, $\Cup\mathbb{L}$, $\Cup\Cap\mathbb{L}$ будем писать $\mathbb{M}$, $\Cap\mathbb{M}$, $\Cup\mathbb{M}$, $\Cup\Cap\mathbb{M}$.

9.1 Операция модального насыщения

Определение 9.1. Операцию на моделях Крипке $M \mapsto M^\sharp$ назовём *операцией модального насыщения*, если для всякой модели M: 1) $M \equiv_{\mathsf{ML}} M^\sharp$; 2) $M^\sharp$ модально насыщенная и модально компактная.

Определение 9.2. Операцию на отмеченных моделях Крипке $(M,a) \mapsto (M^\sharp, a^\sharp)$ назовём *операцией модального насыщения*, если для всякой отмеченной модели Крипке M выполненены условия: 1) $(M,a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M^\sharp, a^\sharp)$; 2) $M^\sharp$ модально насыщенная.

Лемма 9.3. *Операции взятия канонической модели и ультра-расширения являются операциями модального насыщения для (отмеченных) моделей Крипке.*

Доказательство. Данные утверждения были доказаны в разделах 6.1 и 6.2. Уточним, как именно действуют указанные операции на отмеченных моделях: $(M,a)^{\mathsf{can}} = (M^{\mathsf{can}}, a^{\mathsf{can}})$, где $a^{\mathsf{can}} = \mathsf{Theory}(M,a)$; $(M,a)^{\mathsf{ue}} = (M^{\mathsf{ue}}, a^{\mathsf{ue}})$, где a^{ue} — главный ультрафильтр, содержащий точку a. □

Лемма 9.4 (Лемма о манёвре)**.** *Пусть $\sharp$ — операция модального насыщения (моделей или насыщенных моделей, соответственно). Тогда для любых моделей Крипке M, N и любых точек $a \in M$ и $b \in N$:*

1. $(M,a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N,b) \iff (M,a)^\sharp \simeq (N,b)^\sharp$;
2. $M \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} N \iff M^\sharp \simeq\colon N^\sharp$;
3. $M \equiv_{\mathsf{ML}} N \iff M^\sharp \colon\!\simeq\colon N^\sharp$.

Доказательство. Это было доказано ранее — см. леммы 6.2, 6.4, 6.5. □

9.2 Критерии для объединения модально аксиоматизируемых классов

9.2.1 Критерии в терминах модальной эквивалентности

Из общих теорем 8.7 и 8.13 вытекает следующий результат.

Теорема 9.5 (Критерий для объединения модально аксиоматизируемых классов)**.**

(1) *Класс моделей Крипке $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M}$* $\iff$ *он замкнут относительно $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$.*

(2) *Класс отмеченных моделей Крипке $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M}$* $\iff$ *он замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$.*

Отношение $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$ не является широко используемым в модальной логике. Дадим другую характеризацию, использующую более привычные отношения и операции.

Напомним, что $N \hookrightarrow M$ означает, что N является *порожденной подмоделью* модели M. Мы говорим, что класс моделей Крипке $\mathbb{K}$ *замкнут отн.* $\hookrightarrow$, если из $M \in \mathbb{K}$ и $N \hookrightarrow M$ следует $N \in \mathbb{K}$.

Теорема 9.6. *Класс моделей Крипке $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M} \iff$ он замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\hookrightarrow$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $M \equiv_{\mathsf{ML}} N$, то $M \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} N$. Если $N \hookrightarrow M$, то $M \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} N$. Отсюда следует: поскольку класс $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M}$ замкнут относительно $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$, то он замкнут и относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\hookrightarrow$.

($\Leftarrow$) Пусть класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\hookrightarrow$. Чтобы доказать, что $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M}$, согласно теореме 9.5, достаточно проверить, что $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$.

Пусть $M \in \mathbb{K}$ и $M \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} N$; докажем, что $N \in \mathbb{K}$. Применим к обоим моделям какую-либо операцию модального насыщения моделей $\sharp$; получаемые модели эквивалентны исходным, поэтому $M^\sharp \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} N^\sharp$. Но обе получившиеся модели — модально насыщенные и модально компактные. По лемме о манёвре имеем: $M^\sharp \simeq\colon N^\sharp$. Область определения данной бисимуляции является порожденной подмоделью $M' \hookrightarrow M^\sharp$, и мы имеем $M' \colon\!\simeq\colon N^\sharp$, а значит, $M' \equiv_{\mathsf{ML}} N^\sharp$. Теперь имеем цепочку:

$$M \in \mathbb{K} \iff M^\sharp \in \mathbb{K} \implies M' \in \mathbb{K} \iff N^\sharp \in \mathbb{K} \iff N \in \mathbb{K},$$

где использована замкнутость класса $\mathbb{K}$ относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\hookrightarrow$. □

Полученные критерии использует «языковое» отношение $\equiv_{\mathsf{ML}}$ (то есть отношение, в определении которого используются модальные формулы). Мы готовы получить критерии, в которых фигурируют лишь «структурные» операции и отношения (строго говоря, в них будет фигурировать операция насыщения $\sharp$, про «природу» которой мы ничего не оговариваем; но выше мы видели, что одной из операций насыщения является «структурная» операция взятия ультра-расширения).

9.3 Модально насыщенные классы (отмеченных) моделей

Определение 9.7. Класс отмеченных моделей $\mathbb{K}$ назовем *модально насыщенным*, если для каждой отмеченной модели $(M, a) \in \mathbb{K}$ существует отмеченная модель $(M^\sharp, a^\sharp) \in \mathbb{K}$, такая что выполнены условия: 1) $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (M^\sharp, a^\sharp)$; 2) модель $M^\sharp$ является модально насыщенной.

Определение 9.8. Класс моделей $\mathbb{K}$ назовем *модально насыщенным*, если для каждой модели $M \in \mathbb{K}$ существует модель $M^\sharp \in \mathbb{K}$, такая что: 1) $M \equiv_{\mathsf{ML}} M^\sharp$; 2) модель $M^\sharp$ является модально насыщенной и модально компактной.

Теорема 9.9 (Золин, 2017)**.** *Класс отмеченных моделей* $\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{M} \iff$ *классы* $\mathbb{K}$ *и* $\overline{\mathbb{K}}$ *замкнуты относительно бисимуляции и модально насыщенны.*

Доказательство. $(\Longrightarrow)$ Если $\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{M}$, то класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Тогда он (и его дополнение) замкнут относительно $\simeq$, а также известна операция насыщения $\sharp$, например, взятие канонической модели M^{can} или ультра-расширения $M^{\mathfrak{ue}}$, которая из модели делает модально насыщенную модель, модально эквалентную исходной (а оба класса $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замнуты относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$); тем самым классы $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ оба модально насыщенны.

$(\Longleftarrow)$ Докажем, что в условиях теоремы класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Допустим противное: для некоторых отмеченных моделей имеем $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$, но $(M, a) \in \mathbb{K}$ и $(N, b) \in \overline{\mathbb{K}}$. Поскольку оба класса модально насыщенные, существуют $(M, a)^\sharp \in \mathbb{K}$ и $(N, b)^\sharp \in \overline{\mathbb{K}}$. Поскольку эти отмеченные модели модально эквивалентны прежним, то они модально эквивалентны между собой: $(M, a)^{\equiv}_{\mathsf{ML}}(N, b)^\sharp$. Кроме того, модели M и N — модально насыщенные, поэтому имеется бисимуляция $(M, a)^{\simeq}(N, b)^\sharp$. Таким образом, мы имеем две отмеченные модели, бисимулирующие, но одна лежит в $\mathbb{K}$, а другая в $\overline{\mathbb{K}}$. Этого не может быть, поскольку класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно бисимуляции $\simeq$. $\square$

9.3.1 Критерий в терминах бисимуляции

Отмеченные модели будем обозначать: $\mathcal{M} = (M, a)$, $\mathcal{N} = (N, b)$ и т.д.

Теорема 9.10 (Структурный критерий для $\mathbb{U}\Cap\mathbb{M}$ для отмеченных моделей Крипке, Золин, 2017)**.**
Пусть $\sharp$ — операция модального насыщения отмеченных моделей, $\mathbb{K}$ — класс отмеченных моделей. $\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{M} \iff$ *класс $\mathbb{K}$ замкнут отн. бисимуляции ($\simeq$), а классы $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуты отн. операции $\sharp$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Очевидно. ($\Leftarrow$) Достаточно доказать, что класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Пусть $\mathcal{M} \equiv_{\mathsf{ML}} \mathcal{N}$. По лемме о манёвре $\mathcal{M}^\sharp \simeq \mathcal{N}^\sharp$. Тогда имеем цепочку:

$$\mathcal{M} \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{M}^\sharp \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{N}^\sharp \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{N} \in \mathbb{K},$$

где использована замнутость $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$, указанная в условиях теоремы. □

Теорема 9.11 (Структурный критерий для $\mathbb{U}\Cap\mathbb{M}$ для моделей Крипке, Золин, 2017)**.**
Пусть $\sharp$ — операция модального насыщения моделей, $\mathbb{K}$ — класс моделей Крипке. Тогда:

$$\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{M} \quad\iff\quad \begin{array}{l} \textit{класс } \mathbb{K} \textit{ замкнут относительно сюръективной бисимуляции } (\simeq:), \\ \textit{классы } \mathbb{K} \textit{ и } \overline{\mathbb{K}} \textit{ замкнуты относительно операции } \sharp. \end{array}$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Очевидно. ($\Leftarrow$) Достаточно доказать, что класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$. Пусть $M \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} N$. По лемме о манёвре $M^\sharp \simeq: N^\sharp$. Тогда имеем цепочку:

$$M \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad M^\sharp \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad N^\sharp \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad N \in \mathbb{K},$$

где использована замнутость классов $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$, указанная в условиях теоремы. □

Легко видеть, что замкнутость класса моделей $\mathbb{K}$ отн. $\simeq:$ равносильна замкнутости $\mathbb{K}$ отн. $:\simeq:$ и $\hookrightarrow$, поэтому указанный критерий переписывается следующим образом.

Теорема 9.12 (Структурный критерий для $\mathbb{U}\Cap\mathbb{M}$ для моделей Крипке, Золин, 2017)**.**
Пусть $\sharp$ — операция модального насыщения моделей, $\mathbb{K}$ — класс моделей Крипке. Тогда:

$$\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{M} \quad\iff\quad \begin{array}{l} \textit{класс } \mathbb{K} \textit{ замкнут относительно глобальной бисимуляции } (:\simeq:), \\ \textit{класс } \mathbb{K} \textit{ замкнут относительно порожденных подмоделей } (\hookrightarrow), \\ \textit{классы } \mathbb{K} \textit{ и } \overline{\mathbb{K}} \textit{ замкнуты относительно операции } \sharp. \end{array}$$

Подведем итог критериям для $\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{M}$. Пусть $\sharp$ — операция насыщения (например, $\mathfrak{ue}$).

- Для всякого класса отмеченных моделей $\mathbb{K}$ условие $\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{M}$ эквивалентно следующим:
  1. $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$;
  2. $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\simeq$, а классы $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуты относительно $\sharp$.
- Для всякого класса моделей $\mathbb{K}$ условие $\mathbb{K} \in \mathbb{U}\Cap\mathbb{M}$ эквивалентно следующим:
  1. $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\sqsubseteq_{\mathsf{ML}}$;
  2. $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\hookrightarrow$;
  3. $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\simeq:$, а классы $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуты относительно $\sharp$;
  4. $\mathbb{K}$ замкнут относительно $:\simeq:$ и $\hookrightarrow$, а классы $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуты относительно $\sharp$.

9.4 Критерии модальной (конечной) аксиоматизируемости

Нам потребуется модальная компактность, поэтому сразу сделаем следующее очевидное наблюдение.

Лемма 9.13. *Класс всех моделей (отмеченных моделей, шкал, отмеченных шкал) Крипке является модально компактным.*

Доказательство. Эти структуры — обычные структуры первого порядка (подходящей сигнатуры), а модальные формулы (пропущенные через стардартный перевод) — это особого вида формулы первого порядка. Выполнимость множеств модальных формул в указанных классах структур равносильна выполнимости множеств их первопорядковых напарников (в случае шкал нужно расширять их до всевозможных моделей — см. Утверждение внутри доказательства Леммы 7.5). Таким образом, наша лемма непосредственно следует из теоремы компактности для языка первого порядка (теорема 7.1). □

9.4.1 Критерии для классов отмеченных моделей

Начнем со случая семантики, согласованной с отрицанием — то есть с отмеченных моделей Крипке. Из общей теоремы 8.21 получается следующий результат.

Теорема 9.14 (Критерий модальной аксиоматизируемости классов отмеченных моделей Крипке)**.** *Класс отмеченных моделей $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M} \iff \mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и модально компактен.*

Мы хотим избавиться от условия компактности, точнее, заменить его на замкнутость класса $\mathbb{K}$ (или $\overline{\mathbb{K}}$) относительно каких-то операций или отношений. Они должны, во-первых, сохранять истинность модальных формул, а во-вторых, из замкнутости произвольного класса $\mathbb{K}$ отмеченных моделей относительно них должна следовать модальная компактность класса $\mathbb{K}$. Такую операцию (или отношение, или набор операций и отношений) можно назвать *компактификацией.*

В конспектах 2015–2016 года в разделе 12.2 описана операция ультрасуммы $\uplus^{\mathfrak{ue}}$ семейства отмеченных моделей (точнее, это недетерминированная операция, то есть на самом деле является отношением «отмеченная модель $\mathcal{M}$ является ультрасуммой семейства отмеченных моделей $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$») и про эту операцию доказаны следующие факты:
– истинность модальных формул сохраняется при взятии ультрасуммы отмеченных моделей;
– если класс отмеченных моделей замкнут относительно ультрасуммы, то он модально компактен.
Таким образом, $\uplus^{\mathfrak{ue}}$ является компактификацией. Отсюда следует такой результат.

Теорема 9.15. *Класс отмеченных моделей $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M} \iff \mathbb{K}$ замкнут отн. $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\uplus^{\mathfrak{ue}}$.*

Лемма 9.16. *Если класс отмеченных моделей $\mathbb{K}$ замкнут относительно бисимуляции $\simeq$ и ультрасуммы $\uplus^{\mathfrak{ue}}$, то $\mathbb{K}$ замкнут и относительно ультра-расширения $\mathfrak{ue}$.*

Эта лемма показывает, что в приводимом ниже критерии для $\Cap\mathbb{M}$ условия действительно сильнее, чем в критерии для $\Cup\Cap\mathbb{M}$. Принимая во внимание способ получения критериев для $\Cup\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}$ из критерия для $\Cap\mathbb{M}$ (теорема 8.21), получаем следующий итог (последние 3 строчки получены Venema, 1999):

Теорема 9.17 (Критерии (конечной) модальной аксиоматизируемости классов отмеченных моделей)**.** *Для всякого класса отмеченных моделей $\mathbb{K}$ имеют место следующие критерии:*

Критерии для классов отмеченных моделей Крипке

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M}$	$\simeq$	$\mathfrak{ue}$	$\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M}$	$\simeq$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\mathfrak{ue}$
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{M}$	$\simeq$	$\mathfrak{ue}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$
$\mathbb{K} \in \mathbb{M}$	$\simeq$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$	$\uplus^{\mathfrak{ue}}$

9.4.2 Критерии для классов моделей Крипке

В главе «Общая теория моделей» мы не получили критериев для $\Cap\mathbb{L}$ в общем случае (без ССО); (для этого нам потребовались бы структуры двух сортов). Получим теперь его непосредственно для модального языка и моделей Крипке.

Лемма 9.18. *Операции взятия несвязной суммы ($\uplus$) и ультра-расширения ($\mathfrak{ue}$) вместе составляют компактификацию моделей Крипке. То есть всякий класс моделей Крипке, замкнутый относительно этих операций, является модально компактным.*

Доказательство. Пусть множество формул $\Gamma = \{A_i \mid i \in I\}$ замкнуто относительно конъюнкции и каждая его формула $A_i \in \Gamma$ выполнима в классе моделей $\mathbb{K}$, то есть существует модель $M_i \in \mathbb{K}$ и ее точка $a_i \in M_i$, такие что $M_i, a_i \models A$. Тогда формула A_i выполнима в модели $M = \biguplus_{i \in I} M_i \in \mathbb{K}$, а значит, и в модели $M^{\mathfrak{ue}} \in \mathbb{K}$. Но модель $M^{\mathfrak{ue}}$ модально компактна; поэтому всё множество Γ выполнимо в M и тем самым в классе $\mathbb{K}$. (Сравни с доказательством леммы 12.2 из конспектов 2015–2016 года.) ☐

Теорема 9.19. *Пусть $\sharp$ — операция модального насыщения моделей, $\mathbb{K}$ — класс моделей Крипке.*

$$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M} \iff \begin{array}{l} \textit{класс } \mathbb{K} \textit{ замкнут относительно сюръективных бисимуляций } (\simeq:), \\ \textit{класс } \mathbb{K} \textit{ замкнут относительно несвязных сумм } (\uplus), \\ \textit{классы } \mathbb{K} \textit{ и } \overline{\mathbb{K}} \textit{ замкнуты относительно ультра-расширения } (\mathfrak{ue}). \end{array}$$

Доказательство. См. теорему 12.4 в конспектах 2015–2016 года. ☐

Критерий для классов моделей Крипке $\mathbb{K} \in \mathbb{M}$ — неизвестен. Вообще, не известно «чисто модальной» операции или отношения, замкнутость (класса $\mathbb{K}$ или $\overline{\mathbb{K}}$) относительно которой отличала бы классы моделей Крипке, определимые одной модальной формулой, от классов моделей Крипке, определимых множеством модальных формул. «Не-модальное» условие известно — замкнутость $\overline{\mathbb{K}}$ относительно ультрапроизведения (если класс моделей $\mathbb{K}$ определим одной модальной формулой, то он и его его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ определимо одной формулой первого порядка, а значит, $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно ультрапроизведений; если же $\mathbb{K}$ определим множеством модальных формул, то его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуто лишь относительно ультрастепеней). Смотри таблицы в разделе 11.4 конспектов 2015–2016 года.

10 Критерий модальной определимости элементарных классов шкал

Лемма 10.1. *Пусть модели M и N порождены точками a и b, соответственно. Если $(M, a) \equiv_{\mathsf{ML}} (N, b)$, то $M \equiv_{\mathsf{ML}} N$.*

Доказательство. Следует из того, что $M \models A \iff \forall n \geqslant 0\ M, a \models \Box^n A$. Данная же эквивалентность следует из того, что истинность формулы A в модели M означает ее истинность в точке a, в ее последователях $R(a)$, то есть $a \models \Box A$, в их последователях $R^2(a)$, то есть $a \models \Box^2 A$, и так далее; но M и состоит из всех указанных точек: $W = \{a\} \cup R(a) \cup R^2(a) \cup \dots$ $\Box$

Лемма 10.2. *Пусть имеет место глобальная бисимуляция между двумя моделями: $M :\simeq: N$. Если модель N модально различима, то эта бисимуляция является (сюръективной) функцией: $M \twoheadrightarrow N$, то есть модель N является p-морфным образом модели M.*

Доказательство. Всякая бисимуляция соединяет точки, модально эквивалентные друг другу. По условию, в модели N нет модально эквивалентных точек. Значит, данная бисимуляция не может соединять какую-либо точку модели M с более чем одной точкой модели N; а значит, она функциональна. $\Box$

Напомним, что если F — шкала, то F_a — подшкала, порожденная точкой a; она состоит из точек $\{a\} \cup R(a) \cup R^2(a) \cup \dots$ Аналогично для моделей.

Лемма 10.3 (Лемма о накрытии)**.** *Всякая шкала является p-морфным образом несвязной суммы своих корневых подшкал (и аналогично для моделей): $\biguplus\limits_{a \in W} F_a \twoheadrightarrow F$.*

Доказательство. Точке шкалы F_a сопоставить её же. Более точно, точке $\langle w, a \rangle$ указанной несвязной суммы шкал сопоставить точку w шкалы F. $\Box$

Лемма 10.4 (Лемма о переносе выполнимости)**.** *Пусть $F \models \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$ и класс $\mathbb{K}$ модально компактен. Если множество модальных формул Γ выполнимо в шкале F, то оно выполнимо и в классе $\mathbb{K}$.*

Доказательство. Без ограничения общности, Γ замкнуто относительно конъюнкции. Каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в шкале F по условию. Тогда формула A выполнима и в классе $\mathbb{K}$, поскольку иначе $\mathbb{K} \models \neg A$ и $F \models \neg A$. Пользуясь модальной компактностью класса $\mathbb{K}$, мы заключаем, что всё множество формул Γ выполнимо в классе шкал $\mathbb{K}$. $\Box$

Супермоделью шкалы $F = (W, R)$ назовем модель Крипке $M = (F, V)$ над множеством переменных $\mathsf{Var}_W = \{P_X \mid X \subseteq W\}$, интерпретирующую переменные P_X естественным образом: $V(P_X) = X$. Очевидно, что модель M — *модально различима*, то есть разные точки имеют разные теории; более того, разные точки различимы уже переменными (из множества Var_W).

Лемма 10.5. *Ультра-расширение супермодели $M^{\mathfrak{ue}}$ всякой шкалы — модально различимая модель.*

Доказательство. Наблюдение: $M^{\mathfrak{ue}}, u \models P_X \Leftrightarrow V(P_X) \in u \Leftrightarrow X \in u$, где $u \in W^{\mathfrak{ue}}$, $X \subseteq W$.

Пусть $u, v \in W^{\mathfrak{ue}}$, $u \neq v$. Значит, $\exists X \in u$: $X \notin v$. Тогда $u \models P_X$ и $v \not\models P_X$. $\Box$

10.1 Теорема Гольдблатта–Томасона

Напомним, что класс шкал $\mathbb{K}$ называется *модально определимым*, в наших обозначениях: $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{F}$, если он задается некоторым, быть может бесконечным, множеством модальных формул: $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(\Gamma)$ для некоторого множества формул $\Gamma \subseteq \mathsf{ML}$. Очевидно, что если класс шкал $\mathbb{K}$ задается некоторым множеством формул, то он задается и своей логикой $L := \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$.

Теорема 10.6 (Гольдблатт, Томасон, 1974)**.** *Пусть $\mathbb{K}$ — элементарный класс шкал Крипке. Тогда:*

$\mathbb{K}$ *модально определим* $\iff$ *класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно:*

- *несвязных сумм* ($\uplus$),
- *порожденных подшкал* ($\hookrightarrow$),
- *p-морфных образов* ($\twoheadrightarrow$),

его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуто относительно ультра-расширений ($\mathfrak{ue}$).

Доказательство. ($\Rightarrow$) Уже проверено; здесь элементарность класса $\mathbb{K}$ была не нужна.

($\Leftarrow$) Поскольку класс $\mathbb{K}$ элементарен, то он модально компактен и замкнут относительно ультрастепеней. Докажем, что класс $\mathbb{K}$ задается своей логикой $L = \mathsf{Logic}(\mathbb{K})$. Для этого докажем импликацию: $F \models L \Rightarrow F \in \mathbb{K}$ (ибо обратная импликация очевидна).

(1) Достаточно это доказать для шкал, порожденных точкой. Ибо тогда для произвольной шкалы F будем иметь (использована лемма 10.3, а также замкнутость класса $\mathbb{K}$ относительно $\uplus$ и $\twoheadrightarrow$):

$$F \models L \quad\Rightarrow\quad \forall a \in W\ F_a \models L \quad\Rightarrow\quad \forall a \in W\ F_a \in \mathbb{K} \quad\Rightarrow\quad \uplus_{a\in W} F_a \in \mathbb{K} \quad\Rightarrow\quad F \in \mathbb{K}.$$

(2) Итак, пусть шкала F имеет корень a. Возьмем ее супермодель $M = (F, V)$ и модальную теорию (в языке со множеством переменных Var_W) ее корня: $T := \mathsf{Theory}(M, a)$.

(3) Теория T выполнима в шкале F. По лемме 10.4 теория T выполнима и в классе $\mathbb{K}$:

существуют шкала $G \in \mathbb{K}$, модель N (над Var_W) со шкалой G, точка b из G, такие что $N, b \models T$.

Без ограничения общности, шкала G порождена точкой b; иначе перейдем к подшкале, порожденной точкой b, по-прежнему оставаясь в классе $\mathbb{K}$ ввиду его замкнутости относительно $\hookrightarrow$.

(4) Поскольку T — теория (M, a), то $(N, b) \equiv_{\mathsf{ML}} (M, a)$. Значит, $N \equiv_{\mathsf{ML}} M$ по лемме 10.1.

(5) Рассмотрим какую-нибудь ω-насыщенную ультрастепень[47] N^U модели N (она существует по теореме 7.6) и ультра-расширение $M^{\mathfrak{ue}}$ модели M.

(6) Поскольку $N^U \equiv_{\mathsf{ML}} N$ и $M^{\mathfrak{ue}} \equiv_{\mathsf{ML}} M$, то мы получили $N^U \equiv_{\mathsf{ML}} M^{\mathfrak{ue}}$.

Поскольку обе модели N^U и $M^{\mathfrak{ue}}$ модально насыщенные и модально компактные, то $N^U :\simeq: M^{\mathfrak{ue}}$.

Модель $M^{\mathfrak{ue}}$ модально различима. По лемме 10.2 имеем $N^U \twoheadrightarrow M^{\mathfrak{ue}}$, а значит, и $G^U \twoheadrightarrow F^{\mathfrak{ue}}$.

(7) Наконец, имеем цепь импликаций: $G \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; G^U \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; F^{\mathfrak{ue}} \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; F \in \mathbb{K}$. $\square$

Итак, доказательство прошло по следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} N^U & \twoheadrightarrow & M^{\mathfrak{ue}} \\ ||| & & ||| \\ N & \equiv & M \end{array}$$

[47] Для понимания данного доказательства не обязательно знать, что такое «ω-насыщенный» и «ультрастепень». Достаточно, как и в упомянутой теореме 7.6, знать следующие два свойства новой модели: 1) $N^U \equiv_{\mathbf{FO}} N$, а значит $G^U \equiv_{\mathbf{FO}} G$, а также, поскольку модальный язык является фрагментом языка первого порядка, то и $N^U \equiv_{\mathsf{ML}} N$; 2) модель N^U ω-насыщенная, а значит, модально насыщенная и модально компактная.

11 Связь между модальной и элементарной иерархиями: модели

Вспомним, что имеется стандартный перевод, преобразующий модальную формулу A в формулу первого порядка $A^*(x)$ с одной свободной переменной сигнатуры $\{R, =, P_0, P_1, \ldots\}$; эта формула на отмеченных моделях Крипке эквивалентна исходной модальной формуле. Навесив квантор $\forall x$, можно получить замкнутую формулу $\forall x\, A^*(x)$; она на моделях Крипке эквивалентна исходной модальной формуле. Таким образом, модальный язык является фрагментом языка первого порядка. Напрашивается вопрос: как охарактеризовать модальный язык внутри языка первого порядка? Две приводимые ниже теоремы дают ответ на этот вопрос для случая отмеченных моделей Крипке и для случая моделей Крипке, соответственно.

Лемма 11.1 (О переносе выполнимости, для отмеченных моделей)**.** *Пусть* $\mathbb{K}$ *— модально компактный класс отмеченных моделей,* $\mathcal{M} = (M, a)$ *— отмеченная модель. Если* $\mathcal{M} \models \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$*, то теория* $T = \mathsf{Theory}(\mathcal{M})$ *выполнима в классе* $\mathbb{K}$*.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{K}$ — модально компактный, а множество формул T замкнуто относительно конъюнкции, то для доказательства выполнимости T в $\mathbb{K}$ достаточно доказать, что каждая формула $A \in T$ выполнима в $\mathbb{K}$. Допустим противное, то есть $\mathbb{K} \models \neg A$, тогда $\mathcal{M} \models \neg A$. С другой стороны, $A \in T$, поэтому $\mathcal{M} \models A$. Противоречие. $\square$

Следующее утверждение формулируется нами для модального и первопорядкового языков, однако оно имеет место для любой пары языков $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$, в которых имеется конъюнкция (ССК), отрицание (ССО), а также имеет место $\mathcal{L}$-компактность класса всех структур,

Лемма 11.2 (Характеризация ML внутри **FO** в терминах $\equiv_{\mathsf{ML}}$)**.** *Пусть* $\mathbb{K}$ *— класс отмеченных моделей Крипке, заданный множеством формул первого порядка* $\Gamma(x)$*, то есть* $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$*. Тогда*

$$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K} \textit{ замкнут относительно } \equiv_{\mathsf{ML}}.$$

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Очевидно. ($\Longleftarrow$) Поскольку $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$, то класс $\mathbb{K}$ **FO**-компактен (теорема 7.2), а следовательно, и ML-компактен. Пусть $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Покажем, что он задается своей модальной теорией: положим $\Delta := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathbb{K})$. Очевидно, если $\mathcal{M} \in \mathbb{K}$, то $\mathcal{M} \models \Delta$. Обратно, пусть $\mathcal{M} \models \Delta$. По лемме 11.1 теория $T := \mathsf{Theory}_{\mathsf{ML}}(\mathcal{M})$ выполнима в $\mathbb{K}$, то есть $\exists \mathcal{N} \in \mathbb{K}$ такая что $\mathcal{N} \models T$. Иначе говоря, $\mathcal{M} \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} \mathcal{N}$. Но на отмеченных моделях семантика согласована с отрицанием, значит, $\mathcal{M} \equiv_{\mathsf{ML}} \mathcal{N}$. Наконец, поскольку $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$, мы заключаем, что $\mathcal{M} \in \mathbb{K}$. $\square$

11.1 Теорема ван Бентема о бисимуляции: локальная версия

Теорема 11.3 (ван Бентем «о бисимуляции», локальный вариант)**.**

(а) *Класс отмеченных моделей, задаваемый множеством формул первого порядка* $\Gamma(x)$*, задается и множеством модальных формул* $\Longleftrightarrow$ *он замкнут относительно бисимуляции:*

$$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E} \quad \Longrightarrow \quad \big(\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K} \textit{ замкнут относительно } \simeq\big)$$

(б) *Класс отмеченных моделей, задаваемый одной формулой первого порядка* $\alpha(x)$*, задается и одной модальной формулой* $\Longleftrightarrow$ *он замкнут относительно бисимуляции:*

$$\mathbb{K} \in \mathbb{E} \quad \Longrightarrow \quad \big(\mathbb{K} \in \mathbb{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K} \textit{ замкнут относительно } \simeq\big)$$

В более привычном виде — не в терминах классов отмеченных моделей, а в терминах формул или множеств формул, задающих эти классы — данная теорема переформулируется следующим образом:

(а) множество формул первого порядка $\Gamma(x)$ эквивалентно некоторому множеству модальных формул $\Longleftrightarrow$ множество формул $\Gamma(x)$ сохраняется при бисимуляции.

(б) формула первого порядка $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ формула $\alpha(x)$ сохраняется при бисимуляции.

Доказательство. Импликация ($\Longrightarrow$) в обоих случаях очевидна. Доказываем импликацию ($\Longleftarrow$).

(а) Начало доказательства как в лемме 11.2. Там для модели $\mathcal{M} \models \Delta$ была найдена модель $\mathcal{N} \in \mathbb{K}$, такая что $\mathcal{M} \equiv_{\mathsf{ML}} \mathcal{N}$. По теореме 7.6 имеются их ω-насыщения $\mathcal{M}^{\Phi}$ и $\mathcal{N}^{\Psi}$. Они элементарно, а значит, и модально эквивалентны исходным моделям. Поэтому $\mathcal{M}^{\Phi} \equiv_{\mathsf{ML}} \mathcal{N}^{\Psi}$. Но обе они модально насыщенные, значит, $\mathcal{M}^{\Phi} \simeq \mathcal{N}^{\Psi}$. Завершает доказательство цепь импликаций:

$$\mathcal{N} \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{N}^{\Psi} \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{M}^{\Phi} \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{M} \in \mathbb{K},$$

где импликации верны ввиду замкнутости $\mathbb{K}$ отн. $\equiv_{\mathbf{FO}}$, $\simeq$, $\equiv_{\mathbf{FO}}$, соответственно.

(б) Пусть класс $\mathbb{K}$ отмеченных моделей задается формулой первого порядка $\alpha(x)$ и замкнут относительно бисимуляции. По (а) он задается некоторым множеством модальных формул Γ или, что то же самое, их стандартными переводами $\Gamma^*(x)$. В частности, $\Gamma^*(x) \models \alpha(x)$. По принципу компактности, для некоторого конечного $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ имеем $\Gamma_1^*(x) \models \alpha(x)$ и, по-прежнему, из $\alpha(x)$ следуют все формулы Γ, в частности, все формулы из Γ_1. Таким образом, класс $\mathbb{K}$ задается конечным множеством модальных формул Γ_1, а значит, и одной модальной формулой $\bigwedge\Gamma_1$. □

11.2 Теорема ван Бентема о бисимуляции: глобальная версия

Теорема 11.4 (ван Бентем «о бисимуляции», глобальный вариант)**.**

(а) *Класс моделей Крипке, задаваемый некоторым множеством замкнутых формул первого порядка Γ, задается и некоторым множеством модальных формул $\Longleftrightarrow$ он замкнут относительно глобальной бисимуляции, взятия порожденной подмодели и несвязной суммы:*

$$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E} \qquad\Longrightarrow\qquad \big(\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{K} \text{ замкнут относительно } :\simeq:,\ \hookrightarrow,\ \uplus\big)$$

(б) *Класс моделей Крипке, задаваемый одной замкнутой формулой первого порядка A, задается и одной модальной формулой $\Longleftrightarrow$ он замкнут относительно глобальной бисимуляции, взятия порожденной подмодели и несвязной суммы:*

$$\mathbb{K} \in \mathbb{E} \qquad\Longrightarrow\qquad \big(\mathbb{K} \in \mathbb{M} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{K} \text{ замкнут относительно } :\simeq:,\ \hookrightarrow,\ \uplus\big)$$

Отдельного доказательства давать не будем. Но если знать критерии для всех четырех «типов» классов моделей Крипке для языка первого порядка и для модального (лекции 2015-2016, глава 11), то теорема будет легко следовать из сравнения этих двух таблиц, которые мы приводим ниже — видно, что для того, чтобы попасть из строки $\Cap\mathbb{E}$ первой таблицы в строку $\Cap\mathbb{M}$ второй таблицы, требуются замкнутость относительно указанных в теореме трех отношений; аналогично для строк $\mathbb{E}$ и $\mathbb{M}$.

Язык первого порядка

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{E}$	$\cong$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$	$\cong$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{E}$	$\cong$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \mathbb{E}$	$\cong$	УП	УП

Модальный язык

	Оба	$\mathbb{K}$		$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M}$	$:\simeq:$	$\hookrightarrow$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M}$	$:\simeq:$	$\hookrightarrow\ \uplus$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{M}$	$:\simeq:$	$\hookrightarrow$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \mathbb{M}$	$:\simeq:$	$\hookrightarrow\ \uplus$	УП	УП

Замечание. Итак, обе теоремы (и локальная, и глобальная) получаются сравнением соответствующих двух таблиц, а именно, 1-й и 3-й строчки. Разумеется, аналогичные результаты можно сформулировать, сравнивая 2-е строчки таблиц, а также 4-е строчки таблиц. В локальной теореме так и останется в формулировке одна бисимуляция $\simeq$. В глобальной теореме для этих строк, как мы видим, перестанет фигурировать $\uplus$.

Замечание. Локальные теоремы ван Бентема трактуются философски так, что модальный язык является бисимуляционно-инвариантным фрагментом языка первого порядка. Как мы видим, если на те же два языка смотреть с точки зрения моделей Крипке (без отмеченной точки, то есть глобально), то аналогичная метафора уже не будет столь изящной — нужно упоминать три отношения.

Вопрос. Локальная теорема ван Бентема для одной формулы (то есть пункт (б)) переносится и на случай ограничения левой и правой части классом конечных структур: *формула первого порядка $\alpha(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле над классом всех* ***конечных*** *отмеченных моделей $\Longleftrightarrow$ формула $\alpha(x)$ сохраняется при бисимуляции над классом всех* ***конечных*** *отмеченных моделей.* Переносится ли на этот случай и пункт (а)? Переносятся ли оба пункта глобальной теоремы? Переносятся ли результаты сравнения 2-х, а также 4-х строк соответствующих таблиц?

12 Связь между модальной и элементарной иерархиями: шкалы

Будем обозначать через $F \overset{\cong}{\hookrightarrow} G$ тот факт, что шкала F изоморфна некоторой порожденной подшкале шкалы G; аналогично для моделей.

Лемма 12.1 (E.Z.). *Пусть* $F = \prod_{i \in I}^{U} F_i$ *и* $G = \prod_{i \in I}^{U} G_i$. *Пусть* $F_i \overset{\cong}{\hookrightarrow} G_i$ *для всех* $i \in I$. *Тогда* $F \overset{\cong}{\hookrightarrow} G$.

Можно провести следующую (довольно грубую) аналогию к следующей лемме: если раскрыть скобки в выражении $(x_1 + \ldots + x_n)^n$, то одним из слагаемых будет произведение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Лемма 12.2 (Goldblatt). $\prod_{i \in I}^{U} F_i \ \overset{\cong}{\hookrightarrow} \ (\biguplus\limits_{i \in I} F_i)^U$.

Доказательство. Следует из предыдущей леммы, где шкала $G_j := \biguplus_{i \in I} F_i$ одна и та же для всех j. □

В качестве простого следствия получаем следующую лемму (напомним: $\cong$ — это изоморфизм).

Лемма 12.3. *Если класс шкал замкнут отн.* $\uplus$, $\hookrightarrow$, $\cong$, *УС, то он замкнут и отн. УП.*

Доказательство. Имея шкалы $(F_i)_{i \in I}$, где $F_i \in \mathbb{K}$, мы можем получить их ультрапроизведение $\prod_{i \in I}^{U} F_i$, оставаясь в $\mathbb{K}$, следующим способом: строим их несвязную сумму $\biguplus_{i \in I} F_i \in \mathbb{K}$, далее берем ультрастепень $(\biguplus_{i \in I} F_i)^U \in \mathbb{K}$, и наконец, выделяем из полученной шкалы некоторую порожденную подшкалу (снова попадающую в $\mathbb{K}$) и некоторую шкалу, изоморфную последней (она снова оказывается в $\mathbb{K}$). □

Далее мы будем использовать следующие критерии для структур и языка первого порядка, фактически полученные нами в разделе 8.4.3:

	Оба	$\mathbb{K}$	$\overline{\mathbb{K}}$
$\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{E}$	$\cong$	УС	УС
$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$	$\cong$	УП	УС
$\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{E}$	$\cong$	УС	УП
$\mathbb{K} \in \mathbb{E}$	$\cong$	УП	УП

12.1 Теорема ван Бентема о дихотомии

Ниже под языком первого порядка подразумевается язык сигнатуры $\{R, =\}$.

Теорема 12.4 (Теорема ван Бентема о дихотомии)**.**

(а) *Класс шкал, задаваемый множеством модальных формул, либо задается множеством формул первого порядка, то есть лежит в* $\Cap\mathbb{E}$*, либо не лежит даже в* $\Cup\Cap\mathbb{E}$*:*

$$\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{F} \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E} \quad \textit{или} \quad \mathbb{K} \notin \Cup\Cap\mathbb{E}\big).$$

(б) *Класс шкал, задаваемый одной модальной формулой, либо задается некоторой формулой первого порядка, то есть лежит в* $\mathbb{E}$*, либо не лежит даже в* $\Cup\Cap\mathbb{E}$*:*

$$\mathbb{K} \in \mathbb{F} \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\mathbb{K} \in \mathbb{E} \quad \textit{или} \quad \mathbb{K} \notin \Cup\Cap\mathbb{E}\big).$$

Доказательство. **(а)** Пусть $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(\Gamma)$ для некоторого множества модальных формул Γ. Тогда класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\uplus$ и $\hookrightarrow$. Предположим, что $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{E}$. Согласно таблице критериев, класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно УС и $\cong$. Тогда по лемме 12.3 класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно УП. Опять смотрим на таблицу критериев и заключаем: $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$.

(б) Пусть $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(A)$ для некоторой модальной формулы A. Предположим, что $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{E}$. По пункту (а), заключаем $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$, то есть $\mathbb{K}$ задается некоторым множеством формул первого порядка Δ сигнтуры $\{R, =\}$. Покажем, что на самом деле класс $\mathbb{K}$ задается одной формулой первого порядка.

Рассмотрим соответствующую модальной формуле A формулу второго порядка, означающую ее общезначимость на шкалах: $\forall\vec{P}\alpha$, где $\forall\vec{P}$ — кванторы второго порядка по одноместным предикатным переменным, отвечающим пропозициональным переменным $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, входящим в формулу A, а формула α есть замкнутый стандартный перевод модальной формулы A, то есть $\alpha = \forall x\, A^*(x)$. Нам дано, что множество формул первого порядка Δ и формула второго порядка $\forall\vec{P}\alpha$ задают один и тот же класс шкал $\mathbb{K}$. В частности, $\Delta \models \forall\vec{P}\alpha$. Следовательно,[48] $\Delta \models \alpha$. По принципу компактности, существует конечное подмножество $\Delta' \subseteq \Delta$, такое что $\Delta' \models \alpha$, а значит, $\Delta' \models \forall\vec{P}\alpha$, поскольку в Δ' не входят предикатные переменные $\vec{P}$. Но вспомним, что из формулы $\forall\vec{P}\alpha$ следуют все формулы множества Δ, в частности, все формулы множества Δ'. Таким образом, класс $\mathbb{K}$ задается не только формулой $\forall\vec{P}\alpha$, но и конечным множеством формул Δ', а значит, и одной формулой первого порядка $\bigwedge\Delta'$. Итак, $\mathbb{K} \in \mathbb{E}$. $\square$

[48] Кванторы всеобщности, стоящие справа от $\models$, по каким бы переменным они ни стояли, всегда можно отбросить.

12.2 Критерий элементарности для модально определимых классов шкал

Теорема Гольдблатта–Томасона дает критерий для того, чтобы элементарный класс шкал был модально определим. Зададимся вопросом: каков «обратный» критерий? Какие модально определимые классы шкал являются элементарными? Как обычно, интересует оба случая — и на уровне одной формулы, и на уровне множества формул. Для классов моделей Крипке такого вопроса не возникало, поскольку с точки зрения моделей Крипке модальный язык является фрагментом языка первого порядка. С точки же зрения шкал, дело обстоит иначе: элементарные и модально определимые классы шкал находятся в общем положении.

Напомним факт, доказанный в разделе 7.6 (Следствия 7.15 и 7.16): пусть $\mathbb{K}$ — класс шкал, тогда

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{K} \in \Cap\mathbb{F} & \Longrightarrow & \mathbb{K} \text{ замкнут относительно УС,} \\ \mathbb{K} \in \mathbb{F} & \Longrightarrow & \mathbb{K} \text{ замкнут относительно УП.} \end{array}$$

Теорема 12.5 (ван Бентем,[49] критерий элементарности модально определимых классов шкал)**.**

(1) *Пусть класс шкал* $\mathbb{K}$ *задан множеством модальных формул, то есть* $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{F}$*.*
Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) $\mathbb{K}$ *задается множеством формул I порядка, то есть* $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$*,*
(б) $\mathbb{K}$ *замкнут относительно элементарной эквивалентности* $\equiv_{\mathbf{FO}}$*,*
(в) $\mathbb{K}$ *замкнут относительно УС,*
(г) $\mathbb{K}$ *замкнут относительно УП.*

(2) *Пусть класс шкал* $\mathbb{K}$ *задан одной модальной формулой, то есть* $\mathbb{K} \in \mathbb{F}$*.*
Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) $\mathbb{K}$ *задается одной формулой I порядка, то есть* $\mathbb{K} \in \mathbb{E}$*,*
(б) $\mathbb{K}$ *замкнут относительно элементарной эквивалентности* $\equiv_{\mathbf{FO}}$*,*
(в) $\mathbb{K}$ *замкнут относительно УС,*
(г) $\mathbb{K}$ *замкнут относительно УП.*

И опять (как в случае теоремы Гольдблатта–Томасона) «упущен» случай, который на самом деле является открытой проблемой: теорема ничего не говорит о том, какие классы шкал, задаваемые *множеством* модальных формул, задаются *одной* формулой первого порядка — ибо таких примеров не известно и, наоборот, нет доказательства того, что такие примеры невозможны.

Доказательство. **(1)** Следующие импликации тривиальны, поэтому остается доказать (в) $\Rightarrow$ (а):

$$\begin{array}{ccc} (\text{а}) & \Rightarrow & (\text{б}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\text{г}) & \Rightarrow & (\text{в}) \end{array}$$

Пусть (в), то есть $\mathbb{K}$ замкнут относительно УС. И пусть $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{F}$. Тогда (как всякий модально определимый класс шкал) $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\uplus$, $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$, в частности, относительно $\cong$ (ведь изоморфизм является частным случаем p-морфизма). По лемме 12.3 класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно УП. Кроме того, $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно УС. По таблице критериев строка [$\cong$,УП,УС] означает, что $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$, то есть (а).

(2) Доказывается аналогично, изменение лишь такое: поскольку $\mathbb{K} \in \mathbb{F}$, то $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно УП. Поэтому мы получим строку [$\cong$,УП,УП] таблицы критериев и тем самым $\mathbb{K} \in \mathbb{E}$. □

[49] В статье ван Бентема есть только пункт (2); пункт (1) добавлен мною; вероятно, ван Бентем его знал.

13 Примеры классов моделей и шкал Крипке

(Данный раздел можно было бы вставить до главы 8. Просто не хочу сбивать нумерацию, т.к. по ней составлены билеты.)

13.1 Примеры классов моделей

Построим классы моделей Крипке, относящиеся к «типам» $\mathbb{M}$, $\Cap\mathbb{M}$, $\Cup\mathbb{M}$, $\Cup\Cap\mathbb{M}$, и вне этой иерархии. Класс из $\mathbb{M}$ привести легко — достаточно взять класс моделей, заданный какой-либо модальной формулой. В следующих ниже примерах классов моделей доказательства просты (оставлены в качестве упражнений).

Пример 13.1. Класс моделей, в которых все переменные всюду верны, очевидно, лежит в $\Cap\mathbb{M}$:

$$\mathbb{K} \;=\; \{M \mid M \models \mathsf{Var}\} = \{M \mid \forall n \; M \models p_n\}.$$

Докажите, что класс $\mathbb{K}$ не задается никакой модальной формулой, то есть $\mathbb{K} \notin \mathbb{M}$.

Пример 13.2. Двойственно (если это слово тут применимо), рассмотрим класс моделей, в которых некоторая (в каждой модели может быть своя) переменная всюду верна:

$$\mathbb{K} \;=\; \{M \mid \exists n \; M \models p_n\}.$$

По построению, $\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{M}$. Докажите, что $\mathbb{K} \notin \mathbb{M}$.

Пример 13.3. Аналогично для каждой последовательности $\sigma \in \Omega = \{0,1\}^\omega$ зададим класс

$$\mathbb{K}_\sigma \;=\; \{M \mid \forall n \; M \models p_n^{\sigma_n}\},$$

где используется стандартное обозначение: $p^1 = p$, $p^0 = \neg p$. По той же причине $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M}$, но $\mathbb{K} \notin \mathbb{M}$.

Пример 13.4. Рассмотрим объединение всех построенных выше классов $\mathbb{K}_\sigma$:

$$\mathbb{K} \;=\; \bigcup\nolimits_{\sigma\in\Omega} \mathbb{K}_\sigma \;=\; \{M \mid \forall n \; (M \models p_n \text{ или } M \models \neg p_n)\}.$$

По построению $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M}$. Второе равенство дает такое представление: $\mathbb{K} = \bigcap_{n\geqslant 0} \bigcup_{A\in\{p_n,\neg p_n\}} \mathsf{Models}(A)$. Докажите, что $\mathbb{K} \notin \Cap\mathbb{M}$ и $\mathbb{K} \notin \Cup\Cap\mathbb{M}$.

Пример 13.5. Класс всех конечных моделей Крипке не лежит даже в $\Cup\Cap\mathbb{M}$. Действительно, всякий класс моделей из $\Cup\Cap\mathbb{M}$ обязан быть замкнут относительно $\equiv_{\mathsf{ML}}$. Однако класс всех конечных моделей не таков: достаточно взять M — конечную модель, N — несвязную сумму бесконечного количества копий модели M. Очевидно, что $M \equiv_{\mathsf{ML}} N$. По той же причине класс всех бесконечных моделей Крипке не лежит в $\Cup\Cap\mathbb{M}$.

Задача 13.6. Приведите примеры классов *отмеченных моделей* всех четырех «типов».

13.2 Примеры классов шкал

Пример 13.7. Рассмотрим класс шкал $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(\Gamma)$, где $\Gamma = \{A_n \mid n \geqslant 1\}$, а модальные формулы:

$$A_n \;=\; \Diamond^n\Box\bot \to \Box^n\Box\bot.$$

1) Очевидно, что $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{F}$, ибо этот класс задан некоторым множеством модальных формул.

2) Каждая модальная формула A_n соответствует (на шкалах) следующей формуле первого порядка:

$$\alpha_n : \quad \forall x \left(\exists y \in R^n(x)\ R(y) = \varnothing \quad \to \quad \forall y \in R^n(x)\ R(y) = \varnothing \right)$$

Упражнение 1: распишите формулу α_n в «стандартном» синтаксисе формул первого порядка.

Упражнение 2: докажите эквивалентность: $F \models A_n \Leftrightarrow F \models \alpha_n$, для всякой шкалы F.

3) Как следствие, $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{E}$, ибо этот класс задается множеством формул первого порядка $\{\alpha_n \mid n \geqslant 1\}$.

4) Построим такие шкалы F_m, что $F_m \models \alpha_n \Leftrightarrow m \neq n$.

Шкала F_m состоит из двух цепей — длины m и $m+1$ — выходящих из одной точки.

Упражнение 1: напишите формальное определение шкал F_m.

Упражнение 2: докажите, что данные шкалы удовлетворяют указанному условию.

5) Как следствие, $\mathbb{K} \notin \mathbb{E}$.

Действительно, допустим, что класс $\mathbb{K}$ задается какой-то формулой первого порядка β. Другими словами, формула β эквивалентна множеству формул $\{\alpha_n \mid n \geqslant 1\}$. Тогда из множества формул первого порядка $\{\alpha_n \mid n \geqslant 1\}$ логически следует формула β. По принципу компактности, существует такое N, что из конечного множества формул $\{\alpha_n \mid n < N\}$ следует формула β, из которой (вспомним) следуют все формулы α_n, в частности, формула α_N. Однако структура F_N опровергает это логическое следование: на ней верны все формулы из $\{\alpha_n \mid n < N\}$, но не формула α_N. Противоречие.

6) По теореме ван Бентема о дихотомии $\mathbb{K} \notin \mathbb{F}$, то есть данный класс шкал нельзя задать одной модальной формулой.

Действительно, всякий класс шкал, задаваемый одной модальной формулой, либо лежит в $\mathbb{E}$ (но у нас это не так), либо не попадает даже в $\Cup\Cap\mathbb{E}$ (что тоже не так, ибо у нас он лежит в $\Cap\mathbb{E}$).

Пример 13.8. Рассмотрим те же модальные формулы A_n и класс шкал $\mathbb{K}' = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathsf{Frames}(A_n)$. Очевидно, что $\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{F}$. Докажите, что $\mathbb{K} \in \Cup\mathbb{E}$, $\mathbb{K} \notin \mathbb{E}$, $\mathbb{K} \notin \mathbb{F}$, по аналогии с предыдущим примером.

Пример 13.9. Приведите пример класса шкал $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{F}$, не лежащий в меньших «типах».

Пример 13.10. Класс всех конечных шкал, равно как и класс всех бесконечных шкал не лежит в $\Cup\Cap\mathbb{F}$, ибо не замкнут относительно перехода от шкалы к другой шкале, имеющей ту же логику (то есть не замкнут относительно отношения $\equiv_{\mathsf{ML}}$ на шкалах). Причина та же, что и для моделей — наличие операции несвязной суммы шкал, не меняющей логику (если суммируется много копий одной и той же шкалы), но меняющей мощность шкалы с конечной на бесконечную (и наоборот).

13.3 Элементарные и неэлементарные модальные формулы

Определение 13.11. Модальная формула A называется *элементарной*, если она задает элементарный класс шкал: $\mathsf{Frames}(A) \in \mathbb{E}$.

Заметим, что в использовании термина *элементарный* здесь нет двусмысленности: если класс шкал, заданный модальной формулой, задается некоторым *множеством* формул первого порядка, то он непременно задается и одной *формулой* первого порядка (по теореме ван Бентема о дихотомии).

Для общей информации приведем следующий потрясающий результат.

Теорема 13.12 (Thomason?)**.** *Множество элементарных модальных формул не аналитическое.*

Пример 13.13. Хорошо известны примеры элементарных модальных формул:
– формула $\Box p \to p$ соответствует рефлексивности,
– формула $\Box p \to \Box\Box p$ соответствует транзитивности,
– формула $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$ соответствует «(i, j, m, n)-условию» (конспект 2014-2015, §7.2).

Пример 13.14. Примеры неэлементарных модальных формул:

– Формула Лёба (AL): $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ — задает класс шкал, в которых R транзитивно и *обратно фундировано*: во всяком непустом подмножестве есть R-максимальный элемент. Последнее условие эквивалентно (по модулю аксиомы выбора) следующему условию: в шкале нет бесконечно возрастающих цепей (из не обязательно попарно различных элементов; в частности, шкала иррефлексивна и ациклична): $\neg\exists x_0 \, R \, x_1 \, R \, x_2 \, R \, \ldots$ Доказательства см. в конспекте 2014-2015, §3.1.

– Формула МакКинси (AM): $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ задает класс шкал с условием, где $\overline{X} := W \subseteq X$:

$$\forall X \subseteq W \; \forall a \in W \; \exists b \in R(a) \; \big(R(a) \subseteq X \;\vee\; R(a) \subseteq \overline{X} \big).$$

Упражнение: докажите соответствие формулы МакКинси данному условию.

Неэлементарность формулы МакКинси мы доказывать не будем, разберемся же с формулой Лёба.

Наиболее «тонким» способом доказательства того, что некоторая модальная формула A неэлементарна, а точнее, что задаваемый ею класс не лежит в $\mathbb{U}\Cap\mathbb{E}$, был бы такой: построить две шкалы F, G, такие что $F \equiv_{\mathbf{FO}} G$, но $F \models A$, $G \not\models A$. Это было бы лишним подтверждением теоремы ван Бентема о дихотомии. Это действительно можно сделать для обоих примеров модальных формул. Однако мы положимся на теорему ван Бентема о дихотомии и докажем более простой факт — что задаваемый формулой Лёба класс шкал не лежит в $\Cap\mathbb{E}$, то есть не аксиоматизируем в языке первого порядка. Для этого мы покажем, что этот класс не является компактным (относительно языка первого порядка).

Лемма 13.15. *Формула Лёба неэлементарна. То есть класс шкал, на которых общезначима формула Лёба, нельзя задать никаким множеством формул первого порядка сигнатуры* $\{R, =\}$.

Доказательство. Если бы класс шкал $\mathbb{K} = \mathsf{Frames}(\mathsf{AL})$ был аксиоматизируемым в языке первого порядка сигнатуры $\{R, =\}$, то он автоматически считался бы аксиоматизируемым и в языке первого порядка любой сигнатуры Σ, расширяющей данную. Тогда он должен был быть компактным (относительно формул расширенной сигнатуры Σ). Мы же предъявим сигнатуру Σ, в которой $\mathbb{K}$ не компактен.

Пусть Σ — расширение сигнатуры $\{R, =\}$ счетным множеством констант: $\{c_0, c_1, \ldots\}$. Рассмотрим следующее множество предложений сигнатуры Σ:

$$\Gamma \;=\; \{\, R(c_0, c_1),\; R(c_1, c_2),\; \ldots \}.$$

Каждое конечное подмножество множества Γ выполнимо в $\mathbb{K}$ — достаточно взять конечный линейный порядок подходящей длины. Однако всё множество формул Γ не выполнимо в $\mathbb{K}$, ибо во всякой шкале, выполняющей Γ, имеется бесконечно возрастающая цепь. $\Box$

Замечание. Достаточно одной константы:

$$\Gamma = \{\text{транзитивность},\ \text{иррефлексивность},\ \text{линейность}\} \;\cup\; \{\exists^{\geqslant n} x \, R(c, x) \mid n \geqslant 1\}.$$

Тогда модель множества Γ будет строгим линейным порядком и расти от константы «вправо». Без константы ничто не мешает модели расти «влево», не нарушая обратной фундированности.

Вопрос. Можно ли всё-таки обнаружить некомпактность в исходной сигнатуре $\{R, =\}$?

Даже если окажется, что в исходной сигнатуре $\{R, =\}$ компактность всё же верна, то ничего парадоксального не обнаружится: ведь мы знаем, что кроме того данный класс шкал $\mathbb{K}$ не лежит в $\mathbb{U}\Cap\mathbb{E}$, а потому не замкнут относительно $\equiv_{\mathbf{FO}}$. То есть он не лежит в $\Cap\mathbb{E}_{\{R,=\}}$ хотя бы потому, что он не замкнут относительно $\equiv_{\mathbf{FO}}$, не зависимо от того, компактен он или нет в данной сигнатуре. Поэтому вопрос о компактности стоит просто из любопытства.

14 Разбивка по лекциям 2016–2017

Осень 2016

Лекция № 01 (2016.09.30) Приложения и семантики модальной логики: 1) представление знаний; 2) формальная доказуемость (арифметическая семантика); 3) топологическая семантика.

Синтаксис и семантика модальных формул. Логика одноточечной шкалы (иррефлексивной, рефлексивной).

Лекция № 02 (2016.10.14) Задача о логиках «ежей» (конечных, счетного, континуального).

Лекция № 03 (2016.10.21) Бисимуляция. Инвариантность модальных формул при бисимуляциях. Бисимулирующие отмеченные модели модально неотличимы. Обратное неверно: контрпример. Верно обратное, если модели: конечные, конечно-ветвящиеся, модально насыщенные.

Лекция № 04 (2016.10.28) Бисимуляционные игры. Конечные бисимуляционные игры и модальная неотличимость отмеченных моделей.

Лекция № 05 (2016.11.11) Бесконечные бисимуляционные игры и бисимуляционная эквивалентность отмеченных моделей.

Инфинитарный модальный язык, совпадение бисимуляционной эквивалентности и неотличимости формулами этого языка.

Лекция № 06 (2016.11.18) Ограниченно-инфинитарные модальные языки ML_κ. Понятие κ-модально насыщенных моделей. Совпадение $\simeq$ и $\equiv_{\mathsf{ML}_\kappa}$ для таких моделей. Конечно-ветвящиеся модели являются κ-модально насыщенными.

Лекция № 07 (2016.11.25) Исчисление **K**. Нормальная модальная логика. Логика произвольного класса шкал нормальна. Определения полной (нормальной модальной) логики.

Непротиворечивые множества формул. Лемма о расширении н.м. формул любой формулой или ее отрицанием. Максимальные непротиворечивые множества формул. Лемма Линденбаума. Определение канонической модели.

Лекция № 08 (2016.12.02) Лемма о м.н.м. Лемма о канонической модели. Теорема о полноте любой логики относительно ее канонической модели.

Каноническая логика. Примеры канонических и неканонических логик. Сильная полнота канонических логик.

Лекция № 09 (2016.12.09) Конечные м.н.м. Лемма о конечных м.н.м.

Конечные канонические модели для некоторых нормальных модальных логик. Доказательство соответствующих теорем о полноте (и финитной аппроксимируемости).

Лекция № 10 (2016.12.16) Секвенциальные исчисления для некоторых нормальных модальных логик. Совместное доказательство полноты гильбертовского и секвенциального исчислений и финитной аппроксимируемости методом конечных канонических моделей.

Весна 2017

Лекция № 11 (2016.02.17) Модальный язык: синтаксис, семантика. Теория (отмеченной) модели, логика (отмеченной) шкалы. Теория класса (отмеченных) моделей, логика класса (отмеченных) шкал. Доказательство теоремы корректности, то есть того, что все они соответствуют общим понятиям — (нормальной) модальной теории, (нормальной) модальной логики.

Несвязная сумма моделей или шкал. Связь ее теории / логики с теориями / логиками исходных моделей / шкал. Применение: теория всякого класса моделей является теорий некоторой модели; логика всякого класса шкал является логикой некоторой шкалы.

Лекция № 12 (2016.03.03) Порожденная подмодель и подшкала. Связь теории модели (логики шкалы) с теорией подмодели (логикой подшкалы).

Модальный морфизм (он же p-морфизм) моделей и шкал. Связь теории модели (логики шкалы) с теорией (логикой) ее p-морфного образа.

Слабая теорема Макинсона: каждая полная по Крипке логика содержится в **Triv** или в **Ver**.

Лекция № 13 (2016.03.10) Модально насыщенные (м.н.) модели. Из модальной эквивалентности двух отмеченных м.н. моделей следует наличие бисимуляции между ними (из лекции № 3).

Модально компактные (м.к.) модели. Если модели M и N м.н. и м.к., то
– из $M \sqsubseteq_{\mathsf{ML}} N$ следует $M \simeq: N$,
– из $M \equiv_{\mathsf{ML}} N$ следует $M :\simeq: N$.

Каноническая модель нормальной теории: эквивалентное определение для точек этой модели (как полные непротиворечивые теории, содержащие данную нормальную теорию). Каноническая модель является м.н. и м.к. В канонической модели любые две точки модально различимы.

Если модель M м.н. и м.к., то $M \twoheadrightarrow M^{\mathsf{can}}$. Следствие: теория любой модели реализуется на некоторой модели мощности не более континуума.

Лекция № 14 (2016.03.24) Если $T \subseteq T'$ — две нормальные теории, то $M_{T'} \hookrightarrow M_T$.

Компактность логики первого порядка (напоминание). Всякий элементарный класс шкал Крипке является модально компактным.

Теорема об ω-насыщении моделей первого порядка (без доказательства).

Теорема Файна: всякая элементарная логика является канонической.

Лекция № 15 (2016.03.31) Иерархия «типов» классов структур по их определимости в языке. Совпадение типов $\Cup\Cap\mathbb{L}$ и $\Cap\Cup\mathbb{L}$.

Критерий для $\mathbb{K} \in \Cap\Cup\mathbb{L}$ в общем случае и в случае семантики, согласованной с отрицанием.

Наименьший аксиоматизируемый класс, содержащий данную модель.

Лекция № 16 (2016.04.07) Классы $[\mathbb{K}] \subseteq (\mathbb{K}) \subseteq \langle\mathbb{K}\rangle$. Теоремы: $(\mathbb{K})$ — наименьший класс из $\Cup\Cap\mathbb{L}$, содержащий класс $\mathbb{K}$; $\langle\mathbb{K}\rangle$ — наименьший класс из $\Cap\mathbb{L}$, содержащий класс $\mathbb{K}$.

Семантика, согласованная с отрицанием (ССО). В этом случае $\mathbb{L}$ и $\Cup\Cap\mathbb{L}$ замкнуты относительно дополнения, $\Cap\mathbb{L}$ и $\Cup\mathbb{L}$ переходят друг в друга при взятии дополнения класса.

Семантика, согласованная с конъюнкцией.

Лекция № 17 (2016.04.14) Компактные классы структур (для случая ССО). Совпадение $[\mathbb{K}] = \langle\mathbb{K}\rangle$.

Критерий конечной аксиоматизируемости: $\mathbb{K} \in \mathbb{L} \Leftrightarrow \mathbb{K}, \overline{\mathbb{K}} \in \Cap\mathbb{L}$.

Критерий аксиоматизируемости: $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{L} \iff \mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv$ и компактен.

Следствия для модального языка: критерий для $\Cup\Cap\mathbb{M}$ (для моделей) в терминах $\equiv_{\mathsf{ML}}$ и $\hookrightarrow$.

Лекция № 18 (2016.04.21) Ультрафильтр. Ультрарасширение модели Крипке. Оно является модально насыщенным и модально компактным, модально эквивалентно исходной модели.

Операция модального насыщения. Лемма о манёвре.

Критерий для $\Cup\Cap\mathbb{M}$ (для отмеченных моделей) в терминах бисимуляции и операции насыщения.

Лекция № 19 (2016.04.28) Ультрасумма отмеченных моделей Крипке. Связь с ультрарасширением.

Всякий класс отмеченных моделей Крипке, замкнутый относительно ультрасумм, компактен.

Оставшиеся критерии ($\Cap\mathbb{M}$, $\Cup\mathbb{M}$, $\mathbb{M}$) для классов отмеченных моделей.

Критерии для моделей (обзор). Компактность класса моделей, замкнутого относительно $\uplus$ и $\mathfrak{ue}$.

Лекция № 20 (2016.05.05) Теорема Гольдблатта–Томасона (с предварительными леммами).

Лекция № 21 (2016.05.12) Теоремы ван Бентема о бисимуляции (для отмеченных моделей).

Аналоги теорем ван Бентема для моделей (без доказательства).

Теоремы ван Бентема о дихотомии.

Лекция № 22 (2016.05.19) Примеры классов моделей Крипке типов $\mathbb{M}$, $\Cap\mathbb{M}$, $\Cup\mathbb{M}$, $\Cup\Cap\mathbb{M}$. Пример класса шкал Крипке, задаваемого некоторым множеством модальных формул, но не завадаемого никакой одной модальной формулой, а также никакой одной формулой первого порядка.

Элементарная модальная формула (определение). Примеры элементарных модальных формул (рефлексивность, транзитивность и др.). Примеры неэлементарных модальных формул (формула Лёба, формула МакКинси). Доказательство неэлементарности формулы Лёба.