# Модальная логика: Модели неклассических логик

**Е.Е.Золин, И.Б. Шапировский**
**(годовой курс, 2015–2016)**

## Содержание

# 1 Каноничность, полнота, сильная полнота, элементарность

Введем обозначение: $\mathbf{L} \models A$, если для любой шкалы $F$ имеем: $F \models \mathbf{L} \Longrightarrow F \models A$.

**Определение 1.1.** Логика $\mathbf{L}$ называется *полной*, если для любой формулы $A$ имеет место эквивалентность: $\mathbf{L} \vdash A \Longleftrightarrow \mathbf{L} \models A$.

Свойство полноты можно эквивалентным образом сформулировать так:

**Определение 1.2.** Логика $\mathbf{L}$ *полна*, если всякая $\mathbf{L}$-непротиворечивая формула $\mathbf{L}$-выполнима.

Напомним, что формула $A$ называется $\mathbf{L}$-*непротиворечивой*, если $\mathbf{L} \nvdash \neg A$; $\mathbf{L}$-*выполнимой*, если она истинна в некоторой точке некоторой модели над $\mathbf{L}$-шкалой: $\exists F \models \mathbf{L}\ \exists M = (F, \theta)\ \exists x$: $M, x \models A$.

Введем более сильное свойство, потребовав то же не для формулы, а для множества формул.

**Определение 1.3.** Логика $\mathbf{L}$ называется *сильно полной*, если всякое $\mathbf{L}$-непротиворечивое множество формул $\mathbf{L}$-выполнимо.

Напомним, что множество формул $\Gamma$ называется $\mathbf{L}$-*непротиворечивым*, если не существует его конечного подмножества $\Delta \subseteq \Gamma$, такого что $\mathbf{L} \vdash \neg\bigwedge\Delta$; множество $\Gamma$ называется $\mathbf{L}$-*выполнимым*, если оно истинно в некоторой точке некоторой модели над $\mathbf{L}$-шкалой: $\exists F \models \mathbf{L}\ \exists M = (F, \theta)\ \exists x$: $M, x \models \Gamma$.

Выше для произвольной непротиворечивой модальной логики $\mathbf{L}$ была построена *каноническая шкала* $F_{\mathbf{L}} = (W_{\mathbf{L}}, R_{\mathbf{L}})$ и *каноническая модель* $M_{\mathbf{L}} = (F_{\mathbf{L}}, \theta_{\mathbf{L}})$. Напомним, что $W_{\mathbf{L}}$ состоит из $\mathbf{L}$-максимальных множеств формул; $x\, R_{\mathbf{L}}\, y \leftrightharpoons$ для всех формул $A$ имеем $(\Box A \in x \Rightarrow A \in y)$; $x \in \theta_{\mathbf{L}} \Leftrightarrow p \in x$. Определение канонического отношения $R_{\mathbf{L}}$ эквивалентно следующему: $x\, R_{\mathbf{L}}\, y \Leftrightarrow \boxtimes x \subseteq y \Leftrightarrow \Diamond y \subseteq x$, где мы обозначили $\boxtimes\Gamma = \{A \mid \Box A \in \Gamma\}$ и $\Diamond\Gamma = \{\Diamond A \mid A \in \Gamma\}$:

**Упражнение 1.4.** Проверьте, что множество $\boxtimes x$, где $x \in W_{\mathbf{L}}$, замкнуто относительно конъюнкции.

Теорема о канонической модели утверждает: $M_{\mathbf{L}}, x \models A \Leftrightarrow A \in x$; и как следствие, $M_{\mathbf{L}} \models \mathbf{L}$.

**Определение 1.5.** Логика $\mathbf{L}$ называется *канонической*, если она общезначима на своей канонической шкале: $F_{\mathbf{L}} \models \mathbf{L}$.

**Лемма 1.6.** $\mathbf{L}$ *каноническая* $\Longrightarrow$ $\mathbf{L}$ *сильно полна* $\Longrightarrow$ $\mathbf{L}$ *полна.*

*Доказательство.* Пусть множество формул $\Gamma$ является $\mathbf{L}$-непротиворечивым. По лемме Линденбаума оно содержится в некотором $\mathbf{L}$-максимальном: $\exists x \in W_{\mathbf{L}}$: $\Gamma \subseteq x$. По теореме о канонической модели $M_{\mathbf{L}}, x \models \Gamma$. Вспомним, что $\mathbf{L}$ каноническая: $F_{\mathbf{L}} \models \mathbf{L}$. Значит, множество $\Gamma$ является $\mathbf{L}$-выполнимым. $\Box$

## 1.1 Примеры канонических логик

Логика $\mathbf{K}$ каноническая (было доказано ранее). Добавление аксиом рефлексивности $\Box p \to p$, симметричности $p \to \Box\Diamond p$, транзитивности $\Box p \to \Box\Box p$, Чёрча–Россера $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ дает вновь каноническую логику. Проверим это для последней формулы.

**Лемма 1.7.** *Логика* $\mathbf{L} := \mathbf{K} + (\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p)$ *каноническая.*

*Доказательство.* Напомним, что $F \models \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \Longleftrightarrow \forall x, y, z\, (x\, R\, y \wedge x\, R\, z \to \exists w\, (y\, R\, w \wedge z\, R\, w))$; последнее называется свойством Чёрча–Россера. Значит, чтобы доказать, что $F_{\mathbf{L}} \models \mathbf{L}$, достаточно проверить, что отношение $R_{\mathbf{L}}$ обладает свойством Чёрча–Россера.

Итак, пусть $x\, R_{\mathbf{L}}\, y$ и $x\, R_{\mathbf{L}}\, z$, то есть $\Diamond y \subseteq x$ и $\Diamond z \subseteq x$. Чтобы доказать существование такого $w \in W_{\mathbf{L}}$, что $y\, R_{\mathbf{L}}\, w$ и $z\, R_{\mathbf{L}}\, w$, то есть $\boxtimes y \subseteq w$ и $\boxtimes z \subseteq w$, нам достаточно проверить $\mathbf{L}$-непротиворечивость множества $\Gamma := \boxtimes y \cup \boxtimes z$. Допустим противное, тогда существует конечный набор формул, а в виду замкнутости множеств $\boxtimes y$ и $\boxtimes z$ относительно конъюнкции, можно считать, что существуют формулы $A \in \boxtimes y$ и $B \in \boxtimes z$, такие, что $\mathbf{L} \vdash \neg(A \wedge B)$, то есть $\mathbf{L} \vdash A \to \neg B$. Так как $A \in \boxtimes y$, то $\Box A \in y$, откуда ввиду $\Diamond y \subseteq x$ получаем $\Diamond\Box A \in x$. Поскольку $(\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A) \in x$, то $\Box\Diamond A \in x$. Ввиду монотонности операторов $\Box$ и $\Diamond$ в любой нормальной логике[1] мы имеем $\mathbf{L} \vdash \Box\Diamond A \to \Box\Diamond\neg B$. Значит, $\Box\Diamond\neg B \in x$, откуда ввиду $\boxtimes x \subseteq z$ заключаем $\Diamond\neg B \in z$, что противоречит условию $B \in \boxtimes z$, то есть $\Box B \in z$. $\Box$

[1] Последнее означает, что из $\mathbf{L} \vdash \varphi \to \psi$ следует $\mathbf{L} \vdash \Box\varphi \to \Box\psi$ и $\mathbf{L} \vdash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$.

## 1.2 Пример неканонической логики

Логика Гёделя–Лёба: $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Данная аксиома задает класс транзитивных обратно фундированных шкал Крипке (последнее означает отсутствие бесконечных цепей $x_1 \, R \, x_2 \, R \, x_3 \ldots$).

**Лемма 1.8.** *Логика Гёделя–Лёба* **GL** *не является канонической.*

*Доказательство.* Покажем, что каноническая шкала логики **GL** не является обратно фундированной, по причине того, что в ней имеются рефлексивные точки. Для этого докажем **GL**-непротиворечивость множества формул $\Gamma = \{(\Box A \to A) \mid A \in \mathsf{Fm}\}$. Этого достаточно, ибо тогда $\Gamma$ содержится в некотором **GL**-максимальном множестве $x$, и $x \, R_{\mathbf{GL}} \, x$, поскольку из $\Box A \in x$ всегда будет следовать $A \in x$.

Допустим, $\Gamma$ является **GL**-противоречивым; значит, нашлись такие формулы $A_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\mathbf{GL} \vdash \neg \bigwedge (\Box A_i \to A_i)$, то есть $\mathbf{GL} \vdash \bigvee (\neg A_i \wedge \Box A_i)$. Тогда эта дизъюнкция истинна (при любой оценке) в цепи из $n+1$ точки: $(\{0, \ldots, n\}, <)$. Но поскольку дизъюнктов $n$, то некоторая формула $\neg A_i \wedge \Box A_i$ верна в двух точках $k < \ell$. Значит, в точке $k$ верно и $\Box A_i$, и $\Diamond \neg A_i$, чего не бывает. $\Box$

**Лемма 1.9.** *Логика Гёделя–Лёба* **GL** *не является сильно полной.*

*Доказательство.* Рассмотрим множество $\Gamma = \{\Diamond p_1\} \cup \{A_i := \Box(p_i \to \neg \Diamond p_i \wedge \Diamond p_{i+1}) \mid i \geqslant 1\}$. Имеем:
- $\Gamma$ не **GL**-выполнимо: если $M, x_1 \models \Gamma$, то имеется бесконечная цепь $x_1 \, R \, x_2 \, R \, x_3 \ldots$, где $x_i \models p_i$.
- $\Gamma$ является **GL**-непротиворечивым. Допустим, $\mathbf{GL} \vdash \neg(\Diamond p_1 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$, где $n \geqslant 0$. Но эта формула опровергается в точке 0 цепи $(\{0, \ldots, n\}, <)$ при оценке $i \models p_i$, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. $\Box$

**Теорема 1.10.** *Логика Гёделя–Лёба* **GL** *полна.*

*Доказательство.* Из вышесказанного ясно, что доказательство полноты этой логики методом канонической модели провести нельзя. Другой метод разобран в курсе 2016–2017 года. $\Box$

## 1.3 Элементарные классы шкал и логики

Заметим, что в примерах выше каждый раз, когда нам нужно было проверить, что $F_{\mathbf{L}} \models \mathbf{L}$, мы не занимались проверкой общезначимости некоторой модальной формулы в шкале $F_{\mathbf{L}}$, а вместо этого убеждались, что шкала $F_{\mathbf{L}}$ удовлетворяет некоторому условию. Причем это условие формулировалось на языке первого порядка. Случайно ли это? Оказывается, что нет.

**Определение 1.11.** Класс шкал $\mathbb{K}$ называется *элементарным*, если он задается некоторым (быть может, бесконечным) множеством формул первого порядка (в сигнатуре $\{\mathsf{R}, =\}$).

**Определение 1.12.** Логика **L** называется *полной относительно класса шкал* $\mathbb{K}$, если для любой формулы $A$ имеем: $\mathbf{L} \vdash A \Leftrightarrow \mathbb{K} \models A$. Другими словами, если **L** есть *логика класса шкал* $\mathbb{K}$.

Эквивалентная формулировка: если всякая **L**-непротиворечивая формула выполнима в классе шкал $\mathbb{K}$ (последнее означает, что формула истинна в некоторой точке некоторой модели над шкалой из $\mathbb{K}$).

**Определение 1.13.** Логика **L** называется *элементарной*, если она полна относительно некоторого[2] элементарного класса шкал.

**Теорема 1.14** (Kit Fine, 1973)**.** **L** *элементарна* $\implies$ **L** *каноническая.*

Обратную импликацию 30 лет не могли ни доказать, ни опровергнуть. Наконец, ее опровергли.

**Теорема 1.15** (Robert Goldblatt, Ian Hodkinson, Yde Venema,[3] 2004)**.** *Существует каноническая логика, не являющаяся элементарной. Более того, их континуум (?).*

[2]Читая литературу, нужно быть внимательным к этому понятию, ибо некоторые называют логику **L** элементарной, если она полна и класс *всех* **L**-шкал является элементарным. Наше определение шире (охватывает больше логик) и, следовательно, приводимая ниже теорема Файна в такой формулировке оказывается сильнее.

[3]R. Goldblatt, I. Hodkinson, Y. Venema. "Erdös graphs resolve Fine's canonicity problem", Bulletin of Symbolic Logic, vol. 10, 2004, pp. 186–208.

Общая картина (первая и последняя импликации строгие; про вторую не помню):

$$\boxed{\mathbf{L}\text{ элементарна } \Longrightarrow \mathbf{L}\text{ канонична } \Longrightarrow \mathbf{L}\text{ сильно полна } \Longrightarrow \mathbf{L}\text{ полна}}$$

## Задачи

1) Докажите каноничность расширения логики **K** формулами $\Diamond^i\Box^j p \to \Box^m\Diamond^n p$, где $j, i, m, n \geqslant 0$.

2) Докажите, что не является каноничной и даже не является сильно полной логика Гжегорчика $\mathbf{Grz} = \mathbf{K} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$. Указание: ее аксиома задает класс «рефлексивных аналогов **GL**-шкал», то есть рефлексивных транзитивных антисимметричных шкал, не имеющих бесконечно возрастающих последовательностей $x_1 \, R \, x_2 \, R \, x_3 \, R \dots$ из попарно различных точек. (Иначе говоря, рефлексивных транзитивных шкал, не имеющих бесконечно возрастающих последовательностей, в которых соседние точки различны: $x_i \neq x_{i+1}$.)

3*) Мы давали определение полной и сильно полной логики, используя понятие **L**-выполнимости (см. определения 1.2 и 1.3). Но полноту мы также определяли, используя понятие выводимости в логике (см. определение 1.1). Оказывается, можно дать аналогичное определение и для сильной полноты.

**Определение 1.16.** Логика **L** называется *сильно полной*, если для любого множества формул $\Gamma$ и любой формулы $A$ имеет место эквивалентность: $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A \iff \Gamma \models_{\mathbf{L}} A$.

Здесь:

$\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} A$ означает, что существует вывод формулы $A$, использующий в качестве аксиом любые *теоремы* логики **L** и формулы из $\Gamma$, а в качестве правил вывода — modus ponens и правило $\varphi \vdash \Box\varphi$.

$\Gamma \models_{\mathbf{L}} A$ означает, что для любой модели $M = (F, \theta)$, такой что $F \models \mathbf{L}$, если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Докажите, что оно эквивалентно определению 1.1. Указание: рассмотрите множество $\Gamma \cup \{\neg A\}$.

# 2 Стандартный перевод

Напомним, что мы изучаем модальный язык **ML**, имеющий счетное множество пропозициональных переменных $\{p_0, p_1, \ldots\}$, булевы связки (например, $\bot$ и $\to$) и модальный оператор $\Box$ (и, при желании, его двойник $\Diamond$). В качестве семантики этого языка мы рассматривали модели Крипке, то есть структуры вида $M = (W, R, V)$, где $R \subseteq W \times W$ и $V(p_i) \subseteq W$ для всех $i \geqslant 1$.

Рассмотрим теперь язык первого порядка **FO**, соответствующий данному модальному языку. Его сигнатура не имеет функциональных символов и символов констант и имеет двуместные предикатные символы $\{\mathsf{R}, =\}$ и счетное число одноместных предикатных символов $\{P_0, P_1, \ldots\}$. Как обычно, язык первого порядка имеет также счетное число *индивидных переменных* $\{x_0, x_1, \ldots\}$, булевы связки (пусть те же, что и в модальном языке) и кванторы $\forall$ и $\exists$ (досточно одного из них). *Формулы* языка **FO** строятся из *атомарных*, которые в нашем случае имеют вид $\mathsf{R}(x_i, x_j)$, $x_i = x_j$, $P_i(x_j)$, с помощью булевых связок и навешивания кванторов $\forall$ и $\exists$ по переменным $x_i$. Всюду далее под «формулой первого порядка» будем понимать формулу именно в этой сигнатуре.

Как всегда, всякий язык первого порядка интерпретируется в *реляционных структурах* (или структурах первого порядка), состоящих из непустого множества (носителя) и предикатов, имеющих валентность, соответствующую валентностям предикатных символов из рассматриваемой сигнатуры. При этом, если задана структура $M$ и оценка индивидных переменных (то есть сопоставление $\pi$ каждой переменной $x_i$ некоторого элемента $a_i$ из $W$), а также **FO**-формула $A(x_1, \ldots, x_n)$, то в курсе математической логики стандартным образом определяется отношение $M, \pi \models A(x_1, \ldots, x_n)$. Иногда для удобства пишут (и мы будем писать) чуть короче (хотя менее строго): $M \models A(a_1, \ldots, a_n)$.

Теперь заметим, что каждую модель Крипке можно рассматривать и как структуру для нашего языка первого порядка **FO**: двуместный символ $\mathsf{R}$ интерпретируется отношением $R \subseteq W \times W$, а одноместные символы $P_i$ интерпретируются подмножествами $V(p_i) \subseteq W$. Поэтому мы будем считать, что читатель понимает смысл записи $M \models A(a_1, \ldots, a_n)$, где $M$ — модель Крипке, а $A(x_1, \ldots, x_n)$ — формула в рассмотренной выше сигнатуре.

**Определение 2.1.** *Стандартный перевод* — это перевод модальных формул (языка **ML**) в формулы первого порядка (языка **FO** указанной выше сигнатуры). Перевод модальной формулы $\varphi$ обозначается $\mathrm{ST}_x(\varphi)$ или более кратко $\varphi^*(x)$; он является **FO**-формулой с (не более чем) одной свободной переменной $x$; определяется он индукцией по построению формулы (где индивидная переменная $y$ — свежая, то есть не встречающаяся ранее):

$$\bot^*(x) \;=\; \bot, \quad p_i^*(x) \;=\; P_i(x),$$
$$(\varphi \to \psi)^*(x) \;=\; \varphi^*(x) \to \psi^*(x),$$
$$(\Box\varphi)^*(x) \;=\; \forall y\,(\mathsf{R}(x, y) \to \varphi^*(y)).$$

Видно, что стандартный перевод имитирует обычную семантику Крипке. Формально это выражает следующая лемма (ее доказательство оставим в качестве упражнения).

**Лемма 2.2.** $M, a \models \varphi \iff M \models \varphi^*(a)$, *для любой модальной формулы $\varphi$, модели Крипке $M$ и ее точки $a \in W$.*

Этот простой факт позволяет переносить результаты из логики предикатов.

## 2.1 Перенос результатов из FO в ML

**Определение 2.3.** Модальная формула $\varphi$ называется *выполнимой*, если она истинна в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M\ \exists a\ \ M, a \models \varphi$. Множество модальных формул $\Gamma$ называется *выполнимым*, если оно истинно в некоторой точке некоторой модели Крипке: $\exists M\ \exists a\ \ M, a \models \Gamma$.

Модальная формула $\varphi$ (соотв. множество модальных формул $\Gamma$) называется *глобально выполнимым*, если $\varphi$ (соотв. $\Gamma$) истинно в некоторой модели: $\exists M\ \ M \models \varphi$ (соотв. $M \models \Gamma$).

Заметим, что модальная формула $\varphi$ выполнима тогда и только тогда, когда ее стандартный перевод $\varphi^*(x)$ выполним; модальная формула $\varphi$ глобально выполнима тогда и только тогда, когда замкнутая формула первого порядка $\forall x\, \varphi^*(x)$ выполнима. Это прямое следствие Леммы 2.2.

**Теорема 2.4** (Компактность для модального языка)**.** *Пусть* $\Gamma$ — *некоторое множество модальных формул.*

**(a)** *Если каждое конечное подмножество* $\Delta \subseteq \Gamma$ *выполнимо, то и всё множество* $\Gamma$ *выполнимо.*

**(b)** *Если каждое конечное подмножество* $\Delta \subseteq \Gamma$ *глобально выполнимо, то и всё множество* $\Gamma$ *глобально выполнимо.*

*Доказательство.* **(a)** Рассмотрим множество формул первого порядка $\Gamma^*(x) := \{\varphi^*(x) \mid \varphi \in \Gamma\}$. Легко видеть, что множество $\Gamma$ выполнимо тогда и только тогда, когда множество $\Gamma^*(x)$ выполнимо. Пусть теперь каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо. Тогда каждое конечное подмножество множества $\Gamma^*(x)$ выполнимо. По теореме о компактности для языка первого порядка, всё множество $\Gamma^*(x)$ выполнимо. Значит, множество $\Gamma$ выполнимо.

**(b)** Аналогичное рассуждение, но для множества замкнутых формул $\{\forall x\, \varphi^*(x) \mid \varphi \in \Gamma\}$. □

**Теорема 2.5** (Теорема Лёвенгейма–Сколема о понижении мощности для модального языка)**.** *Если множество модальных формул* $\Gamma$ *выполнимо, то оно выполнимо в некоторой не более чем счетной модели Крипке. Аналогично для глобальной выполнимости.*

*Доказательство.* Аналогично доказательству предыдущей теоремы. □

## 2.2 «Экономный» стандартный перевод

В стандартном переводе не обязательно в качестве $y$ всегда брать *свежую* индивидную переменную, а достаточно попеременно использовать лишь две переменные $x$ и $y$. Для этого можно параллельно давать определения двух стандартных переводов — $\varphi^*(x)$ и $\varphi^*(y)$ — следующим образом:

$$\begin{array}{rcl|rcl}
\bot^*(x) = \bot, \quad p_i^*(x) & = & P_i(x), & \bot^*(y) = \bot, \quad p_i^*(y) & = & P_i(y), \\
(\varphi \to \psi)^*(x) & = & \varphi^*(x) \to \psi^*(x), & (\varphi \to \psi)^*(y) & = & \varphi^*(y) \to \psi^*(y), \\
(\Box\varphi)^*(x) & = & \forall y\, (\mathsf{R}(x,y) \to \varphi^*(y)). & (\Box\varphi)^*(y) & = & \forall x\, (\mathsf{R}(y,x) \to \varphi^*(x)).
\end{array}$$

Другими словами, $\varphi^*(y)$ получается из $\varphi^*(x)$ одновременной заменой всех (свободных и связанных) вхождений переменных $x$ на $y$ и $y$ на $x$.

**Пример 2.6.** $\big(\Diamond(\Box p \to q)\big)^*(x) = \exists y\, (\mathsf{R}(x,y) \land \big[\, \forall x\, (\mathsf{R}(y,x) \to P(x)) \to Q(y)\, \big]).$

Данный «экономный» перевод преобразует модальные формулы (из **ML**) в формулы первого порядка, в которых входят лишь две переменные $x$ и $y$; этот фрагмент логики первого порядка обозначается $\mathbf{FO}^2$. В отличие от всей логики предикатов **FO**, которая неразрешима (в смысле — проблема выполнимости формул неразрешима), фрагмент $\mathbf{FO}^2$ является разрешимым (более точно, является NExpTime-полным), обладает свойством FMP (всякая выполнимая формула выполнима в некоторой конечной структуре), более того, свойством ExpMP (всякая выполнимая формула $A$ выполнима в некоторой модели размера не более $2^{p(|A|)}$, где $|A|$ — длина формулы $A$, а $p(n)$ — некоторый многочлен).

Наличие перевода **ML** в $\mathbf{FO}^2$ позволяет автоматически получить эти же свойства и для модального языка. Но не все полученные свойства являются «наилучшими возможными» для модального языка. Например, проблема выполнимости для **ML** несколько «проще», чем для $\mathbf{FO}^2$, а именно, является PSpace-полной. Тем не менее, метод стандартного перевода (для других модальных языков) полезен для выяснения выразительной силы и (грубых оценок) вычислительной сложности этих языков, опираясь на известные результаты о языках первого порядка (и их фрагментах).

## 3 Модально определимые классы моделей (с точкой)

**Определение 3.1.** Класс моделей Крипке $\mathbb{K}$ назовём *модально определимым* (или, более точно, *определимым некоторой модальной формулой*[4]), если существует модальная формула $\varphi$, такая что $\mathbb{K}$ есть в точности класс моделей, в которых верна данная формула: $\mathbb{K} = \{M \mid M \models \varphi\}$.

Класс моделей Крипке $\mathbb{K}$ назовём *элементарным* (или, более точно, *определимым некоторой формулой первого порядка*), если существует замкнутая формула первого порядка $A$, такая что $\mathbb{K}$ есть в точности класс моделей Крипке, в которых верна данная формула: $\mathbb{K} = \{M \mid M \models A\}$.

Вспомним, что семантика модальных формул задается *локально*, т.е. как истинность модальной формулы *в точке* модели Крипке. Поэтому имеют смысл и локальные аналоги введенных выше понятий. Структуру вида $(M, a)$, где $M = (W, R, V)$ — модель Крипке и $a \in W$, будем называть *отмеченной моделью Крипке* или короче *•-моделью.* Осмысленно говорить об истинности в •-модели модальной формулы либо формулы первого порядка с одной свободной переменной.

**Определение 3.2.** Класс •-моделей $\mathbb{K}$ назовём *модально определимым,*[5] если существует модальная формула $\varphi$, такая что $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid M, a \models \varphi\}$. Класс •-моделей $\mathbb{K}$ назовём *элементарным*, если существует формула первого порядка $A(x)$, такая что $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid M \models A(a)\}$.

Очевидно, если класс (моделей или •-моделей) модально определим, то он элементарен. Обратная импликация не верна, как показывают последние два примера ниже.

**Пример 3.3.** Класс конечных моделей (•-моделей) неэлементарен, а значит, и не модально определим.

Класс $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid R(a) = \varnothing\}$ определим модальной формулой $\Box\bot$.

Класс $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid R(a) \neq \varnothing\}$ определим модальной формулой $\Diamond\top$.

Класс $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid \exists y\, (aRy \;\&\; P(y))\}$ определим модальной формулой $\Diamond p$.

Класс $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid \forall y\, (aRy \Rightarrow P(y))\}$ определим модальной формулой $\Box p$.

Класс $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid \forall y\, P(y)\} = \{(M, a) \mid M \models p\}$ не модально определим: никакая модальная формула не может «говорить» что-либо о точках, недостижимых из данной точки $a$. Формально, если бы модальная формула $\varphi$ задавала класс $\mathbb{K}$, то добавим к какой-нибудь •-модели $(M, a) \in \mathbb{K}$ непересекающуюся с ней модель $N$ (например, одноточечную), такую, что $N \not\models p$. Тогда модальная формула $\varphi$ этого изменения модели «не заметит», то есть $M, a \models \varphi \Leftrightarrow N, a \models \varphi$, хотя $(N, a) \notin \mathbb{K}$.

Класс $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid a\, R\, a\}$ не модально определим. Причина, если говорить коротко, в том, что данный класс не инвариантен[6] относительно p-морфизмов. Подробнее, рассмотрим иррефлексивную модель $N = (\mathbb{N}, <)$ и одноточечную рефлексивную •-модель $(M, a)$. Оценка переменных для нас несущественна; пусть для определенности, все переменные в $M$ и $N$ истинны. Существует очевидный p-морфизм из $N$ в $M$. Тогда в •-моделях $(N, 0)$ и $(M, a)$ должны быть верны одни и те же модальные формулы (см. Лемму о p-морфизмах). Однако модальная формула $\varphi$, которая (гипотетически) могла бы задать класс $\mathbb{K}$, должна была бы отличать эти две •-модели, ибо $(N, 0) \notin \mathbb{K}$ и $(M, a) \in \mathbb{K}$. Полученное противоречие показывает, что такой модальной формулы не существует.

Последние два примера можно переформулировать в терминах невыразимости модальностей:

- *Универсальная модальность не выразима в модальном языке.* Универсальная модальность — это модальность $[\forall]$, задаваемая семантикой: $M, a \models [\forall]\psi \Leftrightarrow \forall b \in W\;\; M, b \models \psi$. Тогда утверждение о невыразимости означает, что не существует такой модальной формулы $\varphi(p)$, что формула $\varphi(p) \leftrightarrow [\forall]p$ общезначима. Действительно, если бы такая формула существовала, то она задавала бы класс •-моделей, который задает формула $[\forall]p$, то есть класс $\mathbb{K} = \{(M, a) \mid M \models p\}$. Однако мы показали, что этот класс не модально определим.

[4] Интересно также понятие определимости множеством (быть может, бесконечным) модальных формул. Но в свете результатов, которые мы хотим излагать далее, остановимся на определимости одной формулой. Аналогичное замечание будем иметь в виду и для элементарных классов.

[5] В «узком смысле», ибо в будущем (см. раздел 11) нам будет естественней говорить о классах, задаваемых произвольным (в том числе бесконечным) множеством модальных формул или формул первого порядка.

[6] Обратите внимание на отличие понятия «инвариантен» от понятия «замкнут». Класс •-моделей $\mathbb{K}$ *замкнут* относительно p-морфизмов, когда из наличия p-морфизма $(M, a) \twoheadrightarrow (N, b)$ следует импликация: $(M, a) \in \mathbb{K} \Longrightarrow (N, b) \in \mathbb{K}$. Класс •-моделей $\mathbb{K}$ *инвариантен* относительно p-морфизмов, когда из наличия p-морфизма $(M, a) \twoheadrightarrow (N, b)$ следует эквивалентность $(M, a) \in \mathbb{K} \Longleftrightarrow (N, b) \in \mathbb{K}$. Аналогичные пары понятий можно формулировать для других отношений.

- *Модальность «рефлексивности» не выразима в модальном языке.* Модальность рефлексивности — это нуль-арная модальность (или модальная константа) $\varrho$, задаваемая семантикой: $M, a \models \varrho \Leftrightarrow a\,R\,a$. Значит, мы утверждаем, что не существует модальной формулы $\varphi$, эквивалентной $\varrho$.

**Задача 3.4.** Докажите, что в модальном языке не выразимы модальности:
a) дополнение отношения: $M, a \models \overline{B}\psi \Leftrightarrow \forall b \in W\ (\neg a\,R\,b \Rightarrow M, b \models \psi)$;
b) window-оператор: $M, a \models \boxplus\psi \Leftrightarrow \forall b \in W\ (M, b \models \psi \Rightarrow a\,R\,b)$.
c) обратное отношение: $M, a \models \boxminus\psi \Leftrightarrow \forall b \in W\ (b\,R\,a \Rightarrow M, b \models \psi)$.

Эти рассмотрения приводят к следующим естественным вопросам.

**Вопрос 1.** *Как охарактеризовать те формулы первого порядка $A(x)$, которые задают модально определимый класс $\bullet$-моделей?* Аналогичный вопрос имеет смысл и для замкнутых формул.

Введем понятие: формула первого порядка $A(x)$ *эквивалентна* модальной формуле $\varphi$, если для любой $\bullet$-модели $(M, a)$ имеем: $M, a \models \varphi \Leftrightarrow M \models A(a)$. Иначе говоря, если $A(x)$ эквивалентна стандартному переводу $\varphi^*(x)$. Тогда Вопрос 1 можно переформулировать так: *Как охарактеризовать формулы первого порядка с одной свободной переменной, эквивалентные каким-либо модальным формулам?*

Ответом на Вопрос 1 является знаменитая **теорема ван Бентема** (см. Теорему 5.3 ниже): *Формула первого порядка $A(x)$ с одной свободной переменной эквивалентна некоторой модальной тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно* ***бисимуляций.***

**Вопрос 2.** *Какие классы моделей (и $\bullet$-моделей) являются модально определимыми?*

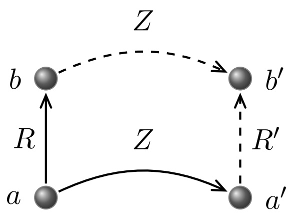
Здесь сразу не ясно, в каких терминах мы должны пытаться охарактеризовать такие классы. Но это становится понятно, если вспомнить соответствующие результаты о характеризации классов реляционных структур формулами (или множествами формул) первого порядка — такого рода результаты изучаются в (углубленном) курсе логики предикатов. Мы рассмотрим соответствующие результаты для модального языка в последующих лекциях.

## 4 Бисимуляции

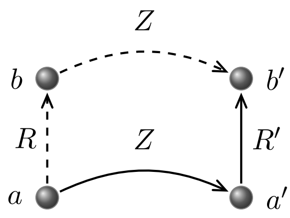
Бисимуляции подробно обсуждаются в прошлогодних лекциях. Здесь мы лишь напомним определения, обозначения и базовые факты.

**Определение 4.1** **(Бисимуляция).** Непустое двуместное отношение $\varnothing \neq Z \subseteq (W \times W')$ называется *бисимуляцией* между моделями $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$, если выполнены следующие условия (для всех фигурирующих в них точек из соответствующих по смыслу носителей $W$ или $W'$):

**(var)** $a\,Z\,a' \implies$ для каждой переменной $p$ имеем: $M, a \models p \;\Leftrightarrow\; M', a' \models p$;
**(zig)** $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b \implies$ существует $b' \in W'$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a'\,R'\,b'$ (см. рис. слева);
**(zag)** $a\,Z\,a'$ и $a'\,R'\,b' \implies$ существует $b \in W$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a\,R\,b$ (см. рис. справа).



Условие **(zig)**



Условие **(zag)**

Если бисимуляция $Z$ соединяет точку $a \in W$ с точкой $a' \in W'$, то мы будем записывать это как $Z\colon (M, a) \simeq (M', a')$. Будем говорить, что $\bullet$-модели $(M, a)$ и $(M', a')$ *бисимулируют* (are bisimilar), если их можно соединить некоторой бисимуляцией; мы будем записывать это как $(M, a) \simeq (M', a')$.

Важнейший факт: бисимулирующие $\bullet$-модели не может отличить никакая модальная формула.

**Теорема 4.2.** *Если $(M, a) \simeq (M', a')$, то для любой модальной формулы $\varphi$ имеем:*

$$M, a \models \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad M', a' \models \varphi.$$

Назовем $\bullet$-модели $(M, a)$ и $(M', a')$ *модально эквивалентными*, обозначение: $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (M', a')$, если в них истинны одни и те же модальные формулы: $M, a \models \varphi \Leftrightarrow M', a' \models \varphi$, для любой модальной формулы $\varphi$. Теперь доказанную выше теорему можно сформулировать так: *если две $\bullet$-модели бисимулируют, то они модально эквивалентны:*

$$(M, a) \simeq (M', a') \quad\Longrightarrow\quad (M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (M', a').$$

Обратная импликация не всегда верна (пример см. в прошлогодних лекциях). Но есть ряд важных случаев, когда обратная импликация верна. Итак, зададимся вопросом:

*для каких моделей*[7] *отношения $\simeq$ и $\equiv_{\mathbf{ML}}$ совпадают?*

1. Для конечных моделей.

2. Для моделей с *конечным ветвлением*, т.е. в которых $R(a)$ конечно для каждой точки $a \in W$.

3. Для модально насыщенных моделей (см. определение 4.3 ниже).

Очевидно, конечная модель является моделью с конечным ветвлением. Далее мы покажем, что модель с конечным ветвлением является модально насыщенной (лемма 4.4), и что для модально насыщенных моделей (в том числе, для моделей с конечным ветвлением и тем более для конечных моделей) отношения $\simeq$ и $\equiv_{\mathbf{ML}}$ совпадают (теорема 4.5).

[7]Точнее, для любых соответствующих им $\bullet$-моделей.

## 4.1 Модально насыщенные модели

**Определение 4.3.** Модель $M = (W, R, V)$ называется *модально насыщенной*, если для любого множества модальных формул $\Gamma$ и любой точки $a \in W$ верно следующее:

$$\text{если каждое конечное подмножество } \Delta \subseteq \Gamma \text{ выполнимо в } R(a),$$
$$\text{то и всё множество формул } \Gamma \text{ выполнимо в } R(a).$$

Здесь: множество формул $\Gamma$ *выполнимо в подмножестве* $X \subseteq W$, если $M, a \models \Gamma$ для некоторой $a \in X$.

**Лемма 4.4.** *Всякая модель с конечным ветвлением является модально насыщенной.*

*Доказательство.* Пусть $M = (W, R, V)$ — модель с конечным ветвлением, $a \in W$, множество $R(a)$ конечно. Пусть $\Gamma = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots\}$ — некоторое множество модальных формул, и каждое его конечное подмножество, в частности, каждое множество $\Delta_i = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_i\}$, $i \geqslant 1$, выполнимо в $R(a)$, то есть $\forall i \geqslant 1$ $\exists c_i \in R(a)$: $M, c_i \models \Delta_i$. Так как все $c_i$ пробегают конечное множество $R(a)$, то среди них бесконечное число раз повторяется некоторый элемент $b \in R(a)$. То есть $M, b \models \Delta_i$ для бесконечного количества значений $i \geqslant 1$. Это и означает, что $M, b \models \Gamma$, то есть $\Gamma$ выполнимо в $R(a)$. □

**Теорема 4.5.** *Для любых модально насыщенных* $\bullet$*-моделей* $(M, a)$ *и* $(M', a')$ *верна равносильность:*

$$(M, a) \simeq (M', a') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (M', a').$$

*Доказательство.* Импликация $\Rightarrow$ верна всегда; докажем обратную импликацию. Предположим, что $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (M', a')$. Покажем, что бисимуляцией между $(M, a)$ и $(M', a')$ является само отношение $\equiv_{\mathbf{ML}}$. Оно непусто, ибо содержит пару $\langle a, a' \rangle$. Условие **(var)** из определения бисимуляции выполняется для $\equiv_{\mathbf{ML}}$ тривиальным образом. Проверим условие **(zig)**; условие **(zag)** проверяется аналогично.

Пусть $(M, x) \equiv_{\mathbf{ML}} (M', x')$ и $x \, R \, y$, $y \in M$. Рассмотрим модальную теорию точки $y$: $\Gamma := \{\varphi \in \mathbf{ML} \mid M, y \models \varphi\}$. Для каждого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Gamma$ мы имеем: $M, y \models \bigwedge \Delta$, значит, $M, x \models \Diamond \bigwedge \Delta$. Ввиду $x \equiv_{\mathbf{ML}} x'$ получаем $M', x' \models \Diamond \bigwedge \Delta$. Тем самым $\Delta$ выполнимо в $R'(x')$. Поскольку модель $M'$ модально насыщенная, то всё множество $\Gamma$ выполнимо в $R'(x')$. Это означает, что существует $y'$, такой что $x' \, R' \, y'$ и $M', y' \models \Gamma$. Так как $\Gamma$ — *модальная теория* точки $y$, то $y \equiv_{\mathbf{ML}} y'$. □

**Замечание 4.6.** Класс моделей $\mathbb{K}$ называется *классом Хеннесси–Миллера* (ХМ), если для любых моделей $M, M' \in \mathbb{K}$ и любых точек $a \in M$ и $a' \in M'$ имеет место равносильность:

$$(M, a) \simeq (M', a') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (M', a').$$

Три примера классов ХМ мы теперь знаем:

$$\text{конечные модели} \subset \text{модели с конечным ветвлением} \subset \text{модально насыщенные модели.}$$

Каждый класс ХМ содержится в некотором максимальном классе ХМ, то есть таком, который не содержится в большем классе ХМ (по лемме Цорна).

**Задача 4.7.** **(a)** Верно ли, что каноническая модель является модально насыщенной?

**(b)** Верно ли, что ультра-расширение модели является модально насыщенным?

## 5 Теорема ван Бентема: ML = FOL / bisimulation

Ранее мы выяснили, что модальный язык **ML** можно рассматривать (посредством стандартного перевода) как фрагмент языка первого порядка **FO**. Напомним, сигнатура последнего состоит из двуместных предикатных символов $\{\mathsf{R}, =\}$ и счетного числа одноместных предикатных символов $\{P_0, P_1, \ldots\}$. Всюду далее термин «формула первого порядка» означает формулу именно этой сигнатуры. Наша задача — «структурно» (семантически) охарактеризовать язык **ML** как фрагмент языка **FO**.

**Определение 5.1.** Формула первого порядка $A(x)$ *инвариантна относительно бисимуляций*, если для любых $\bullet$-моделей $(M, a)$ и $(N, b)$ из $(M, a) \simeq (N, b)$ следует: $M \models A(a) \Leftrightarrow N \models A(b)$.

**Определение 5.2.** Формула первого порядка $A(x)$ *эквивалентна*[8] модальной формуле $\varphi$, если для любой $\bullet$-модели $(M, a)$ имеем: $M \models A(a) \Leftrightarrow M, a \models \varphi$; то есть формула $A(x) \leftrightarrow \varphi^*(x)$ общезначима.

Будем писать $(M, a) \approx (N, b)$ и называть эти две $\bullet$-модели *элементарно эквивалентными*, если в них истинны одни и те же формулы $A(x)$ первого порядка от одной переменной: $M \models A(a) \Leftrightarrow N \models A(b)$.

**Теорема 5.3** (van Benthem, 1976)**.** *Формула первого порядка $A(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле $\Longleftrightarrow$ формула $A(x)$ инвариантна относительно бисимуляций.*

*Доказательство.* ($\Longrightarrow$) Эта импликация фактически утверждает, что модальные формулы (и, конечно, эквивалентные им формулы первого порядка) инвариантны относительно бисимуляций; этот факт был доказан в Теореме 4.2.

($\Longleftarrow$) Пусть формула $A(x)$ инвариантна отн. бисимуляций. Рассмотрим все ее «модальные следствия»:

$$\Phi \ := \ \mathsf{ModalCons}(A) \ := \ \{\, \varphi \in \mathbf{ML} \mid A(x) \models \varphi \,\}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\Phi \models A(x)$. Действительно, тогда в силу компактности $\Phi' \models A(x)$ для некоторого конечного множества модальных формул $\Phi' \subseteq \Phi$. Но $A(x) \models \varphi$ для всех $\varphi \in \Phi'$ (по построению $\Phi$). Значит, $A(x)$ эквивалентна модальной формуле $\bigwedge \Phi'$.

Итак, докажем $\Phi \models A(x)$. Для этого возьмем произвольную $\bullet$-модель $(M, a)$, такую что $M, a \models \Phi$, и докажем, что $M \models A(a)$. Рассмотрим «модальную теорию» этой $\bullet$-модели:

$$\Gamma \ := \ \mathsf{ModalTheory}(M, a) \ = \ \{\, \varphi \in \mathbf{ML} \mid M, a \models \varphi \,\}.$$

Докажем, что множество $\Gamma \cup \{A(x)\}$ выполнимо. Воспользуемся компактностью. Возьмем произвольное конечное подмножество $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Если бы множество $\Gamma' \cup \{A(x)\}$ было невыполнимо, то это означало бы, что $A(x) \models \neg \bigwedge \Gamma'$. Значит $\neg \bigwedge \Gamma' \in \mathsf{ModalCons}(A) = \Phi$. Получилось противоречие: с одной стороны, $M, a \models \Phi$ и значит $M, a \models \neg \bigwedge \Gamma'$, а с другой, $M, a \models \Gamma$ и значит $M, a \models \Gamma'$.

Итак, множество $\Gamma \cup \{A(x)\}$ истинно в некоторой $\bullet$-модели $(N, b)$. Тогда[9] $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (N, b)$.[10]

По **Лемме о манёвре** (см. Лемму 5.4 ниже), существуют такие $\bullet$-модели $(M', a')$ и $(N', b')$, что

$$\begin{array}{ccc} (M, a) & \equiv_{\mathbf{ML}} & (N, b) \\ \approx & & \approx \\ (M', a') & \simeq & (N', b') \end{array}$$

Окончание доказательства теоремы просто: истинность формулы $A(x)$ переносится из $(N, b)$ через $\approx$ в $(N', b')$, далее через $\simeq$ в $(M', a')$ ввиду инвариантности формулы $A(x)$ относительно бисимуляций, и наконец, через $\approx$ в $(M, a)$. Таким образом, $M \models A(a)$. $\square$

[8] Помимо эквивалентности можно определить и импликацию: $A(x) \models \varphi$, если для любой $\bullet$-модели $(M, a)$ имеем: $M \models A(a) \Longrightarrow M, a \models \varphi$. Обратная импликация $\varphi \models A(x)$ определяется аналогично. Аналогично определяется и следование $\Gamma \models A(x)$, где $\Gamma$ — множество модальных формул, и $\Sigma(x) \models \varphi$, где $\Sigma(x)$ — множество формул первого порядка. Можно говорить о выполнимости множества формул вида $\Gamma \cup \{A(x)\}$, подразумевая выполнимость множества $\Gamma^*(x) \cup \{A(x)\}$.

[9] Простое упражнение: если $\Gamma = \mathsf{ModalTheory}(M, a)$ и $N, b \models \Gamma$, то $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (N, b)$.

[10] Если бы отсюда мы могли получить, что $(M, a)$ и $(N, b)$ бисимулируют, то этим бы завершилось доказательство теоремы, ибо тогда из $N \models A(b)$ мы бы сразу заключили, пользуясь инвариантностью формулы $A(x)$ относительно бисимуляций, требуемое: $M \models A(a)$. Однако, как мы знаем, модальная эквивалентность не всегда влечет наличие бисимуляции.

## 5.1 Лемма о манёвре

**Лемма 5.4** (О манёвре (Detour Lemma))**.** *Если две $\bullet$-модели модально эквивалентны, то они элементарно эквивалентны некоторым бисимулирующим $\bullet$-моделям. То есть если $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (N, b)$, то существуют такие модели $(M', a')$ и $(N', b')$, что имеет место диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} (M, a) & \equiv_{\mathbf{ML}} & (N, b) \\ \approx & & \approx \\ (M', a') & \simeq & (N', b') \end{array}$$

Эта лемма следует из двух фактов:

(1) Всякая $\bullet$-модель элементарно эквивалентна ($\approx$) некоторой модально насыщенной $\bullet$-модели.

(2) Если модально насыщенные $\bullet$-модели модально эквивалентны ($\equiv_{\mathbf{ML}}$), то они бисимулируют ($\simeq$).

**Доказательство леммы о манёвре.** Пусть $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (N, b)$. По (1), имеем $(M, a) \approx (M', a')$ и $(N, b) \approx (N', b')$ для некоторых модально насыщенных $(M', a')$ и $(N', b')$. Поскольку $\approx$ влечет $\equiv_{\mathbf{ML}}$, то $(M', a') \equiv_{\mathbf{ML}} (N', b')$. Но тогда $(M', a') \simeq (N', b')$, согласно (2), ибо они модально насыщенны. $\square$

Утверждение (2) несложное — это теорема 4.5. Утверждение (1) же опирается на сложную технику из теории моделей (логики первого порядка) и вовлекает такие понятия, как $\omega$-насыщенная модель первого порядка, ультрастепень модели первого порядка, $\omega$-неполный ультрафильтр. Идею его доказательства изложим в следующем разделе.

## 5.2 О существовании модально насыщенных моделей

Здесь мы наметим путь доказательства утверждения:

(1) *Всякая $\bullet$-модель элементарно эквивалентна некоторой модально насыщенной $\bullet$-модели.*

Легко видеть, что оно вытекает из следующих трех фактов:

(3) *Всякая модель $M$ элементарно эквивалентна любой своей ультрастепени $M^U$.*

Более того, $M^U$ является *элементарным расширением* $M$. Как следствие, $(M, a) \approx (M^U, a^U)$.

(4) *У любой модели $M$ существует $\omega$-насыщенная ультрастепень $M^U$.*

В свою очередь, это утверждение для *счетной* сигнатуры вытекает из двух фактов (для несчетной сложнее):

(4a) Существуют $\omega$-неполные ультрафильтры.

(4b) Если ультрафильтр $U$ — $\omega$-неполный, то $M^U$ — $\omega$-насыщенная модель, для любой модели $M$.

(5) *Всякая $\omega$-насыщенная модель Крипке является модально насыщенной.*

На самом деле, $\omega$-насыщенность — чересчур сильное условие; достаточно 2-насыщенности.

Дальнейшие детали можно прочесть в книге: Кейслер, Чэн «Теория моделей» (1977).

## 5.3 Неразрешимость инвариантности относительно бисимуляций

**Теорема 5.5.** *Множество формул первого порядка с одной свободной переменной, инвариантных относительно бисимуляций, неразрешимо.*

(Пока без доказательства.)

**Задача 5.6.** Является ли перечислимым / коперечислимым множество формул первого порядка с одной свободной переменной, инвариантных относительно бисимуляций над конечными моделями?

# 6 Вариации теоремы ван Бентема

Получено множество аналогов теоремы ван Бентема, причем в различных «направлениях», которые можно комбинировать независимо. Последующие секции указывают основные из этих направлений.

## 6.1 Расширение модального языка

При расширении модального языка необходимо усилить понятие бисимуляции, так чтобы оно гарантировало, что точки, связанные отношением бисимуляции, были не отличимы модальными формулами не только старого языка, но и расширенного языка.

Простое наблюдение: аналог теоремы ван Бентема справедлив для полимодального языка, то есть языка с операторами $\Box_1, \Box_2, \ldots$ (конечное или счетное множество операторов). Соответственно, язык первого порядка, в который осуществляется стандартный перевод, будет иметь в сигнатуре предикатные символы $\{\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2, \ldots\}$. В определении бисимуляции нужно сформулировать аналоги условий **(zig)** и **(zag)** для каждого отношения $R_i$ в модели. Доказательство полимодального аналога теоремы ван Бентема дословно повторяет исходное доказательство.

### 6.1.1 Язык темпоральной логики

Добавляем в модальный язык обратную модальность $\boxminus$, семантика которой:

$$M, a \models \boxminus\varphi \quad \leftrightharpoons \quad \forall b \in W \ (b\, R\, a \Rightarrow M, b \models \varphi).$$

*Темпоральная бисимуляция* определяется как обычная, но с дополнительными двумя условиями, говорящими про шаги назад, а не вперед:

**(zig–)** $b\, Z\, b'$ и $a\, R\, b \implies$ существует $a' \in W'$, такая что $a\, Z\, a'$ и $a'\, R'\, b'$;
**(zag–)** $b\, Z\, b'$ и $a'\, R'\, b' \implies$ существует $a \in W$, такая что $a\, Z\, a'$ и $a\, R\, b$.

**Теорема 6.1** (Для темпорального языка). *Формула первого порядка $A(x)$ эквивалентна некоторой темпоральной формуле $\Leftrightarrow$ она инвариантна относительно темпоральных бисимуляций.*

### 6.1.2 Язык с универсальной модальностью

Добавляем в модальный язык *универсальную* (или *глобальную*) *модальность* $[\forall]$ с семантикой:

$$M, a \models [\forall]\varphi \quad \leftrightharpoons \quad M \models \varphi).$$

Мы говорим, что модели $M$ и $M'$ *тотально бисимулируют*, обозначение: $M \simeq M'$, если существует *тотальная бисимуляция* $Z$ между $M$ и $M'$, то есть такая, что $\mathrm{Dom}(Z) = W$ и $\mathrm{Ran}(Z) = W'$.

**Теорема 6.2** (Для языка с универсальной модальностью). *Формула первого порядка $A(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле языка с универсальной модальностью $\Leftrightarrow$ она инвариантна относительно тотальных бисимуляций.*

### 6.1.3 Язык градуированной модальной логики

*Градуированные* (или *считающие*) модальности позволяют учитывать *количество* последователей данной точки, в которых верна данная формула.

Синтаксис градуированных модальных формул: $\varphi \ ::= \ \bot \mid p \mid \varphi \to \psi \mid \Diamond^{\geqslant n}\varphi$, для всех $n \geqslant 1$.

Старую модальность можно считать обозначением: $\Diamond\varphi := \Diamond^{\geqslant 1}\varphi$; это согласуется с семантикой.

Запись $\exists^{\neq} y_1, \ldots, y_n \Phi$ означает: «существуют попарно различные точки $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющие $\Phi$»; запись $\forall^{\neq} y_1, \ldots, y_n \Phi$ означает: «для любых попарно различных точек $y_1, \ldots, y_n$ верно $\Phi$».

Семантика градуированных модальностей: формула $\Diamond^{\geqslant n}\varphi$ истинна в точке $x$, если $x$ имеет не менее $n$ последователей, в которых верна формула $\varphi$; то есть

$$x \models \Diamond^{\geqslant n}\varphi \quad \leftrightharpoons \quad \exists^{\neq} y_1, \ldots, y_n \colon \forall i \leqslant n \ y_i \models \varphi.$$

Естественно, что язык первого порядка, в который переводятся (очевидным образом) градуированные модальные формулы, должен содержать символ равенства.

**Определение 6.3.** *Градуированная бисимуляция* определяется как обычная бисимуляция с дополнительными условиями для всех $n \geqslant 1$; при $n = 1$ получаются старые условия **(zig)** и **(zag)**:

$(\mathbf{zig})_n$ $a\,Z\,a' \implies \forall^{\neq} b_1, \ldots, b_n \in R(a)\ \exists^{\neq} b'_1, \ldots, b'_n \in R'(a')\ \forall i \leqslant n\ \ b_i\,Z\,b'_i$;

словами: если точки $a$ и $a'$ бисимулируют, то всякие $n$ попарно различных последователей точки $a$ бисимулируют с некоторыми $n$ попарно различными последователями точки $a'$;

$(\mathbf{zig})_n$ аналогично.

**Теорема 6.4** (Для градуированного модального языка; de Rijke,[11] 2000)**.** *Формула первого порядка в языке с равенством $A(x)$ эквивалентна некоторой градуированной модальной формуле $\Leftrightarrow$ она инвариантна относительно градуированных бисимуляций.*

### 6.1.4 Язык гибридной логики

Рассмотрим гибридный язык: в синтаксис добавляется счетное число *номиналов* $I = \{i_0, i_1, \ldots\}$, они могут встречаться в формулах в тех же позициях, что и обычные пропозициональные переменные. Кроме того, в язык добавляется оператор $@_i$, для каждого номинала $i$. В модели оценка номинала — это всегда одноэлементное подмножество: $V(i) \subseteq W$, $|V(i)| = 1$.

Семантика @-операторов: $M, a \models @_i\varphi$, если $M, b \models \varphi$, где $V(i) = \{b\}$. Стандартный перевод осуществляется в язык с равенством и символами констант $\{c_i\}_{i \in I}$ и задается как $i^*(x) := (x = c_i)$ и $(@_i\varphi)^*(x) = \varphi^*(c_i)$; обратите внимание, что последняя есть замкнутая формула (вместо $x$ в $\varphi^*(x)$ подставили константу $c_i$).

Наконец, в определении *гибридной бисимуляции* добавляются условия
**(nom)** если $a\,Z\,a'$, то в точках $a$ и $a'$ истинны одни и те же номиналы;
**(exist)** если $V(i) = \{a\}$ и $V'(i) = \{a'\}$, то непременно $a\,Z\,a'$.

**Теорема 6.5** (Для гибридного языка)**.** *Формула первого порядка $A(x)$ эквивалентна некоторой гибридной формуле $\Leftrightarrow$ она инвариантна относительно гибридных бисимуляций.*

Существуют аналоги этого результата для более выразительных гибридных языков (с оператором связывания $\downarrow$).

[11]**Историческая справка:** На самом деле, de Rijke ввел другое, более громоздкое определение градуированной бисимуляции и для него доказал теорему. В сформулированном выше виде градуированная бисимуляция появилась в диссертации van der Hoek (1992), но он не занимался доказательством теоремы о характеризации, а лишь установил инвариантность градуированных модальных формул относительно данных бисимуляций, то есть простую импликацию $\Rightarrow$ из приведенной теоремы. Некоторые, похожие друг на друга, результаты (в частности, для языков, имеющих обратные, градуированные, градуированные обратные модальности) были также получены в работах:
N. Kurtonina, M. de Rijke. *Expressiveness of concept expressions in first-order description logics.* Artificial Intelligence, 107(2):303–333, 1999.
C.Lutz, R.Piro, F.Wolter. *Description Logic TBoxes: Model-Theoretic Characterizations and Rewritability.* IJCAI 2011. pp. 983-988.

## 6.2 Сужение класса моделей

Пусть $\mathbb{K}$ — некоторый класс моделей Крипке.[12] Всюду ниже $A(x)$ — формула первого порядка.

**Определение 6.6.** Формула $A(x)$ *инвариантна относительно бисимуляций в классе* $\mathbb{K}$, если для любых моделей $M, N \in \mathbb{K}$ и точек $a \in M$ и $b \in N$ из $(M, a) \simeq (N, b)$ следует: $M \models A(a) \Leftrightarrow N \models A(b)$.

**Определение 6.7.** Формула $A(x)$ *эквивалентна* модальной формуле $\varphi$ в классе $\mathbb{K}$, если для любой модели $M \in \mathbb{K}$ и любой точки $a \in M$ имеем: $M \models A(a) \Leftrightarrow M, a \models \varphi$; то есть $\mathbb{K} \models A(x) \leftrightarrow \varphi^*(x)$.

Возникает естественный вопрос: для каких классов $\mathbb{K}$ верно следующее утверждение?

*Формула $A(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле в классе $\mathbb{K}$*
$\Longleftrightarrow$ *формула $A(x)$ инвариантна относительно бисимуляций в классе $\mathbb{K}$.*

Разумеется, импликация $\Longrightarrow$ по-прежнему верна, и вопрос лишь в обратной импликации.

- $\mathbb{K}$ — класс всех моделей $\Longrightarrow$ утверждение **верно** (теорема ван Бентема, 1976).

- $\mathbb{K}$ — элементарный класс, то есть класс, задаваемый некоторым, быть может бесконечным множеством $\Gamma$ замкнутых формул первого порядка $\Longrightarrow$ утверждение **верно**.

  **Доказательство** прежнее, лишь нужно обосновать использованную в нем дважды *компактность* логического следования в элементарном классе моделей $\mathbb{K}$, то есть такое свойство:

  $$\text{если } \Phi \models_{\mathbb{K}} B, \text{ то существует конечное } \Phi' \subseteq \Phi, \text{ такое что } \Phi' \models_{\mathbb{K}} B.$$

  Но это просто: $\Phi \models_{\mathbb{K}} B$ равносильно $\Phi \cup \Gamma \models B$. В силу компактности существуют конечные подмножества $\Phi' \subseteq \Phi$ и $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такие что $\Phi' \cup \Gamma' \models B$. Из этого следует $\Phi' \models_{\mathbb{K}} B$.

- $\mathbb{K}$ — класс всех конечных моделей $\Longrightarrow$ утверждение **верно** (теорема ван Бентема – Розена, 1997).

  Доказательство основано на принципиально других идеях. Связано это с очевидной причиной — для класса конечных моделей свойство компактности не имеет места (и вообще теория моделей совершенно другая). Упрощенное (и конструктивное) доказательство привел M. Otto (2004).[13]

- $\mathbb{K}$ — класс всех конечных рефлексивных моделей $\Longrightarrow$ утверждение **верно** (M. Otto, 2004).

- $\mathbb{K}$ — класс всех конечных транзитивных моделей $\Longrightarrow$ утверждение **неверно** (M. Otto, 2009).

  **Контрпример.** Формула $A(x) = \exists y\,(x \,\mathsf{R}\, y \wedge y \,\mathsf{R}\, y)$ инвариантна относительно бисимуляций в классе $\mathbb{K}$ всех конечных транзитивных моделей, однако не эквивалентна в $\mathbb{K}$ никакой модальной формуле. Первое утверждение просто: $A(x)$ эквивалентна в этом классе $\mathbb{K}$ *множеству* модальных формул $\{\Diamond\top, \Diamond\Diamond\top, \ldots\}$, которое конечно же инвариантно относительно бисимуляций. Второе утверждение несколько сложнее (оно вовлекает понятие «бисимуляции до уровня $n$»).

Данный контрпример навевает вопрос: случайно ли $A(x)$ оказалась эквивалентна (в данном классе) пусть не одной модальной формуле, но хотя бы множеству модальных формул? Оказывается, для класса всех моделей это верно всегда, причем не только для формул $A(x)$, но и для множеств формул $\Gamma(x)$ первого порядка (см. теорему 6.15 ниже). Верно ли аналогичное утверждение для конкретного класса $\mathbb{K}$ конечных транзитивных моделей — лектору (Е.З.) неизвестно.

**Замечание 6.8.** Утверждение для элементарных классов влечет аналог теоремы ван Бентема для некоторых расширенных языков, например, для языка с обратной модальностью, с универсальной модальностью. Причина в том, что новая и старая модальности (точнее, соответствующие им отношения в модели) связаны условием первого порядка: $\forall x, y\,(xRy \leftrightarrow ySx)$ и $\forall x\,y\,(xRy)$, соответственно. В лемме о манёвре эти условия «переносятся» с исходных моделей $(M, a)$ и $(N, b)$ на новые модели $(M', a')$ и $(N', b')$, поскольку новые модели являются элементарными расширениями старых.

**Задача 6.9.** (*) Одинаковы ли множества формул $A(x)$, инвариантных относительно бисимуляций в классе всех моделей и в классе конечных моделей?

---

[12] Можно даже рассматривать произвольный класс $\bullet$-моделей. Например, класс $\bullet$-моделей $(M, a)$, таких что модель $M$ порождена точкой $a$.

[13] M. Otto. *Elementary proof of the van Benthem – Rosen characterisation theorem.* Technical report, 2004.

## 6.3 Изменение вида формул первого порядка

Теорема ван Бентема, как мы ее сформулировали выше, говорит о формулах первого порядка с одной свободной переменной. Возникает естественный вопрос: что будет, если рассматривать формулы без свободных переменных (то есть замкнутые) или с несколькими свободными переменными? Ответы дают приводимые ниже результаты. Мы их сформулируем для обычного модального языка и класса всех моделей, но, конечно же, их можно рассматривать и для более выразительных модальных языков, и для других классов моделей.

### 6.3.1 Для замкнутых формул первого порядка

**Определение 6.10.** Замкнутая формула первого порядка $A$ *эквивалентна* модальной формуле $\varphi$, если для любой модели Крипке $M$ имеем: $M \models A \Leftrightarrow M \models \varphi$; т.е. формулы $A$ и $\forall x\, \varphi^*(x)$ эквивалентны.

**Теорема 6.11** (Глобальный аналог теоремы ван Бентема: de Rijke, Sturm,[14] 2001)**.** *Замкнутая формула первого порядка эквивалентна некоторой модальной формуле $\iff$ она сохраняется при взятии несвязных сумм и образов относительно сюръективных бисимуляций.*

Первое означает: если $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ и $M_i \models A$ для всех $i \in I$, то $M \models A$.

Второе означает: если $Z : M \simeq M'$ — бисимуляция и $\mathrm{Ran}(Z) = W'$, то из $M \models A$ следует $M' \models A$.

Аналогичный результат верен над классом $\mathbb{K}$ конечных моделей Крипке (конечно, в этом случае нужно говорить о взятии несвязных сумм конечного числа моделей). См. ту же ссылку, Theorem 5.4.6.

### 6.3.2 Для формул с несколькими свободными переменными

Будем рассматривать формулы первого порядка $A(x_1, \ldots, x_n)$, или коротко $A(\vec{x})$, имеющие $n$ свободных переменных, $n \geqslant 1$. Если формулы с одной свободной переменной мы оценивали в $\bullet$-моделях, то есть моделях с одной выделенной точкой, то формулы вида $A(\vec{x})$ естественным образом оцениваются в $n$-моделях, то есть моделях с $n$ выделенными точками $(M, (a_1, \ldots, a_n))$, или коротко $(M, \vec{a})$:

$$(M, \vec{a}) \models A(\vec{x}) \quad \leftrightharpoons \quad M \models A(\vec{a}).$$

**Определение 6.12** (Бисимуляция для $n$-моделей)**.** Говорим, что две $n$-модели $(M, \vec{a})$ и $(N, \vec{c})$ находятся в отношении *бисимуляции*, или *бисимуляционно эквивалентны*, и записываем это так: $(M, \vec{a}) \simeq (N, \vec{c})$, если существует бисимуляция $Z$ между $M$ и $N$, такая что $a_i \, Z \, c_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теперь возникает вопрос, какие синтаксические модальные объекты оценивать в $n$-моделях $(M, \vec{a})$. Ответ: булевы комбинации утверждений вида «в точке $a_i$ верна модальная формула $\varphi_i$». Для их формулировки дополним алфавит, используемый для построения модальных формул, индивидными переменными $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — теми самыми, которые используются для построения формул первого порядка.

*Модальные выражения* строятся согласно следующему синтаксису, где $x \in \{x_1, x_2, \ldots\}$:

$$\Phi \quad ::= \quad x\colon \varphi \;\mid\; \Phi \wedge \Psi \;\mid\; \Phi \vee \Psi \;\mid\; \neg\Phi.$$

Например, модальным выражением с тремя индивидными переменными является,

$$\Phi(x, y, z) \;=\; x\colon \Box p \wedge y\colon \Diamond(p \vee q) \to z\colon \neg\Box q.$$

Семантика модальных выражений задается на $n$-моделях так: для «атомарных» выражений задаем $(M, \vec{a}) \models x_i\colon \varphi \leftrightharpoons M, a_i \models \varphi$, а на булевы комбинации выражений семантика распространяется очевидным образом. Вместо $(M, \vec{a}) \models \Phi(\vec{x})$ пишем короче $M \models \Phi(\vec{a})$, как в случае формул первого порядка.

Формула первого порядка $A(\vec{x})$ *эквивалентна* модальному выражению $\Phi(\vec{x})$, если для всех $n$-моделей $(M, \vec{a})$ верна эквивалентность: $M \models A(\vec{a}) \Leftrightarrow M \models \Phi(\vec{a})$.

**Теорема 6.13** (ван Бентем, 1976)**.** *Формула первого порядка $A(\vec{x})$ эквивалентна некоторому модальному выражению $\Phi(\vec{x})$ $\Leftrightarrow$ формула $A(\vec{x})$ инвариантна относительно бисимуляций между $n$-моделями.*

[14] Глава 5 “Global Definability in Basic Modal Logic”, Следствие 5.4.4; в книге: “Essays on Non-Classical Logic” (H.Wansing, ed.), 2001; серия Advances in Logic, volume 1.

**Историческая справка.** Изначально в своей диссертации (1976) ван Бентем именно для этого случая и доказал теорему. Только он говорил не непосредственно о модальных выражениях, а о некоторых особых формулах первого порядка с несколькими свободными переменными (он называл их m-формулами), которые, как мы теперь можем легко убедиться, являются в точности стандартными переводами модальных выражений. Термин же «модальные выражения» был введен Золиным (в 2011 году в совместной работе со Ст.Кикотем).

Специальный случай модальных выражений фигурировал также у Крахта, который изучал модальную определимость на шкалах (!) формул первого порядка $A(x_1, \ldots, x_n)$; но он тоже не вводил термин «модальное выражение», а рассматривал просто $n$-кортеж из модальных формул $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$. Теперь легко убедиться, что этот кортеж означал, в наших обозначениях, модальное выражение $x_1 : \varphi_1 \vee \ldots \vee x_n : \varphi_n$.

### 6.3.3 Определимость множеством модальных формул

Когда формула первого порядка эквивалентна ***множеству*** модальных формул?

**Лемма 6.14.** *Формула первого порядка $A(x)$ эквивалентна множеству модальных формул $\iff$ она эквивалентна одной модальной формуле.*

*Доказательство.* Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем $\Rightarrow$. Пусть $A(x)$ эквивалентна множеству модальных формул $\Gamma$. В частности, $\Gamma \models A(x)$. По компактности $\exists$ конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \models A(x)$. Тем самым, $\Gamma \models \Gamma' \models A(x)$ и все они эквивалентны. Значит, $A(x)$ эквивалентна модальной формуле $\bigwedge \Gamma'$. $\Box$

Аналогичная лемма имеет место и для замкнутых формул первого порядка. И для модальных языков, являющихся фрагментами логики первого порядка (темпоральный, универсальная модальность, градуированные модальности, гибридная логика). И при ограничении класса (отмеченных) моделей каким-либо компактным (в частности, элементарным) классом.

Если вместо формулы $A(x)$ рассматривать множество формул $\Phi(x)$, то лемма уже не верна: класс отмеченных моделей, заданный множеством модальных (а значит, и первопорядковых) формул $\{\Diamond\top, \Diamond\Diamond\top, \Diamond\Diamond\Diamond\top, \ldots\}$, не задается никакой модальной формулой.

### 6.3.4 Модальная определимость множеств формул первого порядка

Множество **FO**-формул $\Gamma(x)$ называем *инвариантным относительно бисимуляций*, если задаваемый этим множеством класс $\bullet$-моделей замкнут относительно бисимуляций.

**Теорема 6.15.** *Множество* **FO***-формул $\Gamma(x)$ эквивалентно некоторому множеству модальных формул $\iff$ множество $\Gamma(x)$ инвариантно относительно бисимуляций.*

Для классов моделей (и, соответственно, множеств замкнутых формул первого порядка) аналогичный результат приводится нами в разделе 11.

**Задача 6.16.** Пусть $\mathbb{K}$ — элементарный класс $\bullet$-моделей. Тода следующие условия эквивалентны:
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно бисимуляций,
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно модальной эквивалентности,
– $\mathbb{K}$ задается некоторым множеством модальных формул.

## 7 Критерии определимости: общая постановка задачи, примеры

В математической логике фундаментальную роль играют теоремы, характеризующие выразительные возможности того или иного формального языка. Общая идея в основе этих результатов следующая.

Рассматривается пара объектов: 1) формальный *язык* $\mathcal{L}$, то есть семейство формул некоторого вида; 2) класс *структур* $\mathcal{S}$, пригодных для интерпретации формул языка $\mathcal{L}$. Также задана семантика, то есть отношение $M \models A$ между структурами $M \in \mathcal{S}$ и формулами $A \in \mathcal{L}$; оно читается как «формула $A$ *истинна* в $M$» или «структура $M$ является *моделью* формулы $A$». Это отношение распространяется:
– на множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$: пишем $M \models \Gamma$, если для всех формул $A \in \Gamma$ имеет место $M \models A$;
– на классы структур $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$: пишем $\mathbb{K} \models A$, если для всех моделей $M \in \mathbb{K}$ имеет место $M \models A$;
– на то и другое одновременно $\mathbb{K} \models \Gamma$, определение очевидно.

Класс всех моделей данного множества формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ будем обозначать

$$\mathsf{Models}(\Gamma) \ := \ \{\, M \in \mathcal{S} \ \mid \ M \models \Gamma \,\}.$$

Двойственно, множество всех формул, истинных на данном классе структур $\mathbb{K}$, обозначаем[15]

$$\mathsf{Theory}(\mathbb{K}) \ := \ \{\, A \in \mathcal{L} \ \mid \ \mathbb{K} \models A \,\}.$$

Дополнение класса структур $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ будем обозначать $\overline{\mathbb{K}} := \mathcal{S} \setminus \mathbb{K}$.

Класс структур $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$ называют *определимым в языке* $\mathcal{L}$, если найдется (быть может, бесконечное) множество формул $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$, которое задает в точности этот класс: $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$. Задача состоит в том, как охарактеризовать классы структур, определимые в данном языке. Чтобы задача стала более точной, нужно определиться с тем, в каких терминах ищется характеризация. Обычно для этого используют следующие понятия замкнутости класса или его дополнения относительно операций на моделях или отношений между моделями.

- Пусть задана операция, скажем, двуместная[16] $\otimes$ на классе структур $\mathcal{S}$.
  Говорят, что $\mathbb{K}$ *замкнут* относительно операции $\otimes$, если для любых структур $M, N \in \mathcal{S}$ имеем:
  $$M, N \in \mathbb{K} \implies M \otimes N \in \mathbb{K}.$$
- Пусть задано некоторое двуместное отношение $\sim$ между структурами из $\mathcal{S}$.
  Говорят, что $\mathbb{K}$ *замкнут* относительно $\sim$, если для любых структур $M, N \in \mathcal{S}$ имеем:
  $$M \sim N \implies (M \in \mathbb{K} \ \Rightarrow \ N \in \mathbb{K}).$$
  Говорят, что $\mathbb{K}$ *инвариантен* относительно $\sim$, если для любых структур $M, N \in \mathcal{S}$ имеем:
  $$M \sim N \implies (M \in \mathbb{K} \ \Leftrightarrow \ N \in \mathbb{K}).$$
  Если отношение $\sim$ симметрично, то замкнутость и инвариантность относительно него совпадают.

**Пример 1.** Язык состоит из *тождеств*, то есть замкнутых формул первого порядка функциональной сигнатуры (то есть сигнатуры $\Sigma$, содержащей лишь функциональные символы, включая константы, которые можно рассматривать как 0-местные функциональные символы) вида $\forall \vec{x}\,(t = s)$, где $t, s$ — термы сигнатуры $\Sigma$, а $\vec{x}$ — список всех переменных, входящих в $t, s$. Структуры — универсальные алгебры сигнатуры $\Sigma$, то есть непустые множества с операциями, соответствующими символам из $\Sigma$. Для определимых классов зарезервирован термин: класс алгебр $\mathbb{K}$ называется (алгебраическим) *многообразием* (variety), если он задается некоторым (быть может бесконечным) множеством тождеств $\Gamma$.

**Теорема 7.1** (HSP-теорема[17], Birkhoff, 1935)**.** *Класс алгебр является многообразием $\iff$ он замкнут относительно операций взятия гомоморфных образов (H), подалгебр (S), и произведений (P) алгебр.*

[15] В некоторых случаях это множество называют *логикой* класса $\mathbb{K}$ и обозначают соответственно $\mathsf{Logic}(\mathbb{K})$.

[16] Часто операция бывает многоместная и даже неопределенного количества аргументов (несвязная сумма моделей).

[17] Буквы в названии теоремы неслучайно идут именно в таком порядке. Если $\mathbb{K}$ — класс алгебр, не обязательно являющийся многообразием, то чтобы получить наименьшее многообразие, содержащее $\mathbb{K}$, очевидно, достаточно замкнуть его относительно всех трех указанных операций (применяя их многократно в разнообразном порядке). Но оказывается, достаточно сначала построить всевозможные произведения (P) алгебр из $\mathbb{K}$, затем всевозможные подалгебры (S) получившихся алгебр, и затем всевозможные гомоморфные образы (H) получившихся алгебр; пишем: $\mathbb{H}(\mathbb{S}(\mathbb{P}(\mathbb{K})))$. Таким образом, теорему Биркгофа можно переформулировать следующим образом: *Класс алгебр $\mathbb{K}$ является многообразием $\iff$ $\mathbb{H}(\mathbb{S}(\mathbb{P}(\mathbb{K}))) \subseteq \mathbb{K}$.*

**Пример 2.** Язык состоит из произвольных замкнутых формул (то есть *предложений*) первого порядка в некоторой сигнатуре $\Sigma = (\mathsf{Pred}, \mathsf{Func}, \mathsf{Const})$. Структуры — это интерпретации (они же — модели первого порядка, алгебраические системы) сигнатуры $\Sigma$. Для определимых классов таких структур зарезервирован термин (даже не один): класс структур $\mathbb{K}$ сигнатуры $\Sigma$ называется *аксиоматизируемым* или *элементарным*, если он задается некоторым (быть может бесконечным) множеством предложений сигнатуры $\Sigma$.[18] Напомним, что две структуры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ сигнатуры $\Sigma$ называются *элементарно эквивалентными*, это обозначается: $\mathcal{M} \equiv_{\mathbf{FO}} \mathcal{N}$, если в них верны одни и те же предложения сигнатуры $\Sigma$. Ультрапроизведения структур мы определим в разделе 9 ниже.

**Теорема 7.2** (Критерий аксиоматизируемости, Keisler, 1961). *Класс моделей аксиоматизируем $\iff$ он замкнут относительно элементарной эквивалентности $\equiv_{\mathbf{FO}}$ и ультрапроизведений (УП).*

Известен также критерий *конечной аксиоматизируемости* класса, то есть аксиоматизируемости конечным множеством предложений. Его можно доказать в общем виде, сделав некоторые естественные предположения относительно языка $\mathcal{L}$, структур $\mathcal{S}$ и семантики, их связывающей.

А именно, пусть язык замкнут относительно конъюнкций и отрицаний, и пусть семантика этих связок задается обычным образом: $M \models A \wedge B \Leftrightarrow M \models A$ и $M \models B$; $M \models \neg A \Leftrightarrow M \not\models A$ (последнее мы будем читать как «семантика согласована с отрицанием»). Заметим, что в этом случае конечная аксиоматизируемость равносильна аксиоматизируемости одним предложением. Также предположим, что имеет место *компактность*: множество предложений имеет модель, если каждое его конечное подмножество имеет модель. В частности, это верно для языка первого порядка, поэтому Лемма 7.3 верна для Примера 2.

**Лемма 7.3** (Критерий конечной аксиоматизируемости). *Пусть язык $\mathcal{L}$ и структуры $\mathcal{S}$ устроены так, что семантика согласована с отрицанием и имеет место компактность. Тогда:*

*класс структур $\mathbb{K}$ конечно аксиоматизируем $\iff$ класс $\mathbb{K}$ и его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ аксиоматизируемы.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Если $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(A)$ для некоторого предложения $A \in \mathcal{L}$, то $\overline{\mathbb{K}} = \mathsf{Models}(\neg A)$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$ и $\overline{\mathbb{K}} = \mathsf{Models}(\Delta)$ для некоторых множеств предложений $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}$. Поскольку $\mathbb{K} \cap \overline{\mathbb{K}} = \varnothing$, то объединение $\Gamma \cup \Delta$ не имеет моделей. В силу компактности, для некоторых конечных подмножеств $\Gamma' \subseteq \Gamma$ и $\Delta' \subseteq \Delta$ объединение $\Gamma' \cup \Delta'$ не имеет моделей.

Мы утверждаем, что $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma')$ и $\overline{\mathbb{K}} = \mathsf{Models}(\Delta')$. Действительно, для любой модели $\mathcal{M}$ имеем:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M} \in \mathbb{K} & \iff & \mathcal{M} \models \Gamma & \Longrightarrow & M \models \Gamma' \\ \Updownarrow & & & & \Downarrow \\ \mathcal{M} \in \overline{\mathbb{K}} & \iff & \mathcal{M} \not\models \Delta & \Longleftarrow & M \not\models \Delta' \end{array}$$

Итак, для любой модели $\mathcal{M}$ получили требуемое: $\mathcal{M} \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \Gamma'$, а также $\mathcal{M} \in \overline{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \Delta'$. □

Эта лемма применима к отмеченным моделям Крипке и модальным формулам, ибо для них верна и компактность, и согласованность с отрицанием: $M, a \not\models A \Leftrightarrow M, a \models \neg A$. Для моделей же Крипке компактность по-прежнему верна (ибо это фрагмент языка первого порядка), а согласованность с отрицанием нарушается. В силу этого для моделей Крипке становится неверной импликация $\Rightarrow$ вышедоказанной леммы: если класс моделей Крипке $\mathbb{K}$ модально определим (пусть даже бесконечным множеством формул, а уж тем более конечным), то его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ вовсе не обязательно будет модально определимым. Приведите пример.

[18] Надо быть внимательным: иногда в литературе под *элементарным* классом понимают класс, заданный *конечным* множеством предложений, тогда как класс, задаваемый произвольным множеством предложений, называют $\Delta$-*элементарным*. См. также наше Определение 1.11 элементарного класса шкал.

# 8 Фильтры и ультрафильтры

См. отдельный файл.

**Конструкция.** Пусть $G$ — бесконечное множество. Рассмотрим все его конечные подмножества: $I := \{i \subseteq G \mid i \text{ конечное}\}$. Для каждого элемента $a \in G$ рассмотрим только те конечные множества, которым этот элемент принадлежит: $X_a = \{i \in I \mid a \in i\}$. Мы утверждаем, что семейство всех таких множеств $S = \{X_a \mid a \in G\}$ является *центрированным*, то есть пересечение любого конечного числа множеств этого вида не пусто. Действительно,

$$(X_{a_1} \cap \ldots \cap X_{a_n}) \ni \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Значит, семейство $S$ содержится в некотором ультрафильтре $U$ над $I$.

# 9 Ультрапроизведения. Теорема Лося

См. отдельный файл.[19]

# 10 Ультра-расширение модели Крипке

См. отдельный файл.

**Лемма 10.1.** $M \equiv_{\mathbf{ML}} M^{\mathfrak{ue}}$.

*Доказательство.* Используем два факта: $M^{\mathfrak{ue}}, u \models A \Leftrightarrow \|A\|_M \in u$, и $M^{\mathfrak{ue}}, \pi_a \models A \Leftrightarrow M, a \models A$. Имеем:
– $M \models A \Leftrightarrow \|A\|_M = W \Rightarrow \forall u \in W^{\mathfrak{ue}}\ \|A\|_M \in u \Rightarrow \forall u \in W^{\mathfrak{ue}}\ M^{\mathfrak{ue}}, u \models A \Leftrightarrow M^{\mathfrak{ue}} \models A$;
– $M^{\mathfrak{ue}} \models A \Rightarrow \forall a \in W\ M^{\mathfrak{ue}}, \pi_a \models A \Rightarrow \forall a \in W\ M, a \models A \Rightarrow M \models A$. □

[19] Английская Википедия указывает, что фамилия Łoś в оригинале произносится похоже на «wash», а не на «лось»!

## 11 Критерий модальной определимости классов моделей

В модальной логике обычно фигурируют такие структуры, как *модели Крипке* и *шкалы Крипке*. Имеет смысл также рассматривать *отмеченные модели Крипке* $(M, a)$, где $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, $a \in W$, и *отмеченные шкалы Крипке* $(F, a)$, где $F = (W, R)$ — шкала Крипке, $a \in W$. Например, теорема ван Бентема (см. раздел 5) формулируется именно для отмеченных моделей Крипке. Вместо $a \in W$ нам будет часто удобнее писать $a \in M$ или $a \in F$.

Модальная формула или множество модальных формул может использоваться для задания:
– класса отмеченных моделей Крипке;
– класса моделей Крипке;
– класса отмеченных шкал Крипке;
– класса шкал Крипке.

В каждом случае разумно задаться вопросом о критерии модальной определимости данных структур. Для (отмеченных) моделей Крипке мы приведем ответ на этот вопрос ниже. Для (отмеченных) шкал Крипке соответствующий критерий будет предъявлен отдельно, предварительно мы изучим понятие ультра-расширения модели Крипке.

Здесь и ниже пусть $\mathbb{K}$ — класс структур одного из четырех упомянутых видов (отмеченных моделей, или моделей, или отмеченных шкал, или шкал).

**Определение 11.1.** Класс структур $\mathbb{K}$ назовем *модально определимым* (в широком смысле), если существует (быть может бесконечное) множество модальных формул $\Gamma$, такое что $\mathbb{K}$ есть в точности класс структур, на которых верно множество формул $\Gamma$, то есть $\forall S \in \mathbb{K}\ \big(S \in \mathbb{K} \ \Leftrightarrow\ S \models \Gamma\big)$.

Класс структур $\mathbb{K}$ назовем *элементарным* (в широком смысле), если существует (быть может бесконечное) множество формул первого порядка[20] $\Delta$, такое что $\mathbb{K}$ есть в точности класс структур, на которых верно множество формул $\Delta$, то есть $\forall S \in \mathbb{K}\ \big(S \in \mathbb{K} \ \Leftrightarrow\ S \models \Delta\big)$.

Приведем сводную таблицу результатов, касающихся элементарности и модальной определимости для классов отмеченных (!) моделей. В случае критериев элементарной определимости, конечно же, не обязательно, чтобы $\mathbb{K}$ был классом моделей Крипке; он может быть классом структур первого порядка произвольной сигнатуры. Аббревиатуры: УП — ультрапроизведения, УС — ультрастепени.

| $\mathbb{K}$ определим в языке | $\mathbb{K}$ замкнут | $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут | Кто и когда доказал |
|---|---|---|---|
| **FO** | $\equiv_{\mathbf{FO}}$ и УП | | Keisler, 1961 |
| **FO** | (изоморфизм) $\cong$ и УП | УС | Keisler, 1961, 1964; Shelah, 1971 |
| **ML** | $\equiv_{\mathbf{ML}}$ и УП | | de Rijke, 1993 |
| **ML** | (бисимуляция) $\simeq$ и УП | УС | de Rijke, 1993 |

**Историческая справка.** Кейслер доказал оба результата в 1961 году. Второй результат (про УП и УС) опирается на следующую теорему[21]: «Две модели первого порядка элементарно эквивалентны $\Leftrightarrow$ они имеют изоморфные ультрастепени».[22] Кейслер доказал эту теорему в 1961 одним способом, а в 1964 другим. Однако оба доказательства этой теоремы использовали (обобщенную) континуум-гипотезу. Заслуга Шелаха в том, что в 1971 году ему удалось дать доказательство, не использующее континуум-гипотезу.[23] Результат de Rijke 1993 получен в его диссертации.[24]

Используя лемму 7.3 (Критерий конечной аксиоматизируемости), мы получаем из результата Кейслера следующий критерий определимости одной формулой первого порядка.

**Теорема 11.2.** *Класс структур первого порядка $\mathbb{K}$ задается одной формулой первого порядка $\Leftrightarrow$ оба класса $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуты относительно изоморфизма ($\cong$) и УП.*

[20]В сигнатуре, подходящей для структур данного вида, причем формул замкнутых (в случае моделей и шкал) либо с одной свободной переменной (в случае отмеченных моделей или шкал).
[21]Лемма о манёвре является простым следствием данной глубокой теоремы.
[22]Доказательство можно найти в книге: J.L.Bell, A.B.Slomson, “Models and Ultraproducts: An Introduction”, North-Holland Publ. Co., 1969.
[23]Упомянутая выше книга вышла до этого результата Шелаха и потому использует обобщенную континуум-гипотезу.
[24]Maarten de Rijke. *Extending Modal Logic.* PhD thesis, ILLC, University of Amsterdam, 1993.

### 11.1 Компактные классы

Здесь мы получим некоторые результаты как для (отмеченных) моделей, так и для (отмеченных) шкал, так как они очень похожи и получаются одним рассуждением; последние будут нами использованы позже для доказательства критерия модальной определимости класса *шкал*.

**Определение 11.3.** Пусть $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}(\mathbf{ML})$ — некоторое множество модальных формул.

- Множество $\Gamma$ *выполнимо* в отмеченной модели $(M, a)$, если $M, a \models \Gamma$.
- Множество $\Gamma$ *выполнимо* в модели $M$, если $\exists a \in M$: $M, a \models \Gamma$.
- Множество $\Gamma$ *выполнимо* в отмеченной шкале $(F, a)$, если $\exists V$: $M, a \models \Gamma$, где $M := (F, V)$.
- Множество $\Gamma$ *выполнимо* в шкале $F$, если $\exists V\ \exists a \in F$: $M, a \models \Gamma$, где $M := (F, V)$.

**Определение 11.4.** Пусть $\mathbb{K}$ — класс (отмеченных) моделей или (отмеченных) шкал. Множество формул $\Gamma$ называется *выполнимым* в классе $\mathbb{K}$, если $\Gamma$ выполнимо в некоторой структуре из $\mathbb{K}$.

**Упражнение 11.5.** Модальная формула $A$ выполнима в классе $\mathbb{K} \iff \mathbb{K} \not\models \neg A$.

**Определение 11.6** (Компактные классы)**.** Класс $\mathbb{K}$ называется *компактным*,[25] если для любого (бесконечного) множества модальных формул $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}(\mathbf{ML})$ из того, что каждое его конечное подмножество $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в классе $\mathbb{K}$, следует, что и всё множество формул $\Gamma$ выполнимо в классе $\mathbb{K}$.

Для каждого из четырех видов структур определена операция взятия ультрапроизведения.

**Лемма 11.7.** *Класс $\mathbb{K}$ замкнут относительно ультрапроизведений $\Rightarrow$ класс $\mathbb{K}$ компактен.*

*Доказательство.* Пусть $\Gamma$ — произвольное бесконечное множество модальных формул. Рассмотрим все его конечные подмножества $I = \{i \subseteq \Gamma \mid i \text{ конечное}\}$ и построим ультрафильтр $U$ над $I$ согласно **конструкции** из раздела 8. Предположим, что каждое конечное подмножество множества $\Gamma$, то есть $i \in I$, выполнимо в классе $\mathbb{K}$. В зависимости от типа структур, из которых состоит $\mathbb{K}$, это означает следующее для каждого $i \in I$:

- $\exists (M_i, a_i) \in \mathbb{K}$: $M_i, a_i \models i$.
- $\exists M_i \in \mathbb{K}\ \exists a_i \in M_i$: $M_i, a_i \models i$.
- $\exists (F_i, a_i) \in \mathbb{K}\ \ \exists V_i$: $M_i, a_i \models i$, где $M_i := (F_i, V_i)$.
- $\exists F_i \in \mathbb{K}\ \ \exists V_i\ \ \exists a_i \in F_i$: $M_i, a_i \models i$, где $M_i := (F_i, V_i)$.

Итак, у нас нашлось семейство отмеченных моделей $(M_i, a_i)_{i \in I}$ и ультрафильтр $U$ над $I$. Берем их ультрапроизведение — отмеченную модель $(M, a) := \prod^U_{i \in I}(M_i, a_i)$. В виду замкнутости класса $\mathbb{K}$ относительно ультрапроизведений получили отмеченную модель из $\mathbb{K}$ (или над $\mathbb{K}$, в очевидном смысле).

Осталось показать, что $\Gamma$ выполнимо в $(M, a)$, то есть $M, a \models \Gamma$. Для этого возьмем произвольную формулу $A \in \Gamma$ и покажем, что $M, a \models A$. Имеем (вспомните множества $X_A$ из **конструкции**):

$$X_A = \{i \mid A \in i\}\ \subseteq\ \{i \mid M_i, a_i \models A\}.$$

Поскольку $X_A \in U$, то и правое множество принадлежит $U$. По теореме Лося $M, a \models A$. □

**Следствие 11.8.** *Элементарные (в частности, модально определимые) классы структур (отмеченных моделей, моделей, отмеченных шкал, шкал), классы структур — (модально) компактны.*

*Доказательство.* По теореме Лося, элементарный класс замкнут относительно ультрапроизведений. □

Итак, получилась следующая картина (заметим, что обе импликации используют теорему Лося):

$$\boxed{\mathbb{K} \text{ элементарный}} \implies \boxed{\mathbb{K} \text{ замкнут отн. УП}} \implies \boxed{\mathbb{K} \text{ компактный}}$$

В лемме 11.11 мы увидим применение компактных классов.

[25]Или более точно — *модально компактным*, если помимо модального обсуждаются и другие языки.

Пусть $\mathbb{K}$ — класс структур одного из четырех обсуждаемых видов; $S$ — структура того же вида.

**Определение 11.9.** Пишем[26] $S \models \mathbb{K}$, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:
– $S \models \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$;
– $\mathsf{Theory}(S) \supseteq \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$;
– для всех формул $A \in \mathsf{Fm}(\mathbf{ML})$ имеем: $\mathbb{K} \models A \Rightarrow S \models A$;
– для всех формул $A \in \mathsf{Fm}(\mathbf{ML})$ имеем: $\big(A$ выполнима в $S \Rightarrow A$ выполнима в $\mathbb{K}\big)$;
– для конечных множеств формул $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}(\mathbf{ML})$ имеем: $\big(\Gamma$ выполнимо в $S \Rightarrow \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}\big)$.

Отметим следующее очевидно свойство, связывающее все три употребления символа $\models$.

**Лемма 11.10.** **(1)** $S \models \Gamma$ *и* $\Gamma \models A \;\Rightarrow\; S \models A$;
**(2)** $S \models \mathbb{K}$ *и* $\mathbb{K} \models A \;\Rightarrow\; S \models A$.

Следующая лемма показывает, что в случае компактного класса последний пункт определения $S \models \mathbb{K}$ можно распространить на произвольные множества формул.

**Лемма 11.11** (О переносе выполнимости)**.** *Пусть $\mathbb{K}$ — компактный класс структур, $S$ — структура (того же вида), и пусть $S \models \mathbb{K}$. Тогда для любого множества модальных формул $\Gamma \subseteq \mathsf{Fm}(\mathbf{ML})$ имеем:*

$$\Gamma \text{ выполнимо в структуре } S \quad\Longrightarrow\quad \Gamma \text{ выполнимо в классе } \mathbb{K}.$$

*Доказательство.* Пусть $\Gamma$ выполнимо в $S$. Тогда каждое его конечное подмножество $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $S$, а значит, ввиду $S \models \mathbb{K}$, и в $\mathbb{K}$. По компактности класса $\mathbb{K}$, всё множество $\Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$. □

Для отмеченных моделей Лемма о переносе выполнимости упрощается: вместо произвольных выполнимых в $(M, a)$ множеств формул можно взять наибольшее из них — ее теорию $\mathsf{Theory}(M, a)$.

**Лемма 11.12** (О переносе выполнимости)**.** *Пусть $\mathbb{K}$ — компактный класс отмеченных моделей, $(M, a)$ — отмеченная модель, и $(M, a) \models \mathbb{K}$. Тогда ее теория $\mathsf{Theory}(M, a)$ выполнима в классе $\mathbb{K}$.*

Приведем еще одну простую, но полезную лемму.

**Лемма 11.13.** *Пусть семантика согласована с отрицанием, и $M, N \in \mathcal{S}$. Если $M \models N$, то $M \equiv_{\mathcal{L}} N$. В частности, это верно для отмеченных моделей Крипке: если $(M, a) \models (N, b)$, то $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (N, b)$.*

*Доказательство.* Используем второй пункт определения $M \models N$. Для любой формулы $A \in \mathcal{L}$ имеем:

$$\begin{array}{l} N \models A \;\Rightarrow\; M \models A; \\ N \not\models A \;\Rightarrow\; N \models \neg A \;\Rightarrow\; M \models \neg A \;\Rightarrow\; M \not\models A; \end{array}$$

Таким образом, мы получили: $(N \models A \Leftrightarrow M \models A)$. Это и означает, что $M \equiv_{\mathcal{L}} N$. □

Приведем переформулировку определимости класса моделей в терминах отношения $S \models \mathbb{K}$.

**Лемма 11.14.** *Класс структур $\mathbb{K}$ определим $\iff \forall M \in \mathcal{S}\ \ (M \models \mathbb{K} \Rightarrow M \in \mathbb{K})$.*

*Доказательство.* Класс $\mathbb{K}$ определим

$$\begin{array}{ll} \iff & \mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma) \text{ для некоторого } \Gamma \subseteq \mathcal{L} \\ \iff & \mathbb{K} = \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K})) \text{ (простой факт)} \\ \iff & \mathbb{K} \supseteq \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K})) \text{ (ибо } \subseteq \text{ верно всегда)} \\ \iff & \forall M\ (M \models \mathsf{Theory}(\mathbb{K}) \Rightarrow M \in \mathbb{K}) \\ \iff & \forall M\ (M \models \mathbb{K} \Rightarrow M \in \mathbb{K}). \end{array}$$

□

[26] Обратите внимание: обычно в логике символ $\models$ используется лишь двумя способами: 1) между структурами и формулами (и его обобщение на классы структур и множества формул), например, $\mathbb{K} \models \Gamma$; 2) между множествами формул и формулами: $\Gamma \models A$. Здесь же мы вводим третий способ использования символ $\models$, как отношения между структурами и классами структур. В теории моделей, которой мы сейчас занимаемся, это оказывается удобным. Отношение $S \models \mathbb{K}$ можно читать как «структура $S$ *моделирует* класс $\mathbb{K}$», что, кстати, согласуется с записью TEX-команды `\models`.

## 11.2 Критерий модальной определимости: отмеченные модели Крипке

**Лемма 11.15.** *Пусть $\mathbb{K}$ — компактный класс отмеченных моделей Крипке. Тогда*

$$\mathbb{K} \text{ модально определим} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{он замкнут относительно модальной эквивалентности } \equiv_{\mathbf{ML}}.$$

*Доказательство.* Импликация $\Rightarrow$ очевидна; докажем $\Leftarrow$. Пусть $\mathbb{K}$ компактен и $\equiv_{\mathbf{ML}}$-замкнут. Чтобы доказать, что он модально определим, согласно лемме 11.14, возьмем любую отмеченную модель $(M, a)$, такую что $(M, a) \models \mathbb{K}$, и покажем, что $(M, a) \in \mathbb{K}$. По лемме 11.12 о переносе выполнимости ее модальная теория $\Phi = \mathsf{Theory}(M, a)$ выполнима в классе $\mathbb{K}$. Значит, $\exists (N, b) \in \mathbb{K}$: $N, b \models \Phi$, то есть $(N, b) \models (M, a)$. По лемме 11.13, $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (N, b)$. Наконец, $(M, a) \in \mathbb{K}$, ибо $\mathbb{K}$ $\equiv_{\mathbf{ML}}$-замкнут. □

Как следствие, элементарный класс модально определим $\Leftrightarrow$ он замкнут относительно $\equiv_{\mathbf{ML}}$.

**Теорема 11.16** (de Rijke, 1993; критерий модальной определимости класса отмеченных моделей)**.** *Пусть $\mathbb{K}$ — класс отмеченных моделей Крипке.*

**(a)** *Класс $\mathbb{K}$ модально определим $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathbf{ML}}$ и УП.*
**(b)** *Класс $\mathbb{K}$ модально определим $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\simeq$ (бисимуляций) и УП, а его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуто относительно УС.*

*Доказательство.* **(a)** Импликация $\Rightarrow$ очевидна (если $\mathbb{K}$ модально определим, то он элементарен, а значит замкнут относительно УП). Импликация $\Leftarrow$ следует из леммы 11.15, ибо класс $\mathbb{K}$ компактен ввиду замкнутости относительно УП.

**(b)** Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. Сначала повторяем доказательство импликации $\Leftarrow$ пункта **(a)**. В нем мы получили две модально эквивалентные отмеченные модели: $(M, a) \equiv_{\mathbf{ML}} (N, b)$, причем $(N, b) \in \mathbb{K}$. Остается доказать, что $(M, a) \in \mathbb{K}$. По **Лемме о манёвре**[27] некоторые их ультрастепени бисимулируют: существуют ультрафильтры $U, V$ (на каких-то множествах $I, J$), такие что $(M, a)^U \simeq (N, b)^V$. Окончание доказательства таково:

$$(N, b) \in \mathbb{K} \quad \overset{\text{УП}}{\Longrightarrow} \quad (N, b)^V \in \mathbb{K} \quad \overset{\simeq}{\Longrightarrow} \quad (M, a)^U \in \mathbb{K} \quad \overset{\text{УС}}{\Longrightarrow} \quad (M, a) \in \mathbb{K}.$$

Первая импликация — ввиду замкнутости $\mathbb{K}$ относительно УП (а значит, и УС); вторая — ввиду замкнутости $\mathbb{K}$ относительно $\simeq$; третья — ввиду замкнутости дополнения $\overline{\mathbb{K}}$ относительно УС. □

[27] См. раздел 5.1 и пояснения в разделе 5.2 относительно того, что бисимулирующие модели получаются с помощью ультрастепеней.

### 11.3 Критерий модальной определимости: модели Крипке

Излагаемые здесь результаты получены de Rijke и Sturm в 2001 году.[28]

Модель, порожденную точкой, мы будем называть *корневой*, а саму эту точку — *корнем.* Корневую подмодель модели $M$, порожденную точкой $a \in M$, будем обозначать $M_a$.

**Лемма 11.17** (О накрытии)**.** *Всякая модель является р-морфным образом несвязной суммы своих корневых подмоделей:*

$$\biguplus_{a \in M} M_a \twoheadrightarrow M.$$

*Доказательство.* Отображение $(w, a) \mapsto w$ дает искомый р-морфизм. □

Взятие р-морфного образа является частным случаем взятия образа относительно сюръективной бисимуляции. Переход от модели к какой-либо порожденной подмодели тоже является взятием образа относительно сюръективной бисимуляции (рассмотрите тождественную функцию с областью определения (и значений), совпадающей с этой порожденной подмоделью).

Ниже мы говорим, что класс моделей $\mathbb{K}$ *замкнут относительно сюръективных бисимуляций*, если для любых моделей $M, N$, таких что существует сюръективная бисимуляция $Z\colon M \simeq N$, то есть $\mathsf{Ran}(Z) = N$, из $M \in \mathbb{K}$ следует $N \in \mathbb{K}$. В частности, такой класс замкнут относительно взятия порожденной подмодели и р-морфизмов.

**Лемма 11.18.** *Для произвольно класса моделей Крипке $\mathbb{K}$ следующие условия эквивалентны:*

- **(a)** *$\mathbb{K}$ модально определим, то есть $\exists \Gamma \subseteq \mathbf{ML}$: $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$.*
- **(b)** *$\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K}))$.*
- **(c)** *$\mathbb{K} \supseteq \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K}))$.*
- **(d)** *для любой модели $M$ $\quad (M \models \mathbb{K} \;\Rightarrow\; M \in \mathbb{K})$.*

*Если класс $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно ультрастепеней, то достаточно модально насыщенных моделей:*

- **(e)** *для любой модально насыщенной модели $M$ $\quad (M \models \mathbb{K} \;\Rightarrow\; M \in \mathbb{K})$.*

*Если кроме того $\mathbb{K}$ замкнут относительно несвязных сумм и сюръективных бисимуляций, то*

- **(f)** *для любой корневой модально насыщенной модели $M$ $\quad (M \models \mathbb{K} \;\Rightarrow\; M \in \mathbb{K})$.*

*Доказательство.* (b)⇔(c): ибо обратное включение верно всегда.

(a)⇐(b): очевидно.

(a)⇒(c): Поскольку $\Gamma \subseteq \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$, то $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma) \supseteq \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K}))$.

(c)⇔(d): ибо (d) есть дословная расшифровка пункта (c), ведь $M \models \mathbb{K}$ означает $M \models \mathsf{Theory}(\mathbb{K})$.

(d)⇐(e): Берем любую модель $M$. Возьмем любую ее $\omega$-насыщенную ультрастепень $M^\Phi$. Имеем $M \equiv_{\mathbf{FO}} M^\Phi$; в частности, $M \equiv_{\mathbf{ML}} M^\Phi$. Тогда имеем цепь импликаций:

$$M \models \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad M^\Phi \models \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad M^\Phi \in \mathbb{K} \quad\Longrightarrow\quad M \in \mathbb{K}.$$

Здесь первая импликация ввиду $M \equiv_{\mathbf{ML}} M^\Phi$; вторая — по пункту (e); третья — поскольку $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно УС.

(e)⇐(f): Берем любую модально насыщенную модель $M$. По лемме о накрытии $\bigcup_{a \in M} M_a \twoheadrightarrow M$. Кроме того, каждая $M_a$ тоже модально насыщенная, значит, можно пользоваться пунктом (f). Тогда имеем цепь импликаций:

$M \models \mathbb{K} \Rightarrow$ (ибо истинность модальных формул сохраняется при переходе к порожденной подмодели)
$\forall a \in M \; M_a \models \mathbb{K} \Rightarrow$ (пользуясь пунктом (f))
$\forall a \in M \; M_a \in \mathbb{K} \;\Rightarrow$ (ввиду замкнутости $\mathbb{K}$ относительно несвязных сумм)
$\biguplus_{a \in M} M_a \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow$ (ввиду замкнутости $\mathbb{K}$ относительно сюръективных бисимуляций, в частности, р-морфных образов) $M \in \mathbb{K}$. □

[28] Maarten de Rijke, Holger Sturm. *Global definability in basic modal logic.* In: H. Wansing (ed.), Essays on Non-classical Logic. Volume 1 of “Advances in Logic”. World Scientific Publishers, 2001.

**Лемма 11.19.** *Пусть имеется бисимуляция* $Z\colon (N,b) \simeq (M,a)$, *и пусть модель* $M$ *порождена точкой* $a$. *Тогда бисимуляция* $Z$ *сюръективна:* $\mathsf{Ran}(Z) = M$.

*Доказательство.* Область определения и область значений бисимуляции всегда являются порожденными подмоделями. Поскольку $a \in \mathsf{Ran}(Z)$ и модель $M$ порождена точкой $a$, то вся модель $M$ лежит в области значений бисимуляции $Z$. □

Сначала мы докажем критерий модальной определимости для *элементарных* классов моделей.

**Лемма 11.20.** *Пусть* $\mathbb{K}$ *— элементарный класс моделей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

$\mathbb{K}$ *модально определим* $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно несвязных сумм и сюръективных бисимуляций.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Очевидно. ($\Leftarrow$) Используем Лемму 11.18(f). Возьмем любую корневую модально насыщенную модель $M = M_a$, где $a \in M$, такую что $M \models \mathbb{K}$. Надо доказать, что $M \in \mathbb{K}$. Теория отмеченной модели $T := \mathsf{Theory}(M,a)$ выполнима в $M$, а значит, и в $\mathbb{K}$ (по лемме 11.11 о переносе выполнимости, ибо элементарный класс $\mathbb{K}$ компактен). Значит, $\exists N \in \mathbb{K}\ \exists b \in N\colon\ N,b \models T$. Итак, $(N,b) \models (M,a)$. Следовательно, $(N,b) \equiv_{\mathbf{ML}} (M,a)$.

Берем какую-нибудь $\omega$-насыщенную ультрастепень $(N,b)^{\Psi}$. Поскольку $(N,b) \equiv_{\mathbf{ML}} (N,b)^{\Psi}$, то $(N,b)^{\Psi} \equiv_{\mathbf{ML}} (M,a)$. Так как обе отмеченные модели модально насыщенные, модальная эквивалентность между ними равносильна наличию бисимуляции: $(N,b)^{\Psi} \simeq (M,a)$. Поскольку модель $M$ порождена точкой $a$, эта бисимуляция сюръективна. Теперь имеем цепь импликаций:

$$N \in \mathbb{K} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad N^{\Psi} \in \mathbb{K} \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad M \in \mathbb{K}.$$

Импликация (1) верна, так как класс $\mathbb{K}$ элементарный, а значит, замкнут относительно УС; импликация (2) верна, ибо $\mathbb{K}$ замкнут относительно сюръективных бисимуляций. □

Мы готовы доказать основной результат этого раздела.

**Теорема 11.21** (Критерий модальной определимости класса моделей Крипке)**.**
*Пусть* $\mathbb{K}$ *— класс моделей Крипке. Тогда:*

**(а)** $\mathbb{K}$ *модально определим* $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно несвязных сумм, сюръективных бисимуляций и УП, а его дополнение* $\overline{\mathbb{K}}$ *замкнуто относительно УС.*

**(б)** $\mathbb{K}$ *определим одной модальной формулой* $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно несвязных сумм, сюръективных бисимуляций и УП, а его дополнение* $\overline{\mathbb{K}}$ *замкнуто относительно УП.*

В этой теореме пункт **(б)** не получается «симметризацией» пункта **(а)**, ибо лемма 7.3 к моделям Крипке не применима; его приходится доказывать отдельно.

*Доказательство.* **(a)** Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Докажем $\Leftarrow$. Изоморфизм является частным случаем сюръективных бисимуляций. Значит $\mathbb{K}$ замкнут относительно изоморфизма. По (второй) теореме Кейслера, $\mathbb{K}$ элементарен. Тогда по Лемме 11.20 $\mathbb{K}$ модально определим.

**(b)** ($\Rightarrow$) Пусть $\mathbb{K}$ задается одной модальной формулой $A$. Замкнутость класса $\mathbb{K}$ относительно $\uplus$, сюръективных $\simeq$ и УП установлена в пункте (a). Далее, поскольку $\mathbb{K}$ задается одной замкнутой формулой первого порядка $\forall x\, A^*(x)$, то его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ тоже задается одной замкнутой формулой первого порядка: $\neg\forall x\, A^*(x)$. Значит, $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно УП.

($\Leftarrow$) Пусть выполнены условия на классы $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$. Согласно пункту (a), класс $\mathbb{K}$ модально определим: $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$, где $\Gamma \subseteq \mathbf{ML}$. Заметим, что класс $\mathbb{K}$ (а значит и $\overline{\mathbb{K}}$) замкнут относительно изоморфизма, а также $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуты относительно УП. По теореме 11.2, класс $\mathbb{K}$ задается замкнутой формулой первого порядка $\alpha$. Таким образом, $\alpha$ эквивалентна множеству модальных формул $\Gamma$. По лемме 6.14 она эквивалентна одной модальной формуле $A$, которая, таким образом, и задает класс $\mathbb{K}$. □

### Слабые критерии для глобального случая

В доказательстве леммы 11.20 можно б.о.о. считать, что $N$ порождена точкой $b$. Тогда из $(N,b) \equiv_{\mathbf{ML}} (M,a)$ следует $N \equiv_{\mathbf{ML}} M$. И даже не требовалось бы считать, что $M$ модально насыщенна. Значит, если бы в условии леммы было сказано (в правой части эквивалентности), что $\mathbb{K}$ замкнут относительно $\equiv_{\mathbf{ML}}$, то из $N \in \mathbb{K}$ мы бы сразу получили $M \in \mathbb{K}$ и этим завершили доказательство.

**Лемма 11.22.** *Элементарный класс моделей $\mathbb{K}$ модально определим $\iff$ он замкнут относительно несвязных сумм ($\uplus$), сюръективных бисимуляций ($\simeq$:) и модальной эквивалентности ($\equiv_{\mathbf{ML}}$).*

Это не совсем аналог «слабых» критериев, получавшихся в локальном случае: здесь в формулировке участвует и структурное отношение ($\simeq$), и языковое ($\equiv_{\mathbf{ML}}$). Можно ли от первого избавиться?

Аналогичное ослабление пункта (а) теоремы 11.21 даёт такой результат (пункт (б) прежний):

**Теорема 11.23** (Критерий' модальной определимости класса моделей Крипке)**.**
*Пусть $\mathbb{K}$ — класс моделей Крипке. Тогда:*

*$\mathbb{K}$ модально определим $\iff$ $\mathbb{K}$ замкнут относительно несвязных сумм ($\uplus$), сюръективных бисимуляций ($\simeq$:), модальной эквивалентности ($\equiv_{\mathbf{ML}}$) и УП.*

Замкнутость относительно сюръективных бисимуляций ($\simeq$:) равносильна замкнутости относительно двух отношений: взятия порожденной подмодели ($\hookrightarrow$) и тотальных бисимуляций (:$\simeq$:). Замкнутость относительно тотальных бисимуляций уже вытекает из замкнутости относительно $\equiv_{\mathbf{ML}}$, поэтому ее можно опустить — и получатся такие результаты:

**Лемма 11.24.** *Элементарный класс моделей $\mathbb{K}$ модально определим $\iff$ он замкнут относительно несвязных сумм ($\uplus$), порожденных подмоделей ($\hookrightarrow$) и модальной эквивалентности ($\equiv_{\mathbf{ML}}$).*

**Теорема 11.25** (Критерий" модальной определимости класса моделей Крипке)**.**
*Пусть $\mathbb{K}$ — класс моделей Крипке. Тогда:*

*$\mathbb{K}$ модально определим $\iff$ $\mathbb{K}$ замкнут относительно несвязных сумм ($\uplus$), порожденных подмоделей ($\hookrightarrow$), модальной эквивалентности ($\equiv_{\mathbf{ML}}$) и УП.*

---

Если класс моделей $\mathbb{K}$ модально определим, то
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно модальной эквивалентности $\equiv_{\mathbf{ML}}$;
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно сюръективных бисимуляций (или «бисимуляционных образов»);
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно порожденных подмоделей;
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно несвязных сумм;
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно p-морфных образов;
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно ультрапроизведений;
– $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно ультрастепеней;
– $\mathbb{K}$ замкнут относительно ультра-расширений;
– $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно ультра-расширений.

Если класс моделей $\mathbb{K}$ определим одной модальной формулой, то, помимо вышеперечисленного,
– $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно ультрапроизведений.

Наша задача — найти из перечисленных *необходимых* условий те, которых *достаточно.*

## 11.4 Сводка результатов

Приведем сводные таблицы результатов о модальной определимости классов (отмеченных) моделей Крипке — см. на обороте. Они формулируются для трех ситуаций: 1) для произвольных классов; 2) для классов, определимых множеством формул первого порядка; 3) и для классов, определимых одной формулой первого порядка.[29] В каждом случае нас интересует критерий определимости такого класса одной модальной формулой или множеством модальных формул. Для краткости будем писать:
– $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}$ — означает «класс $\mathbb{K}$ определим одной формулой первого порядка»;
– $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}^\infty$ — означает «класс $\mathbb{K}$ определим множеством формул первого порядка»;
– аналогично $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ и $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$.

В обоих таблицах (для классов отмеченных моделей и для классов моделей) последние две строчки эквивалентны согласно простой лемме 6.14. В первой таблице (для отмеченных моделей) из первой строки следуют все предыдущие:

- Критерий для $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ получается из критерия для $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ по лемме 7.3:

$$\mathbb{K} \in \mathbf{ML} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty \text{ и } \overline{\mathbb{K}} \in \mathbf{ML}^\infty.$$

- Если $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}^\infty$, то автоматически $\mathbb{K}$ замкнут УП, а $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут УС (но не обязательно УП).
- Если же $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}$, то и $\overline{\mathbb{K}} \in \mathbf{FO}$, поэтому $\mathbb{K}$ и $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуты УП.
- Заметим, что последняя строка первой таблицы — это теорема ван Бентема (см. теорему 5.3).

Во второй таблице (для моделей) из первых двух строк получаются остальные 4 по тем же соображениям. Однако 2-я строка из 1-й не получается, ибо лемма 7.3 не применима к моделям Крипке; поэтому результат во 2-й строке нужно получать отдельно. Легко также привести свидетельство того, что в каждой из таблиц 3-я и 4-я строки не эквивалентны: класс (отмеченных) моделей, задаваемый множеством модальных формул $\{\Diamond\top, \Diamond\Diamond\top, \Diamond\Diamond\Diamond\top, \ldots\}$, не задается одной модальной формулой.

**Упражнение 11.26.** Объясните следующий парадокс. Доказанный в лемме 7.3 критерий конечной аксиоматизируемости

$$\mathbb{K} \in \mathbf{ML} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty \text{ и } \overline{\mathbb{K}} \in \mathbf{ML}^\infty.$$

справедлив для любого класса отмеченных моделей, в том числе для класса $\mathbb{K}$, задаваемого множеством формул первого порядка ($\mathbb{K} \in \mathbf{FO}^\infty$) или одной формулой первого порядка ($\mathbb{K} \in \mathbf{FO}$). Однако, если мы посмотрим на первую таблицу, то мы увидим следующее: 2-я строка действительно получается «симметризацией» 1-й строки; 6-я строка тоже является «симметризацией» 5-й строки; однако для 3-й и 4-й строк это почему-то не так: в 4-й строке появляется дополнительное условие «$\overline{\mathbb{K}}$ замкнут относительно УП», которого не было в 3-й строке. Почему нарушилась симметрия?

---

Мы также добавили таблицу, в которой критерии формулируются в терминах модальной эквивалентности $\equiv_{\mathbf{ML}}$ и которые доказываются гораздо проще — без леммы о манёвре, которая опирается на теорему Кейслера–Шелаха. В этой таблице (для отмеченных моделей) тоже из первой строки получаются все остальные.

---

**Задача 11.27.** Попытаться сформулировать вариации этих результатов в тех же направлениях, в каких мы формулировали вариации теоремы ван Бентема.

[29] Естественно, в случае классов моделей рассматриваются замкнутые формулы первого порядка, а в случае классов отмеченных моделей — формулы первого порядка с одной свободной переменной.

| Дано | Узнать | Условие на класс | | Ссылки |
|---|---|---|---|---|
| | | $\mathbb{K}$ замкнут | $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут | |
| $\mathbb{K}$ — **класс отмеченных моделей Крипке** | | | | |
| $\mathbb{K}$ — любой | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\simeq$ и УП | УС | de Rijke 1993 |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\simeq$ и УП | УП | лемма 7.3 |
| $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}^\infty$ | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\simeq$ | | из 1-й строки |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\simeq$ | УП | из 2-й строки |
| $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}$ | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\simeq$ | | из 1-й строки |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\simeq$ | | из 2-й строки |
| $\mathbb{K}$ — **класс моделей Крипке** | | | | |
| $\mathbb{K}$ — любой | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\uplus$ и сюр. $\simeq$ и УП | УС | de Rijke & Sturm 2001 |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\uplus$ и сюр. $\simeq$ и УП | УП | de Rijke & Sturm 2001 |
| $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}^\infty$ | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\uplus$ и сюр. $\simeq$ | | из 1-й строки |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\uplus$ и сюр. $\simeq$ | УП | из 2-й строки |
| $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}$ | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\uplus$ и сюр. $\simeq$ | | из 1-й строки |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\uplus$ и сюр. $\simeq$ | | из 2-й строки |

Таблица 1: Критерии модальной определимости классов (отмеченных) моделей Крипке.

| Дано | Узнать | Условие на класс | | Ссылки |
|---|---|---|---|---|
| | | $\mathbb{K}$ замкнут | $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут | |
| $\mathbb{K}$ — **класс отмеченных моделей Крипке** | | | | |
| $\mathbb{K}$ — любой | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\equiv_{\mathbf{ML}}$ и УП | | |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\equiv_{\mathbf{ML}}$ и УП | УП | лемма 7.3 |
| $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}^\infty$ | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\equiv_{\mathbf{ML}}$ | | из 1-й строки |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\equiv_{\mathbf{ML}}$ | УП | из 2-й строки |
| $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}$ | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\equiv_{\mathbf{ML}}$ | | из 1-й строки |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\equiv_{\mathbf{ML}}$ | | из 2-й строки |
| $\mathbb{K}$ — **класс моделей Крипке** | | | | |
| $\mathbb{K}$ — любой | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\uplus$, $\hookrightarrow$, $\equiv_{\mathbf{ML}}$, УП | | |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | | | |
| $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}^\infty$ | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\uplus$, $\hookrightarrow$, $\equiv_{\mathbf{ML}}$ | | |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | | | |
| $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}$ | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | | | |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | | | |

Таблица 2: Критерии модальной определимости классов (отмеченных) моделей в терминах $\equiv_{\mathbf{ML}}$.

# 12 «Чисто модальный» критерий модальной определимости

В предыдущих критериях модальной определимости фигурировали «не присущие модальной логике» операции, такие как ультрапроизведение и ультрастепень. Здесь будет приведен критерий, в котором участвуют чисто модальные операции. Важнейшая из них — ультра-расширение.

Взятие ультра-расширения модели является операцией, обладающей двумя свойствами:
– она из произвольной модели делает модально-насыщенную модель;
– новая модель модально эквивалентна прежней: $M \equiv_{\mathbf{ML}} M^{\mathfrak{ue}}$.

## 12.1 Критерий для моделей Крипке

Сначала мы переформулируем лемму 11.18, вместо ультрастепеней поставив ультра-расширения. Доказательство прежнее.

**Лемма 12.1.** *Для произвольного класса моделей Крипке $\mathbb{K}$ следующие условия эквивалентны:*

**(a)** $\mathbb{K}$ *модально определим, то есть* $\exists \Gamma \subseteq \mathbf{ML}$*:* $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\Gamma)$.
**(b)** $\mathbb{K} = \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K}))$.
**(c)** $\mathbb{K} \supseteq \mathsf{Models}(\mathsf{Theory}(\mathbb{K}))$.
**(d)** *для любой модели* $M$ $\;(M \models \mathbb{K} \;\Rightarrow\; M \in \mathbb{K})$.

*Если* $\overline{\mathbb{K}}$ *замкнут относительно ультра-расширений, то достаточно модально насыщенных моделей:*

**(e)** *для любой модально насыщенной модели* $M$ $\;(M \models \mathbb{K} \;\Rightarrow\; M \in \mathbb{K})$.

*Если кроме того* $\mathbb{K}$ *замкнут относительно несвязных сумм и сюръективных бисимуляций, то*

**(f)** *для любой корневой модально насыщенной модели* $M$ $\;(M \models \mathbb{K} \;\Rightarrow\; M \in \mathbb{K})$.

Далее идет ключевая лемма, ибо компактность является центральным инструментом для доказательства критериев определимости.

**Лемма 12.2.** *Класс моделей* $\mathbb{K}$ *замкнут относительно* $\uplus$ *и* $\mathfrak{ue}$ $\implies$ $\mathbb{K}$ *модально компактен.*

*Доказательство.* Пусть $\Gamma$ — бесконечное множество модальных формул. Рассмотрим $I = \{i \subseteq \Gamma \mid i \text{ конечное}\}$. Пусть каждое конечное подмножество множества $\Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$. Это значит, что $\forall i \in I$ $\exists M_i \in \mathbb{K}$ $\exists a_i \in M_i$: $M_i, a_i \models i$. Покажем, что всё множество $\Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$.

Положим $N := \biguplus_{i \in I} M_i$. Тогда $N \in \mathbb{K}$ и $N^{\mathfrak{ue}} \in \mathbb{K}$. Докажем, что $\Gamma$ выполнимо в модели $N^{\mathfrak{ue}}$. Для этого нам надо потроить некоторый ультрафильтр $u$ над $N$.

Напомним, что если $A$ — формула, то мы обозначаем $\|A\|_N = \{b \in N \mid N, b \models A\}$.

Семейство $S = \{\, \|A\|_N \mid A \in \Gamma \,\} \subseteq 2^N$ центрировано: для любых $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$, $n \geqslant 1$, имеем

$$\|A_1\|_N \cap \ldots \cap \|A_n\|_N \;=\; \|A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\|_N \neq \varnothing,$$

поскольку взяв $i := \{A_1, \ldots, A_n\}$, мы имеем $M_i, a_i \models i$, значит, $M_i, a_i \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, и по определению несвязной суммы $N, (a_i, i) \models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, то есть $(a_i, i) \in \|A_1 \wedge \ldots \wedge A_n\|_N$.

Поэтому $S$ содержится в некотором ультрафильтре $u$ над $N$, то есть $u \in N^{\mathfrak{ue}}$. Покажем, что $N^{\mathfrak{ue}}, u \models \Gamma$. Для этого возьмем любую формулу $A \in \Gamma$. Имеем $\|A\|_N \in S \subseteq u$. Поэтому $N^{\mathfrak{ue}}, u \models A$ (по основной теореме об ультра-расширении). $\square$

**Замечание 12.3.** Мы могли бы вести доказательство этой леммы подобно доказательствам аналогичных лемм ранее. Для каждой формулы $A \in \Gamma$ рассматриваем множество $X_A = \{i \in I \mid A \in i\}$. Но нам нужно построить ультрафильтр не над $I$, а над $N$. Вспомним, что для каждого $i \in I$ была выбрана точка $a_i \in M_i$. Каждому элементу $i \in I$ естественным образом соответствует точка из несвязной суммы $(a_i, i) \in N$. При этом соответствии множествам $X_A$ отвечает множество $X'_A = \{(a_i, i) \mid A \in i \in I\} \subseteq N$. Как и прежде, семейство таких множеств $S = \{X'_A \mid A \in \Gamma\}$ центрировано, поскольку пересечение $X'_{A_1} \cap \ldots \cap X'_{A_n}$ содержит хотя бы точку $(a_i, i)$ для $i := \{A_1, \ldots, A_n\}$. Значит, семейство $S$ содержится в некотором ультрафильтре: $S \subseteq u \in N^{\mathfrak{ue}}$.

Заметим, что $X'_A \subseteq \|A\|_N$. Действительно, если $(a_i, i) \in X'_A$, то $A \in i \in I$, поэтому $M_i, a_i \models A$ (ибо $M_i, a_i \models i$ и $A \in i$), значит, по определению несвязной суммы, $N, (a_i, i) \models A$ и тем самым $(a_i, i) \in \|A\|_N$.

Наконец, чтобы доказать $N^{\mathfrak{ue}}, u \models \Gamma$, опять берем любую формулу $A \in \Gamma$. Поскольку $X'_A \in S \subseteq u$, мы получаем $\|A\|_N \in u$ и таким образом $N^{\mathfrak{ue}}, u \models A$.

Это доказательство чуть длиннее, но зато здесь мы в ультрафильтр кладем меньшие множества $X'_A$ вместо $\|A\|_N$ (что «сильнее», то есть потенциально позволит доказать большее).

Доказательство основной теоремы практически дословно повторяет прежнее.

**Теорема 12.4** (Venema,[30] 1999)**.** *Класс моделей* $\mathbb{K}$ *модально определим* $\iff$ $\mathbb{K}$ *замкнут относительно несвязных сумм* ($\uplus$)*, сюръективных бисимуляций* ($\simeq$:) *и ультра-расширений* ($\mathfrak{ue}$)*, а его дополнение* $\overline{\mathbb{K}}$ *замкнуто относительно ультра-расширений* ($\mathfrak{ue}$)*.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Очевидно. ($\Leftarrow$) Согласно лемме 12.1 (в которой использована замкнутость класса $\mathbb{K}$ относительно несвязных сумм ($\uplus$), сюръективных бисимуляций ($\simeq$:) и замкнутость его дополнения $\overline{\mathbb{K}}$ относительно ультра-расширений ($\mathfrak{ue}$)), возьмем произвольную корневую модально насыщенную модель $M$, то есть $M = M_a$, $a \in M$, такую, что $M \models \mathbb{K}$. Надо доказать, что $M \in \mathbb{K}$. Рассмотрим модальную теорию ее корня: $T := \mathsf{Theory}(M, a)$. Поскольку множество формул $T$ выполнимо в $M$, а также $M \models \mathbb{K}$ и (согласно ключевой лемме 12.2) класс $\mathbb{K}$ компактен, то $T$ выполнимо в $\mathbb{K}$, то есть $\exists N \in \mathbb{K}$ $\exists b \in N$: $N, b \models T$. Возьмем ультра-расширение этой модели (которое тоже лежит в $\mathbb{K}$ ввиду замкнутости $\mathbb{K}$ относительно $\mathfrak{ue}$), получим: $(N, b)^{\mathfrak{ue}} \models T$. Значит, $(N, b)^{\mathfrak{ue}} \equiv_{\mathbf{ML}} (M, a)$. Но обе модели модально насыщенны, поэтому модальная эквивалентность между ними равносильна бисимуляции: $(N, b)^{\mathfrak{ue}} \simeq (M, a)$. Наконец, поскольку $M$ порождена точкой $a$, то эта бисимуляция сюръективна. Значит, из $N^{\mathfrak{ue}} \in \mathbb{K}$ мы заключаем $M \in \mathbb{K}$, что и требовалось. $\square$

**Проблема:** «Чисто модальный» критерий определимости класса моделей одной модальной формулой.

## 12.2 Критерий для отмеченных моделей Крипке

Для получения аналогичного результата для классов отмеченных моделей Venema предлагает использовать операцию, имеющую некоторое сходство с ультрапроизведением.

**Определение 12.5.** *Ультрасумма* семейства отмеченных моделей $(M_i, a_i)_{i \in I}$ — это любая отмеченная модель вида $(N^{\mathfrak{ue}}, u)$, где $N = \biguplus_{i \in I} M_i$, (то есть сама модель — одна и та же; различие может быть лишь в отмеченной точке), а $u$ — любой ультрафильтр над $N$, имеющий в качестве элементов все ко-конечные подмножества множества $I^* = \{(a_i, i) \mid i \in I\} \subseteq N$.

Почему нужно брать именно такие ультрафильтры $u$, показывает следующая лемма о сохранении.

**Лемма 12.6.** *Взятие ультрасуммы отмеченных моделей сохраняет истинность модальных формул.*

*Доказательство.* Пусть $\forall i \in I$ имеем $M_i, a_i \models A$. Возьмем их ультрасумму $(N^{\mathfrak{ue}}, u)$, где $N = \biguplus_{i \in I} M_i$. Имеем:

$$I^* \;=\; \{(a_i, i) \mid i \in I\} \;\subseteq\; \{(b, i) \mid i \in I,\; b \in M_i,\; M_i, b \models A\} \;=\; \|A\|_N.$$

$I^*$ — ко-конечное подмножество себя. Значит, $I^* \in u$, то и $\|A\|_N \in u$, откуда следует $N^{\mathfrak{ue}}, u \models A$. $\square$

Усилим эту лемму — не обязательно требовать, чтобы формула была верна во *всех* моделях.

**Лемма 12.7.** *Если модальная формула $A$ истинна в ко-конечном множестве моделей $(M_i, a_i)$, то она истинна и в их ультрасумме.*

*Доказательство.* Вместо $I^*$ рассмотреть $\{(a_i, i) \mid M_i, a_i \models A\}$ и провести то же рассуждение. $\square$

[30] Yde Venema. *Model definability, purely modal*, In Jelle Gerbrandy and Maarten Marx and Maarten de Rijke and Yde Venema, eds, *JFAK: Essays dedicated to Johan van Benthem on the occasion of his 50th birthday (CD-ROM)*, Amsterdam University Press, 1999, `http://www.illc.uva.nl/j50/contribs/venema/venema.pdf`

Вспомним, что если класс структур — (отмеченных) моделей или (отмеченных) шкал — замкнут относительно ультрапроизведений, то он компактен. Следующая лемма дает аналогичный результат для ультрасумм, что и показывает сходство этой операции с ультрапроизведением.

**Лемма 12.8** (Компактность)**.** *Если класс отмеченных моделей $\mathbb{K}$ замкнут относительно ультрасумм, то он компактен.*

*Доказательство.* Пусть $\Gamma = \{A_0, A_1, \ldots\}$ — бесконечное множество модальных формул и каждое его конечное подмножество выполнимо в $\mathbb{K}$. В частности, каждая формула $B_n = A_0 \wedge \ldots \wedge A_n$ выполнима в $\mathbb{K}$, то есть $\forall n \geqslant 0\ \exists (M_n, a_n) \in \mathbb{K}$: $M_n, a_n \models B_n$. Возьмем (какую-либо) их ультрасумму $(N^{\mathfrak{ue}}, u)$, где $N = \biguplus_{n \geqslant 0} M_n$. В силу замкнутости $\mathbb{K}$ относительно ультрасумм $(N^{\mathfrak{ue}}, u) \in \mathbb{K}$. Заметим, что каждая формула $A_n \in \Gamma$ истинна в ко-конечном множестве отмеченных моделей $(M_n, a_n)$. По лемме 12.7 каждая $A_n$ истинна в ультрасумме: $N^{\mathfrak{ue}}, u \models A_n$. Тем самым $N^{\mathfrak{ue}}, u \models \Gamma$ и, значит, $\Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$. □

Заметим, что в доказательстве предыдущей леммы множество $\Gamma$ оказывалось выполнимым в точке *ультра-расширения* некоторой модели, то есть в точке некоторой *модально насыщенной* модели (см. задачу в конце курса). Это будет важно нам в будущем. Доказательство основной теоремы получается дословным повторением прежних доказательств.

**Теорема 12.9.** *Пусть $\mathbb{K}$ — произвольный класс отмеченных моделей. Тогда:*
**(a)** *$\mathbb{K}$ модально определим $\iff$ $\mathbb{K}$ замкнут относительно бисимуляций ($\simeq$) и ультрасумм $(\uplus)^{\mathfrak{ue}}$, а его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуто относительно ультра-расширений ($\mathfrak{ue}$).*
**(b)** *$\mathbb{K}$ определим одной модальной формулой $\iff$ $\mathbb{K}$ замкнут относительно бисимуляций ($\simeq$) и ультрасумм $(\uplus)^{\mathfrak{ue}}$, а его дополнение $\overline{\mathbb{K}}$ замкнуто относительно ультрасумм $(\uplus)^{\mathfrak{ue}}$.*

*Доказательство.* Пункт (b) получается «симметризацией» пункта (a), то есть по лемме 7.3. Докажем пункт (a). Мы воспользуемся аналогом леммы 12.1.

Итак, пусть $(M, a) \models \mathbb{K}$, где $M$ — модально насыщенная модель. Поскольку класс $\mathbb{K}$ компактен (согласно лемме 12.8), то теория $T := \mathsf{Theory}(M, a)$ выполнима в $\mathbb{K}$, то есть $\exists (N, b) \in \mathbb{K}$: $N, b \models T$. Тем самым $(N, b) \models (M, a)$, а значит, $(N, b) \equiv_{\mathbf{ML}} (M, a)$. Вспомним, что в лемме о компактности непременно получалось, что $N$ — модально насыщенная модель (и $M$ — тоже). Для таких моделей модальная эквивалентность равносильна бисимуляции. Таким образом, $(N, b) \simeq (M, a)$. Наконец, ввиду замкнутости $\mathbb{K}$ относительно бисимуляций, мы получаем $(M, a) \in \mathbb{K}$, что и требовалось. □

## 12.3 Сводка результатов

Подведем итог «чисто модальным» критериям — см. таблицу 3. Здесь естественно приводить лишь «абсолютные» критерии, так как ограничиваться элементарными классами $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}^\infty$ или $\mathbb{K} \in \mathbf{FO}$ не имеет смысла — в формулировках критериев нет «первопорядковых» условий, которые бы автоматически удалялось. Быть может, имеет смысл найти «относительные» критерии, ограничиваясь $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ и давая критерий для $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$?

Обозначения: $\mathfrak{ue}$ — ультра-расширение; $\uplus^{\mathfrak{ue}}$ — ультра-сумма отмеченных моделей.

| Дано | Узнать | Условие на класс | | Ссылки |
|---|---|---|---|---|
| | | $\mathbb{K}$ замкнут | $\overline{\mathbb{K}}$ замкнут | |
| **$\mathbb{K}$ — класс отмеченных моделей Крипке** | | | | |
| $\mathbb{K}$ — любой | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\simeq$ и $\uplus^{\mathfrak{ue}}$ | $\mathfrak{ue}$ | Venema 1999 |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | $\simeq$ и $\uplus^{\mathfrak{ue}}$ | $\uplus^{\mathfrak{ue}}$ | Лемма 7.3 |
| **$\mathbb{K}$ — класс моделей Крипке** | | | | |
| $\mathbb{K}$ — любой | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}^\infty$ | $\uplus$ и сюр. $\simeq$ и $\mathfrak{ue}$ | $\mathfrak{ue}$ | Venema 1999 |
| | $\mathbb{K} \in \mathbf{ML}$ | ??? | ??? | |

Таблица 3: «Чистые» критерии модальной определимости классов (отмеченных) моделей Крипке.

## 13 Разбивка по лекциям 2015–2016

**Лекция № 01 (2015.09.25)** Первая половина лекции: Понятия синтаксиса и семантики. Пропозициональные языки. Синтаксис и семантика модальных языков.

Вторая половина лекции: два языка, на которых можно говорить о шкалах — модальный язык и язык первого порядка. Классы шкал, определимые модальной формулой, формулой первого порядка. Примеры того, что эти два свойства независимы. Вопрос: а если задавать класс бесконечным множеством формул?

**Лекция № 02 (2015.10.02)** Свойства бинарных отношений. Выразимость свойств транзитивности, рефлексивности, симметричности, плотности в модальном языке. $(i, j, m, n)$-свойства.

**Лекция № 03 (2015.10.09)** Свойства, не определимые в языке первого порядка. Нётеровы порядки и формула Гёделя-Лёба. Общезначимость формулы Даммета на натуральных числах, её опровержимость на действительных.

**Лекция № 04 (2015.10.16)** Операции над моделями и классами: несвязная сумма моделей, порожденная подмодель, модальный морфизм (или p-морфизм). Теоремы о сохранении истинности (или общезначимости) модальных формул относительно данных операций.

Примеры модально определимых и неопределимых классов шкал: рефлексивность, симметричность, транзитивность; иррефлексивность, асимметричность, антисимметричность; $R = \varnothing$, $R \neq \varnothing$, $R = W \times W$, $R \neq W \times W$; $W$ конечное, $W$ бесконечное, $|W| < 7$, $|W| > 17$; $R = =$, $R \neq =$, $R = \neq$, $R \neq \neq$, $\forall y \exists x (xRy)$.

**Лекция № 05 (2015.10.23)** Модальные логики как исчисления. Понятие нормальной логики. Теорема корректности для семантики Крипке.

Свойства максимальных непротиворечивых множеств.

**Лекция № 06 (2015.10.30)** Теорема о канонической модели. Крипке-полнота наименьшей логики.

**Лекция № 07 (2015.11.06)** Каноничная логика. Из каноничности следует полнота. Сильно полная логика. Из каноничности следует сильная полнота. Примеры канонических логик: логики с аксиомами, соответствующими рефлексивности, транзитивности, свойству Чёрча–Россера. Логика Гёделя–Лёба не каноническая и даже не сильно полная, хотя полная (последне без док-ва).

Элементарный класс шкал. Элементарная логика. Теорема Файна: из элементарности следует каноничность (без док-ва). Теорема о том, что обратная импликация не верна (без док-ва).

**Лекция № 08 (2015.11.13)** Формула Маккинси. Характеризация шкал логики **K.1**.

Элементарность шкал логики **S4.1**. Лемма о двух конфинальных подмножествах.

Пример неполной по Крипке бимодальной логики.

**Лекция № 09 (2015.11.20)** Понятие модальной алгебры. Формулы как алгебраические выражения. Модальные логики как эквациональные теории. Алгебра Линденбаума. Алгебраическая полнота нормальных логик.

**Лекция № 10 (2015.11.27)** Стандартный перевод. Свойства компактности и Лёвенгейма–Сколема для модального языка (для локальной и глобальной выполнимости). «Экономный» стандартный перевод; следствие о разрешимости, верхней оценки сложности, финитной аппроксимируемости модального языка. Модально определимые классы моделей и отмеченных моделей.

**Лекция № 11 (2015.12.04)** Бисимуляция. Модальная эквивалентность бисимулирующих миров. Отсутствие обратной импликации для моделей бесконечного ветвления (пример). Обратная импликация для конечных моделей $\subset$ моделей конечного ветвления $\subset$ модально насыщенных моделей.

**Лекция № 12 (2015.12.11)** Теорема ван Бентема: ML = FOL / bisimulation.

**Лекция № 13 (2015.12.18)** Многочисленные вариации теоремы ван Бентема.

**Лекция № 14 (2016.02.19)** Критерии определимости: общая постановка, примеры (теорема Биркгофа, теорема Кейслера «критерий аксиоматизируемости»). Доказательство в общем случае критерия конечной аксиоматизируемости.

Фильтры и ультрафильтры.

**Лекция № 15 (2016.02.26)** Ультрапроизведения. Теорема Лося. Следствия для модального языка.

Счетно-неполные ультрафильтры (четыре эквивалентных определения).[31]

**Лекция № 16 (2016.03.04)** Специальная конструкция счетно-неполного ультрафильтра.
Лемма о компактности всякого класса, замкнутого относительно ультрапроизведений.
Лемма о переносе выполнимости — для (отмеченных) моделей и (отмеченных) шкал.[32]
Сводка критериев определимости классов моделей первого порядка и отмеченных моделей Крипке. Доказательство критерия модальной определимости класса отмеченных моделей Крипке.

**Лекция № 17 (2016.03.11)** Ультра-расширение модели Крипке. Основная теорема. Анти-сохранение общезначимости модальной формулы при ультра-расширении. Пример неопределимого класса шкал $\exists y\,(x\,R\,y \wedge y\,R\,y)$. Примеры ультра-расширений шкал: $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$.

**Лекция № 18 (2016.03.25)** Лемма о накрытии (всякая шкала есть p-морфный образ несвязной суммы своих порожденных точкой подшкал). Соотношение между классами шкал: элементарными, замкнутыми относительно ультрапроизведений, замкнутыми относительно ультрастепеней, модально компактными. Теорема Гольдблатта–Томасона: план доказательства.

**Лекция № 19 (2016.04.01)** Топологическая семантика модальных логик. Александровские пространства и предпорядки. Теорема о топологической полноте логики $S4$.

Окрестностная семантика модальных логик. Правило эквивалентной замены. Понятие окрестностной логики. Окрестностные шкалы нормальных логик. Окрестностные логики как теории булевых алгебр с произвольными операторами. Полнота наименьшей окрестностной логики (без доказательства).

**Лекция № 20 (2016.04.08)** Полимодальные языки и семантика Крипке. Аксиомы обратной (временно́й) модальности. Модальная аксиома дедекиндовости.

Нормальные полимодальные логики. Теорема о канонической модели. Непротиворечивость и консервативность временно́го расширения.

**Лекция № 21 (2016.04.15)** Сохранение каноничности формул при расширении логики. Непротиворечивость и консервативность расширения с универсальной модальностью.

**Лекция № 22 (2016.04.22)** Сохранение каноничности формул при расширении языка. Каноничность соединения двух канонических логик. Каноничность временно́го расширения и расширения с универсальной модальностью.

---

[31] Счетно-неполные ультрафильтры нам в последующих лекциях не пригодились. Если, конечно, не доказывать лемму о манёвре или лемму об $\omega$-насыщенных моделях первого порядка (для счетной сигнатуры). Их доказательство см., например, в документе про теорему Гольдблатта–Томасона, раздел 8 «Насыщенные структуры первого порядка».

[32] На лекции этой леммы (для моделей) не было, а она была «вшита» в доказательство критерия. Позже, для шкал, лемма о переносе была доказана. В данных конспектах все леммы о переносе были собраны в единую лемму.

# 14 Задачник по модальной логике

1. В следующих задачах докажите, что указанная модальная формула задает класс шкал, заданный указанным свойством. Более того, установите, что это же имеет место локально — то есть для отмеченных шкал.

   (a) Аксиома Лёба $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$; отношение $R$ транзитивно и не имеет бесконечных цепей $x_0 R x_1 R x_2 R \ldots$ (где точки $x_i$ не обязательно попарно различны).
   (b) Аксиома Гжегорчика — рефлексивный аналог аксомы Лёба.
   (c) Аксиома .3 — линейность порожденной подшкалы (при наличии рефлексивности и транзитивности?).
   (d) Формула $Alt_n$; ветвление $\leqslant n$.
   (e) Формула Собочинского $p \to \Box(\Diamond p \to p)$ означает: $\forall x, y, z\ (xRyRz \Rightarrow (x = y \vee y = z))$.

2. Формула $\Diamond\Box p \to \big(\Box(\Box p \to p) \to \Box p\big)$ общезначима на шкале $(\mathbb{Z}, <)$, но не на шкале $(\mathbb{Q}, <)$.

**Язык временной логики**

3. Докажите, что формула $\diamondminus p \to \Box\diamondminus p$ задает класс всех транзитивных шкал.

4. Докажите, что формула $p \wedge \boxminus p \to \Diamond\boxminus p$ общезначима на шкале $\iff$ каждая точка имеет непосредственного последователя.

5. Введем обозначение (в языке $\{\Box, \boxminus\}$): $[\forall]A := \boxminus A \wedge A \wedge \Box A$. Пусть $F = (W, <)$ — строгий линейный порядок (то есть отношение $<$ иррефлексивное, транзитивное и любые два различных элемента сравнимы). Докажите, что следующая формула

$$[\forall](\boxminus p \to \Diamond\boxminus p) \ \to \ (\boxminus p \to \Box p)$$

общезначима на шкале $F \iff F$ — полный порядок (любое сечение имеет промежуточную точку). Последнее означает, что для любого сечения — то есть непересекающегося разбиения $W = X \cup Y$ такого, что $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ (x < y)$ — существует точка $z \in W$, такая, что $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant z \leqslant y$.

**Полные логики**

Здесь всюду под логикой понимается нормальная логика.

6. Докажите, что если логика полна относительно какого-либо класса шкал, то она полна относительно некоторого не более чем счетного *множества* шкал. Используя это, докажите, что тогда она полна относительно некоторой одной шкалы.[33]

7. Докажите, что всякая логика общезначима хотя бы на одной шкале.

8. Докажите, что всякая логика содержится в некоторой полной логике.

9. Докажите, что всякая логика $L$ общезначима либо на иррефлексивной, либо на рефлексивной одноточечной шкале.

10. Всякая логика содержится в логике **Triv**, задаваемой аксиомой $\Box p \leftrightarrow p$, или в логике $L \subseteq$ **Ver**, задаваемой аксиомой $\Box p \leftrightarrow \top$.

11. Аксиоматизируйте логику **Triv** $\cap$ **Ver**. Логикой какой шкалы она является?

12. Если модальная формула истинна в некоторой конечной рефлексивной транзитивной модели, то она истинна в некоторой конечной модели с отношением эквивалентности.

    В последующих задачах *кластером* называется шкала вида $F = (W, W \times W)$.

[33]Насколько больших шкал хватит для того, чтобы задать каждую полную логику, это интересный вопрос. Им занимался Крахт. Оказалось, не хватит даже недостижимых кардиналов!

13. Пусть $F_n$ — кластер размера $n$. Какое включение между логиками $\mathsf{Logic}(F_m)$ и $\mathsf{Logic}(F_n)$ имеет место при $m < n$? Строгое ли оно?

    Какова логика всех конечных кластеров? счетного кластера? бесконечного кластера?

14. Рассмотрим «ежа», то есть шкалу $E_n = (W, R)$, где $W = \{0, 1, \ldots, n\}$, $R$ рефлексивно и $0Ri$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Какое включение между логиками $\mathsf{Logic}(E_m)$ и $\mathsf{Logic}(E_n)$ имеет место при $m < n$? Строгое ли оно?

    Какова логика всех конечных ежей? счетного ежа? произвольного бесконечного ежа?

15. Докажите, что формула Собочинского $p \to \Box(\Diamond p \to p)$ — каноническая. Как следствие, расширением этой формулой логики **K** полно по Крипке.

    **Теория моделей**

16. Докажите, что каноническая модель любой логики является модально насыщенной моделью.

17. Докажите, что ультра-расширение любой модели является модально насыщенной моделью.

18. Докажите, что ультра-расширение модели является модально компактным (то есть класс, состоящий из одной этой модели, модально компактен).

19. Пусть $M$ — корневая модель (то есть порождена одной точкой). Верно ли это же для $M^{\mathrm{ue}}$?

20. Докажите, что две отмеченные модели модально эквивалентны тогда и только тогда, когда их ультра-расширения (тоже отмеченные модели) бисимулируют.

21. Докажите, что ультрапроизведение шкал является p-морфным образом некоторой ультрастепени несвязной суммы этих шкал: $(\biguplus_{i\in I} F_i)^\Phi \twoheadrightarrow \prod_{i\in I}^\Phi F_i$. **Примечание.** Грубая аналогия: если раскрыть скобки в $(x_1 + \ldots + x_n)^n$, то одним из слагаемых будет $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.

22. Формула первого порядка $A(x)$ и модальная формула $\varphi$ эквивалентны друг другу на всех отмеченных моделях $\iff$ они эквивалентны друг другу на не более чем счетных отмеченных моделях. Аналогично для замкнутых формул.

23. Если формула первого порядка $A(x)$ эквивалентна некоторому множеству модальных формул $\Gamma$, то $A(x)$ эквивалентна некоторой модальной формуле.

24. Докажите, что для любого класса $\mathbb{K}$ (отмеченных моделей, или моделей, или отмеченных шкал, или шкал) следующие определения модальной компактности эквивалентны:
    – для каждого бесконечного множества формул $\Gamma$ (если каждое конечное подмножество $\Gamma' \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$, то и всё множество $\Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$);
    – для каждого бесконечного замкнутого относительно конъюнкции множества формул $\Gamma$ (если каждая формула $A \in \Gamma$ выполнима в $\mathbb{K}$, то и всё множество $\Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$).

25. Пусть семейство множеств $S \subseteq 2^I$ таково, что $\varnothing \notin S$ и $S$ замкнуто относительно конечных пересечений: $X, Y \in S \Rightarrow (X \cap Y) \in S$. Тогда $S$ центрировано (то есть пересечение всякого конечного числа множеств из $S$ непусто), и значит, содержится в некотором (ультра)фильтре.

26. Докажите, что модальное выражение $x\colon \Box p \to y\colon p$ общезначимо на шкале с двумя выделенными точками $(F, a, b) \iff a\,R\,b$.

27. Когда в шкале с тремя отмеченными точками $(F, a, b, c)$ общезначимо модальное выражение $(x\colon \Box p \vee y\colon \Box p) \to z\colon p$? А если вместо $\vee$ поставить $\wedge$?

28. В доказательстве факта, что всякая модель с конечным ветвлением является модально насыщенной (лемма 4.4), мы существенно опирались на то, что множество формул счетно. Что будет с этой леммой, если множество пропозициональных переменных сделать континуальным?

29. Докажите, что ультра-сумма семейства из нескольких копий одной и той же отмеченной модели, то есть $(M_i, a_i) = (M, a)$ для всех $i \in I$, бисимулирует с ультра-расширением $(M, a)^{\mathfrak{ue}}$.

    **Примечание.** Это аналог (хотя и не точный) того факта, что ультрастепень структуры — это (по определению) ультрапроизведение одинаковых структур.

    Как следствие, если класс отмеченных моделей $\mathbb{K}$ замкнут относительно бисимуляции и ультра-сумм, то он замкнут относительно ультра-расширений.