Модальная логика и ее приложения

Е.Е.Золин, И.Б. Шапировский
(годовой курс, 2014–2015)

Содержание

1 Синтаксис и семантика модальной логики

Синтаксис. *Модальные формулы* строятся из счетного числа переменных $\mathsf{Var} = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$, логических связок $\bot$ (ложь), $\to$ (импликация) и одноместной связки $\Box$ (*модальности необходимости*) согласно следующему синтаксису (где $p \in \mathsf{Var}$):

$$\varphi \ ::= \ \bot \ \mid \ p \ \mid \ (\varphi \to \psi) \ \mid \ \Box\varphi.$$

Читается это определение так: $\bot$ — формула; каждая переменная p — формула; если φ и ψ — формулы, то $(\varphi \to \psi)$ — формула; если φ — формула, то $\Box\varphi$ — формула; ничто другое формулой не является.

Остальные связки — $\top$ (истина), $\neg$ (отрицание), $\wedge$ (конъюнкция, «и»), $\vee$ (дизъюнкция, «или»), $\leftrightarrow$ (эквивалентность), $\Diamond$ (модальность возможности) — вводятся как сокращения (хотя можно было их явно ввести и в синтаксис формул). Например, $\neg\varphi := (\varphi \to \bot)$, $\top := \neg\bot$, $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$.

Упражнение. Выразите остальные связки: $\wedge, \vee, \leftrightarrow$.

Семантика. *Модель Крипке*[1] — это тройка $M = (W, R, V)$, где W — произвольное непустое множество, называемое *областью* или *носителем* данной модели; R — произвольное двуместное отношение на множестве W, то есть $R \subseteq W \times W$, называемое *отношением достижимости*; наконец, V — *оценка переменных*, то есть отображение (функция), сопоставляющая каждой переменной $p \in \mathsf{Var}$ произвольное подмножество $V(p) \subseteq W$; формально, оценка есть функция $V\colon \mathsf{Var} \to 2^W$, где 2^W обозначает множество всех подмножеств множества W.

Далее вводится понятие «модальная формула φ *истинна* в точке $a \in W$ модели M», оно обозначается[2] $M, a \models \varphi$ и определяется по индукции по построению формул:

$$\begin{array}{lcl}
M, a \not\models \bot & & \\
M, a \models p & \leftrightharpoons & a \in V(p) \\
M, a \models (\varphi \to \psi) & \leftrightharpoons & \big(M, a \models \varphi \ \Rightarrow \ M, a \models \psi\big) \\
M, a \models \Box\varphi & \leftrightharpoons & \forall b\,(\,a\,R\,b \ \Rightarrow \ M, b \models \varphi\,)
\end{array}$$

Если читать $a\,R\,b$ как «точка b является последователем точки a», то формула $\Box\varphi$ считается истинной в точке, если φ истинна во всех последователях этой точки. Убедитесь, что в силу наших обозначений $\Diamond$ через $\Box$, формула $\Diamond\varphi$ истинна в точке, если φ истинна в некотором последователе этой точки:

$$M, a \models \Diamond\varphi \quad \leftrightharpoons \quad \exists b\,(\,a\,R\,b \ \&\ M, b \models \varphi\,).$$

Формула φ считается *истинной в модели* M (обозначение: $M \models \varphi$), если φ истинна во всех точках модели M.

Заметим, что чтобы задать оценку V, достаточно указать, в каких точках истинны какие переменные, то есть задать отношение $a \models p$

Структуру $F = (W, R)$ называют *шкалой Крипке*. Фактически, это ориентированный граф, быть может, бесконечный. При этом говорят, что модель $M = (W, R, V)$ *основана* на шкале F. Формула φ считается *общезначимой на шкале* F (обозначение: $F \models \varphi$), если она истинна во всех моделях, основанных на этой шкале. Формула называется *общезначимой*, если она общезначима на всех шкалах.

Задача 1.1. (a) Формула $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ общезначима.
(b) На шкалах $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$ общезначимы одни и те же формулы.
(c) Формула $\Diamond\Box p \to \big(\Box(\Box p \to p) \to \Box p\big)$ общезначима на шкале $(\mathbb{Z}, <)$, но не на шкале $(\mathbb{Q}, <)$.
(d) Формула $\Box\Diamond\Box\Box p \to \Diamond\Diamond\Box\Diamond p$ общезначима на шкале $\Longleftrightarrow$ в шкале выполнено: $\forall x \exists y\, x\,R\,y$.
(e)** Общезначимость предыдущей формулы *в точке* шкалы не задается никаким условием первого порядка (с одной свободной переменной). Таким образом, эта формула глобально соответствует некоторой формуле первого порядка, а локально — не соответствует никакой формуле первого порядка.

[1] Мы будем часто опускать слово «Крипке» после слов «модель» и «шкала».
[2] Часто букву M в этом обозначении опускают, если ясно, о какой модели идет речь, и пишут просто $a \models \varphi$.

2 Операции на моделях и шкалах

Мы опишем несколько конструкций, позволяющих из одних моделей или шкал строить другие, но сохраняющих истинность модальных формул (в точке).

2.1 Непересекающееся объединение (или несвязная сумма)

Пусть $M_i = (W_i, R_i, V_i)$, где $i \in I$, — семейство моделей, «занумерованное» элементами множества I.

Определение 2.1 (Несвязная сумма). *Непересекающимся объединением* (или *несвязной суммой*) моделей M_i называется модель $M = \biguplus_{i\in I} M_i = (W, R, V)$, определяемая следующим образом:

1. $W = \{\, (i, a) \mid i \in I,\ a \in W_i \}$;
2. $(i, a)\, R\, (j, b) \ \leftrightharpoons\ i = j$ и $a\, R\, b$;
3. $M, (i, a) \models p \ \leftrightharpoons\ M_i, a \models p$.

Интуитивно, это означает, что мы взяли попарно непересекающиеся «копии» моделей M_i (ведь нам не известно, что сами W_i не пересекаются), оставив отношения и оценки переменных в каждой «копии» прежними. Несвязная сумма шкал $F = \biguplus_{i\in I} F_i$ определяется аналогично (нужно убрать пункт 3).

Лемма 2.2. *Пусть φ — произвольная модальная формула.*
Пусть $M = \biguplus_{i\in I} M_i$. Тогда:
(a) $M, (i, a) \models \varphi \iff M_i, a \models \varphi$ *(для каждого $i \in I$ и $a \in W_i$);*
(b) $M \models \varphi \iff M_i \models \varphi$ *для всех $i \in I$.*
Пусть $F = \biguplus_{i\in I} F_i$. Тогда:
(c) $F \models \varphi \iff F_i \models \varphi$ *для всех $i \in I$.*

Доказательство. **(a)** Доказательство проводится индукцией по построению формулы φ. Случай формулы $\bot$ очевиден; для переменной p утверждение верно по определению $\uplus$; случай импликации $\psi \to \psi'$ очевиден. Остается случай $\varphi = \Box\psi$. Имеем следующие эквивалентности (упражнение: обоснуйте их):

$$\begin{aligned} M, (i, a) \models \varphi &\iff \forall (j, b)\ \big((i, a)\, R\, (j, b) \ \Rightarrow\ M, (j, b) \models \varphi \big) \\ &\iff \forall (j, b)\ \big(i = j \ \&\ a\, R\, b \ \Rightarrow\ M_j, b \models \varphi \big) \\ &\iff \forall b \in W_i \big(a\, R\, b \ \Rightarrow\ M_i, b \models \varphi \big) \\ &\iff M_i, a \models \Box\psi. \end{aligned}$$

(b) Следует из (a) согласно закону логики: из $\forall x\, (A(x) \Leftrightarrow B(x))$ вытекает $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\, B(x)$.

(c) ($\Leftarrow$) Пусть $F_i \models \varphi$ для всех $i \in I$. Чтобы доказать $F \models \varphi$, возьмем любую модель $M = (F, V)$, основанную на F. По ней естественным образом строятся модели $M_i = (F_i, V_i)$ для каждого $i \in I$, а именно, полагаем $M_i, a \models p \leftrightharpoons M, (i, a) \models p$, для каждого элемента $a \in W_i$. Тогда легко видеть, что $M = \biguplus_{i\in I} M_i$. Но $M_i \models \varphi$ для всех i, значит, согласно (b), получаем $M \models \varphi$.

($\Rightarrow$) Пусть $F \models \varphi$. Чтобы доказать $F_i \models \varphi$ для всех $i \in I$, возьмем любые модели $M_i = (F_i, V_i)$, основанные на шкалах F_i. По ним построим оценку V на шкале F так: $(i, a) \models p \leftrightharpoons M_i, a \models p$. Получилась модель $M = (F, V)$. Очевидно, что $M = \biguplus_{i\in I} M_i$. Поскольку $M \models \varphi$, мы делаем вывод, что $M_i \models \varphi$, для каждого $i \in I$. $\Box$

2.2 Порожденная подмодель и подшкала

Пусть $M = (W, R, V)$ — модель, $a \in W$, $X \subseteq W$. Обозначим через $R(a)$ множество всех последователей точки a, через $R(X)$ множество всех последователей всех точек из X. Формально:

$$\begin{array}{lcl} R(a) & := & \{\, b \mid a\,R\,b \,\}; \\ R(X) & := & \{\, b \mid \exists a \in X\colon\ a\,R\,b \,\}. \end{array}$$

Ограничением отношения R на множество X называем отношение $R|_X := R \cap (X \times X)$, то есть:

$$R|_X \;:=\; \{\, (a, b) \mid a, b \in X \;\&\; a\,R\,b \,\}.$$

Определение 2.3 (**Порожденная подмодель).** Модель $M' = (W', R', V')$ называется *порожденной подмоделью* модели $M = (W, R, V)$, обозначение: $M' \hookrightarrow M$, если выполнены условия:

(1) $W' \subseteq W$; **(2)** $R' = R|_{W'}$; **(3)** $R(W') \subseteq W'$; **(4)** $V'(p) = V(p) \cap X$.

Пункт (3) означает, что из точек «маленького» множества (W') по стрелкам «большого» отношения (R) мы не можем выйти за пределы «маленького» множества. Его можно переписать в терминах точек модели следующим образом: если $a \in W'$ и $a\,R\,b$, то $b \in W'$. Пункт (4) означает, что оценка переменных в точках «маленькой» модели (M') — такая же, как в «большой» модели (M).

Определение порожденной подшкалы $F' \hookrightarrow F$ дается аналогично, опуская пункт (4).

Задача 2.4. **(a)** В шкале $(\mathbb{Z}, <)$ порожденные подшкалы имеют вид $(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant n_0\}, <)$, где $n_0 \in \mathbb{Z}$. **(b)** В шкале $(\mathbb{Q}, <)$ порожденные подшкалы имеют вид $(\{a \in \mathbb{Q} \mid a > r\}, <)$, где $r \in \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$, а не $\mathbb{Q}$.)

Если в определении 2.3 мы имеем множество W' состоит из некоторой точки a, всех ее последователей, всех последователей ее последователей и т.д.:

$$W' = \{a\} \cup R(a) \cup R(R(a)) \cup \ldots,$$

то модель M' в этом случае называют *подмоделью, порожденной точкой* a. Если множество W' состоит из всех точек множества $X \subseteq W$, всех их последователей, всех последователей их последователей и т.д.:

$$W' = X \cup R(X) \cup R(R(X)) \cup \ldots,$$

то модель M' в этом случае называют *подмоделью, порожденной подмножеством* X. (Проверьте, что в обоих случаях пункт (3) определения выполняется автоматически.) Как следует из предыдущей задачи, всякая порожденная подшкала шкалы $(\mathbb{Z}, <)$ порождена некоторой точкой, тогда как для шкалы $(\mathbb{Q}, <)$ это уже неверно (приведите контрпример).

Лемма 2.5. *Пусть φ — произвольная модальная формула.*
Пусть $M' \hookrightarrow M$. Тогда:
(a) $M, a \models \varphi \iff M', a \models \varphi \quad (\forall a \in W')$;
(b) $M \models \varphi \implies M' \models \varphi$.
Пусть $F' \hookrightarrow F$. Тогда:
(c) $F \models \varphi \implies F' \models \varphi$.

Доказательство. Импликации (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) доказываются легко. Остается доказать пункт (a). Разбираем лишь случай $\varphi = \Box\psi$. Имеем цепочку эквивалентностей (где $a \in W'$):

$$\begin{array}{rcl} M, a \models \Box\varphi & \iff & \forall b \in W \left(a\,R\,b \;\Rightarrow\; M, b \models \psi \right) \\ & \iff & \forall b \in W' \left(a\,R'\,b \;\Rightarrow\; M', b \models \psi \right) \\ & \iff & M', a \models \Box\varphi. \end{array}$$

Здесь вторая эквивалентность обоснована тем, что из $a \in W'$ и $a\,R\,b$ следует, что $b \in W'$, поэтому $\forall b \in W$ можно заменить на $\forall b \in W'$ (для остальных b посылка импликации ложна), и более того, верно не только $a\,R\,b$, но даже $a\,R'\,b$, ибо R' есть ограничение R на множество W'. Наконец, утверждение $M, b \models \psi$ мы заменили на $M', b \models \psi$, поскольку они эквивалентны по предположению индукции. $\Box$

2.3 Модальный морфизм (или p-морфизм)

Пусть даны две модели: $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$.

Определение 2.6 (**Модальный морфизм**). Функция $f\colon W \to W'$ называется *p-морфизмом*[3] из модели M в модель M', если выполнены следующие условия (для всех фигурирующих в них точек):

(var) $M, a \models p \iff M', f(a) \models p$ для любой переменной p;
(zig) если $a\,R\,b$, то $f(a)\,R'\,f(b)$;
(zig) если $f(a)\,R'\,c$, то существует точка $b \in W$, такая что $a\,R\,b$ и $f(b) = c$.

Если кроме того f — сюръекция[4] функция, то f называют p-морфизмом модели M *на* модель M' и пишут $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. Если такой f существует, то модель M' называют *p-морфным образом* модели M и пишут $M \twoheadrightarrow M'$. Определения для шкал даются аналогично, отбрасывая условие (var).

Лемма 2.7. *Пусть φ — произвольная модальная формула.*
Пусть f — p-морфизм из M в M'. Тогда:
(a) $M, a \models \varphi \iff M', f(a) \models \varphi \quad (\forall a \in W)$;
Пусть $M \twoheadrightarrow M'$. Тогда:
(b) $M \models \varphi \iff M' \models \varphi$.
Пусть $F \twoheadrightarrow F'$. Тогда:
(c) $F \models \varphi \implies F' \models \varphi$.

Доказательство. **(a)** Индукция по φ. Разберем случай $\varphi = \Box\psi$. Докажем: $M, a \models \Box\psi \Leftrightarrow M', f(a) \models \varphi$.

($\Leftarrow$) Пусть $M', f(a) \models \Box\varphi$. Докажем: $M, a \models \Box\psi$. Для этого возьмем любой элемент $b \in W$ с условием $a\,R\,b$. Тогда $f(a)\,R'\,f(b)$ по свойству (zig). Но $M', f(a) \models \Box\psi$. Значит, $M', f(b) \models \psi$ и по предположению индукции $M, b \models \psi$, что и требовалось проверить.

($\Rightarrow$) Пусть $M, a \models \Box\psi$. Докажем: $M', f(a) \models \Box\psi$. Для этого возьмем любой элемент $c \in W'$ с условием $f(a)\,R'\,c$. Тогда, по свойству (zag), для некоторой точки $b \in W$ мы имеем $a\,R\,b$ и $f(b) = c$. Ввиду $M, a \models \Box\psi$, имеем $M, b \models \psi$, а тогда по предположению индукции $M', f(b) \models \psi$, то есть $M', c \models \psi$, что и требовалось проверить.

(b) Пусть $f\colon M \twoheadrightarrow M'$.

($\Leftarrow$) Здесь не нужна сюръективность. Пусть $M' \models \varphi$. Тогда $M \models \varphi$, поскольку для любой точки $a \in W$ имеем: $M' \models \varphi$, значит $M', f(a) \models \varphi$, и наконец, $M, a \models \varphi$, согласно пункту **(a)**.

($\Rightarrow$) Пусть $M \models \varphi$. Докажем $M' \models \varphi$. Возьмем любой элемент $c \in W'$. Ввиду сюръективности f, найдется $a \in W$ такой, что $f(a) = c$. Ввиду $M \models \varphi$, мы имеем $M, c \models \varphi$. Тогда по пункту **(a)** заключаем $M', f(a) \models \varphi$, то есть $M', c \models \varphi$, что и требовалось.

(c) Пусть $f\colon F \twoheadrightarrow F'$. Пусть $F \models \varphi$. Чтобы доказать, что $F' \models \varphi$, возьмем прозвольную модель $M' = (F', V')$, основанную на шкале F', и докажем, что $M' \models \varphi$. Для этого по M' построим естественным образом модель $M = (F, V)$ на шкале F, положив $M, a \models p \leftrightharpoons M', f(a) \models p$. Тогда, очевидно, $f\colon M \twoheadrightarrow M'$. Ввиду $F \models \varphi$, мы имеем $M \models \varphi$. Пользуясь пунктом **(b)**, заключаем, что $M' \models \varphi$. $\Box$

Задача 2.8. Покажите, что в пункте **(c)** леммы обратная импликация не верна. Указание: рассмотрите p-морфизм из шкалы $F = (\mathbb{N}, <)$ на одноточечную шкалу $F' = (\{a\}, \{\langle a, a\rangle\})$, и придумайте формулу, общезначимую на F', но не на F.

Как следствие пунктов **(c)** лемм 2.2, 2.5, 2.7, мы получаем следующий результат.

Теорема 2.9. *Общезначимость модальных формул на шкалах сохраняется при применении операций: взятия несвязной суммы шкал, взятия порожденной подшкалы, взятия p-морфного образа шкалы.*

[3] Или *модальным морфизмом*, или *ограниченным морфизмом*, или *зиг-заг морфизмом*. Название *p-морфизм* наиболее употребительно и мы будем его использовать; оно является сокращением от устаревшего названия “pseudo-epimorphism”, введенного ...

[4] Напомним, это означает, что все точки множества W' являются образами некоторых точек: $\forall c \in W'\ \exists a \in W\colon f(a) = c$.

3 Модальная определимость классов шкал

3.1 Свойства шкал, задаваемые модальными формулами

Отношение R на множестве W называется *обратно фундированным*,[5] если (два эквивалентных определения): а) не существует бесконечной цепи $a_0 \, R \, a_1 \, R \, a_2 \ldots$; б) во всяком непустом подмножестве $X \subseteq W$ есть максимальный элемент, то есть такой $a \in X$, что нет $b \in X$, таких что $a \, R \, b$. Пункт (б) можно записать так:

$$\neg \exists X \left(\varnothing \neq X \subseteq W \ \wedge \ \forall a \in X \, \exists b \in X \colon \ a \, R \, b \right).$$

Импликация (б) $\Rightarrow$ (а) проста: если есть цепь $a_0 \, R \, a_1 \, R \, a_2 \ldots$, то множество $X = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ не имеет максимального элемента. Обратная импликация (а) $\Rightarrow$ (б) требует применения аксиомы выбора: допустим множество $X \neq \varnothing$ не имеет максимального элемента; выберем $a_0 \in X$ (он $\exists$), для него $\exists a_1 \in X$ $a_0 \, R \, a_1$, и так далее: $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists a_{n+1} \in X \ a_n \, R \, a_{n+1}$. По аксиоме выбора существует последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, то есть функция $a \colon \mathbb{N} \to X$, образующая бесконечную цепь $a_0 \, R \, a_1 \, R \, a_2 \ldots$[6]

Формулу $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ называют *аксиомой Лёба* и обозначают (AL).

Без применения аксиомы выбора доказывается следующий факт.

Лемма 3.1. *$F \models \Box(\Box p \to p) \to \Box p \iff$ шкала F транзитивна и обратно фундирована в смысле (б).*

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть шкала F транзитивна. Предположим $F \not\models (\mathsf{AL})$ и докажем $\neg$(б). В некоторой модели $M = (F, V)$ для некоторой точки $x \in W$ имеем $x \models \Box(\Box p \to p)$ и $x \not\models \Box p$. Значит, $\exists y$ такой, что $x \, R \, y$ и $y \not\models p$. Множество $X = \{a \mid x \, R \, a$ и $a \not\models p\}$ непусто, ибо $y \in X$. Докажем: $\forall a \in X \ \exists b \in X$: $a \, R \, b$. Берем $\forall a \in X$; тогда $x \, R \, a$ и $a \not\models p$. Но $x \models \Box(\Box p \to p)$. Значит, $a \models \Box p \to p$ и $a \not\models \Box p$. Поэтому $\exists b$ такой, что $a \, R \, b$ (и по транзитивности $x \, R \, b$) и $b \not\models p$; тем самым $b \in X$.

($\Longrightarrow$) Пусть $F \models (\mathsf{AL})$ Докажем транзитивность. Пусть $x \, R \, y \, R \, z$. Докажем $x \, R \, z$. Возьмем оценку V: переменная p ложна лишь в точках $\{y, z\}$. Тогда в модели $M = (F, V)$ имеем: $x \not\models \Box p$, ибо $x \, R \, y$ и $y \not\models p$. Поскольку $x \models (\mathsf{AL})$, получаем $x \not\models \Box(\Box p \to p)$; значит, $\exists t$: $x \, R \, t$, $t \models \Box p$ и $t \not\models p$. Тогда $t \in \{y, z\}$. Но $t \neq y$, так как $y \not\models \Box p$, ибо $y \, R \, z$ и $z \not\models p$. Остается вариант $t = z$ и значит $x \, R \, z$.

Докажем обратную фундированность в смысле (б). Пусть $\varnothing \neq X \subseteq W$. Фиксируем $a \in X$. Возьмем оценку $V(p) = W \setminus X$. В получившейся модели $M = (F, V)$ возможны два варианта:
i) $a \models \Box p$. Это значит, что a — максимальный элемент в X.
ii) $a \not\models \Box p$. Тогда согласно (AL) получаем $a \not\models \Box(\Box p \to p)$. Значит, $\exists b$ такой, что $a \, R \, b$ (это нам не потребуется), $b \not\models p$ (то есть $b \in X$) и $b \models \Box p$. Значит, b — максимальный элемент в X. $\Box$

Лемма 3.2. *Класс шкал, задаваемый модальной формулой $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$, то есть класс транзитивных обратно фундированных шкал не задается никаким (даже бесконечным) множеством формул первого порядка в сигнатуре $\{R, =\}$.*

3.2 Свойства шкал, модально не определимые

Лемма 3.3. *Класс иррефлексивных шкал не задается никакой модальной формулой (и даже никаким множеством модальных формул).*

Лемма 3.4. *Класс обратно фундированных шкал не задается никакой модальной формулой (и даже никаким множеством модальных формул).*

---

[5] Converse well-founded.

[6] Вообще, если отношение R на некотором множестве X сериально, то есть $\forall a \in X \ \exists b \in X$: $a \, R \, b$, то существует бесконечная цепь $a_0 \, R \, a_1 \, R \, a_2 \ldots$. Это утверждение следует из аксиомы выбора (и равносильно ей?).

4 Модальные логики и исчисления

Модальные логики можно завать разными способами, среди них основные: *семантический* — логика есть множество формул, удовлетворяющих некоторому семантическому условию, например, общезначимых на каких-то шкалах или истинных в каких-то моделях; *синтаксический* — логика есть множество формул, выводимых из заданных аксиом с помощью заданных правил вывода.

Напомним, если $\mathbf{L}$ — некоторое исчисление (заданное в виде аксиом и правил вывода), то формула A называется *выводимой* в исчислении $\mathbf{L}$ (или A является *теоремой* $\mathbf{L}$), что обозначают как $L \vdash A$, если существует *вывод* формулы A в $\mathbf{L}$, то есть последовательность формул $A_0, \ldots, A_n$, $n \geqslant 1$, в котором $A_n = A$ и каждая формула A_i является либо аксиомой исчисления $\mathbf{L}$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода исчисления $\mathbf{L}$.

Определение 4.1. *Минимальная нормальная модальная логика* $\mathbf{K}$ задается следующим образом:

- **Аксиомы:**
  - все классические тавтологии (достаточно лишь аксиом логики высказываний);
  - $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ — *аксиома дистрибутивности* или *нормальности.*
- **Правила вывода:** $(\mathsf{MP})\ \dfrac{A \quad A \to B}{B}$, $\quad (\mathsf{Sub})\ \dfrac{A}{[B/p]A}$, $\quad (\mathsf{Nec})\ \dfrac{A}{\Box A}$.

Нормальная модальная логика $\mathbf{L}$ — это произвольное множество модальных формул, содержащее аксиомы (а значит, и теоремы) логики $\mathbf{K}$ и замкнутое относительно правил вывода (MP), (Sub) и (Nec).

Часто модальную логику $\mathbf{L}$ задают, указывая список дополнительных аксиом Γ, которые нужно добавить к аксиомам логики $\mathbf{K}$; в этом случае пишут $\mathbf{L} = \mathbf{K} + \Gamma$. Даже если нормальная логика $\mathbf{L}$ задана семантически, то ее всегда можно представить в таком виде, взяв в качестве Γ само множество формул $\mathbf{L}$ (или какое-то ее подмножество, достаточное для вывода всех ее формул). Поэтому в дальнейшем мы будем для однообразия для любой логики $\mathbf{L}$ принадлежность к ней некоторой формулы A записывать как $\mathbf{L} \vdash A$. Такой «синтаксический» взгляд позволит нам из выводимости одних формул сразу заключать выводимость других, пользуясь известными тавтологиями.

Задача 4.2. а) $\mathbf{K} \vdash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.
б) $\mathbf{K} \vdash \Box(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \leftrightarrow (\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n)$, где $n \geqslant 2$.
в) Пусть $\mathbf{L}$ — нормальная модальная логика. Тогда
если $\mathbf{L} \vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$, то $\mathbf{L} \vdash \Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \to \Box B$.

Обозначим для любого множества формул Γ и для любого класса шкал $\mathcal{F}$:

$$
\begin{array}{rcll}
\mathsf{Frames}(\Gamma) & := & \{F \mid F \models \Gamma\} & \text{— класс шкал, в которых общезначимо } \Gamma, \\
\mathsf{Logic}(\mathcal{F}) & := & \{A \in \mathsf{Fm} \mid \mathcal{F} \models A\} & \text{— логика класса шкал } \mathcal{F}.
\end{array}
$$

Обоснуем второе обозначение — что в нем мы использовали слово «логика».

Теорема 4.3 (Теорема корректности). *Логика* $\mathsf{Logic}(\mathcal{F})$ *любого класса шкал* $\mathcal{F}$ *является нормальной.*

Доказательство. Нам надо доказать, что аксиомы логики $\mathbf{K}$ общезначимы на любой шкале, а три ее правила вывода сохраняют общезначимость формул.[7] Общезначимость тавтологий очевидна. Общезначимость аксиомы дистрибутивности давалась в качестве задачи 1.1. Правила вывода (MP) и (Nec) сохраняют общезначимость (простое упражнение). Остается проверить правило подстановки. $\Box$

Задача 4.4. Докажите, что следующие определения *противоречивой* логики равносильны:
1) $\mathbf{L} \vdash \bot$;
2) $\mathbf{L} \vdash A$ и $\mathbf{L} \vdash \neg A$ для некоторой формулы A;
3) $\mathbf{L} \vdash A$ и $\mathbf{L} \vdash \neg A$ для всех формул A;
4) $\mathbf{L} \vdash A$ для всех формул A.

Логика, не являющаяся противоречивой, называется *непротиворечивой.*

[7] Этим и объясняется название теоремы — мы тем самым доказываем, например, что всякая теорема логики $\mathbf{K}$ общезначима на всех шкалах. Обратное утверждение — всякая общезначимая формула является теоремой логики $\mathbf{K}$ — можно назвать теоремой о полноте логики $\mathbf{K}$.

4.1 Некоторые «традиционные» модальные логики

Рассмотрим модальные формулы (аксиомы), традиционно изучаемые в модальной логике.

Модальная формула		Условие на шкалы	Название условия
(AD)	$\Box p \to \Diamond p$	$\forall x\, \exists y\, (x\, R\, y)$	сериальность
(AT)	$\Box p \to p$	$\forall x\, (x\, R\, x)$	рефлексивность
(AB)	$p \to \Box\Diamond p$	$\forall x, y\, (x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, x)$	симметричность
(A4)	$\Box p \to \Box\Box p$	$\forall x, y, z\, (x\, R\, y\, \&\, y\, R\, z \Rightarrow x\, R\, z)$	транзитивность
(A5)	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall x, y, z\, (x\, R\, y\, \&\, x\, R\, z \Rightarrow y\, R\, z)$	евклидовость

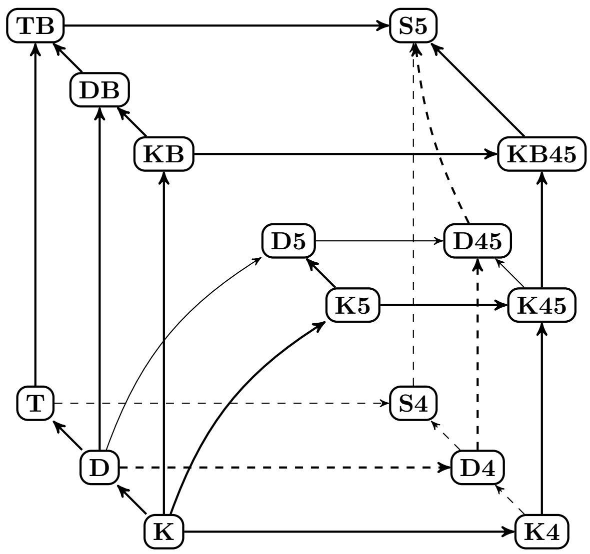
Рассматривают логики, беря некоторые из приведенных пяти аксиом, и именуют их, добавляя к букве **K** буквы соответствующих аксиом, например, **KD45** = **K** + (AD) + (A4) + (A5). Из возможных $2^5 = 32$ комбинаций получается лишь 15 различных логик. У некоторых из них есть «собственное» устоявшееся обозначение, например, **S4** = **KT4** и **S5** = **KTB4** = **KT5**.

Задача 4.5. Докажите последнее равенство. То есть постройте вывод формулы (A5) в логике **KTB4** и выводы формул (AB) и (A4) в логике **KT5**.

Задача 4.6. Докажите, что выписанные в таблице модальные формулы *соответствуют* условиям из второго столбца, в следующем смысле: модальная формула общезначима на шкале $\Leftrightarrow$ соответствующее условие выполняется для шкалы.

Как следствие последней задачи, мы получаем для каждой из этих логик **L** **теорему корректности**: *все теоремы логики* **L** *общезначимы на всех «соответствующих» этой логике шкалах*. Позже (в разделе 6.2) мы сразу для всех этих 15 логик (и даже для большего семейства логик) докажем так называемую **теорему о полноте**: *модальная формула является теоремой логики $\Leftrightarrow$ она общезначима на всех «соответствующих» этой логике шкалах.*

Задача 4.7 (*)**.** Докажите, что приведенные аксиомы порождают лишь 15 различных логик, изображенных на диаграмме ниже (стрелки означают включения).



5 Каноническая модель

Пусть $\mathbf{L}$ — непротиворечивая нормальная модальная логика. Мы предъявим конструкцию, позволяющуи построить модель Крипке, в которой истинны все теоремы логики $\mathbf{L}$ и только они.

Множество формул Γ называется $\mathbf{L}$-*противоречивым*, если в нем найдется конечное подмножество $X \subseteq \Gamma$, такое что[8] $\mathbf{L} \vdash \neg\bigwedge X$; в противном случае Γ называется $\mathbf{L}$-*непротиворечивым*.[9] Очевидно, что в непротиворечивом множестве Γ не может лежать и формула A, и ее отрицание $\neg A$, поскольку $\mathbf{L} \vdash \neg(A \wedge \neg A)$. Но может не быть обоих.

Лемма 5.1 (О пополнении)**.** *Если Γ — непротиворечивое множество, A — произвольная формула, то $\Gamma \cup \{A\}$ непротиворечиво или $\Gamma \cup \{\neg A\}$ непротиворечиво.*

Доказательство. Допустим, оба указанных множества противоречивы. Это значит, что имеются конечные множества $X \subseteq \Gamma \cup \{A\}$ и $Y \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}$, такие что **(a)** $\mathbf{L} \vdash \neg\bigwedge X$ и **(b)** $\mathbf{L} \vdash \neg\bigwedge Y$. Поскольку X и Y не могут быть подмножествами Γ, иначе Γ оказалось бы противоречивым, то $X = X' \cup \{A\}$ и $Y = Y' \cup \{\neg A\}$, где $X', Y' \subseteq \Gamma$.

Рассмотрим множество $Z := X' \cup Y'$ и формулу $B := \bigwedge Z$. Так как Z содержит X' и Y', то из **(a)** и **(b)** следует $\mathbf{L} \vdash \neg(B \wedge A)$ и $\mathbf{L} \vdash \neg(B \wedge \neg A)$. Отсюда по известной тавтологии получаем $L \vdash \neg B$, то есть $L \vdash \neg\bigwedge Z$, что означает противоречивость множества Γ, вопреки условиям леммы. $\square$

Непротиворечивое множество Γ называеся *максимальным непротиворечивым* (МНМ), если выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий:
(1) для любой формулы A имеем: $A \in \Gamma$ или $(\neg A) \in \Gamma$;
(2) Γ — максимальное среди непротиворечивых, то есть не существует непротиворечивого $\Gamma' \supsetneq \Gamma$.

Лемма 5.2. *Определения (1) и (2) эквивалентны.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть (1), но не (2), то есть имеется непротиворечивое $\Gamma' \supsetneq \Gamma$. Значит, есть формула A, такая что $A \in \Gamma'$ и $A \notin \Gamma$. По (1) тогда $(\neg A) \in \Gamma \subset \Gamma'$. Тем самым $A, \neg A \in \Gamma'$, что невозможно ввиду непротиворечивости множества Γ'.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть (2), но не (1), то есть пусть ни A, ни $\neg A$ не лежит в Γ. Тогда по лемме о пополнении Γ можно строго расширить (формулой A или формулой $\neg A$) и получить снова непротиворечивое множество. Это противоречит максимальности Γ. $\square$

Далее мы МНМ будем обозначать буквами x, y, z и т.п.

Лемма 5.3 (Лемма Линденбаума)**.** *Всякое непротиворечивое множество формул содержится в некотором максимальном непротиворечивом.*

Доказательство. Перенумеруем все формулы: $\mathsf{Fm} = \{A_1, A_2, \ldots\}$. Пусть $\Gamma \subset \mathsf{Fm}$ — непротиворечивое множество. Построим множества $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$ следующим образом:

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\}, & \text{если } \Gamma_n \cup \{A_n\} \text{ непротиворечиво,} \\ \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $x := \bigcup_{n \geqslant 0} \Gamma_n$. По построению, для каждого $n \geqslant 1$ либо A_n, либо $\neg A_n$ лежит в Γ_{n+1}, а значит, и в x. Ввиду леммы о пополнении, каждое Γ_n непротиворечиво.

Наконец, всё множество x непротиворечиво. Действительно, если бы имелось конечное его подмножество $Y \subset x$, для которого $\mathbf{L} \vdash \neg\bigwedge Y$, то оно содержалось бы в каком-то из Γ_n (взять в качестве n максимальный из номеров k, таких что $A_k \in Y$), а значит, уже Γ_n был бы противоречивым. $\square$

Определение 5.4. *Каноническая модель* логики $\mathbf{L}$ — это модель Крипке $M_\mathbf{L} = (W_\mathbf{L}, R_\mathbf{L}, V_\mathbf{L})$, где

- $W_\mathbf{L}$ — множество всех максимальных $\mathbf{L}$-непротиворечивых множеств формул;
- $x\, R_\mathbf{L}\, y \ \leftrightharpoons\$ для любой формулы A имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow A \in y)$;
- $x \models p \ \leftrightharpoons\ p \in x$, для каждой переменной p.

[8] Если $X = \{A_1, \ldots, A_n\}$, то мы используем обозначение $\bigwedge X := (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$. Считаем $\bigwedge\varnothing = \top$.

[9] Мы будем писать просто *непротиворечивым*, поскольку из контекста будет ясно, о какой логике $\mathbf{L}$ идет речь.

Задача 5.5. а) Отношение $R_{\mathbf{L}}$ можно эквивалентным образом задать так:

$$x\, R_{\mathbf{L}}\, y \;\leftrightharpoons\; \text{для любой формулы } A \text{ имеем: } (A \in y \;\Rightarrow \Diamond A \in x).$$

б) Докажите, что максимальных непротиворечивых множеств — континуум.

Лемма 5.6 (Об МНМ). *Пусть* $\mathbf{L}$ *— непротиворечивая нормальная логика,* x *— любое МНМ.*

(a) $\mathbf{L} \subseteq x$;

(b) $(A \wedge B) \in x \quad \Longleftrightarrow \quad A \in x$ *и* $B \in x$;

(c) $(A \vee B) \in x \quad \Longleftrightarrow \quad A \in x$ *или* $B \in x$;

(d) $(A \to B) \in x \quad \Longleftrightarrow \quad (A \in x \Rightarrow B \in x)$;

(e) $\neg A \in x \quad \Longleftrightarrow \quad A \notin x$.

Доказательство. (a) Если $\mathbf{L} \vdash A$ и $A \notin x$, то $\neg A \in x$ и x — противоречив, ибо $\mathbf{L} \vdash \neg\neg A$.

Для примера докажем (c). ($\Rightarrow$) Если $(A \vee B) \in x$, но $A \notin x$ и $B \notin x$, то $\neg A \in x$ и $\neg B \in x$, и тем самым x — противоречив, ибо $\mathbf{L} \models \neg((A \vee B) \wedge \neg A \wedge \neg B)$.
($\Leftarrow$) Если $A \in x$, то $(A \vee B) \in x$, иначе $\neg(A \vee B) \in x$ и x — противоречив, ибо $\mathbf{L} \vdash \neg(A \wedge \neg(A \vee B))$. □

Мы готовы доказать основную лемму: в МНМ x, как в точке канонической модели, истинны в точности те формулы, которые принадлежат множеству x.

Лемма 5.7 (О канонической модели). $M_{\mathbf{L}}, x \models A \iff A \in x$, *для любых МНМ* x *и формулы* A.

Доказательство. Индукция по построению формулы A. Случаи $\perp$ и p тривиальны. Случай $\to$ следует из пункта (d) леммы о МНМ. Остается случай $A = \Box B$. Имеем цепь эквивалентностей:

$$\begin{aligned} x \models \Box B \;&\overset{(a)}{\Longleftrightarrow}\; \forall y \in W_{\mathbf{L}}\,(x\, R_{\mathbf{L}} y \;\Rightarrow\; y \models B) \\ &\overset{(b)}{\Longleftrightarrow}\; \forall y \in W_{\mathbf{L}}\,(x\, R_{\mathbf{L}} y \;\Rightarrow\; B \in y) \;\overset{(c)}{\Longleftrightarrow}\; \Box B \in x. \end{aligned}$$

Эквивалентность (a) есть просто определение семантики $\Box$. Эквивалентность (b) верна в силу предположения индукции. Осталось доказать эквивалентность (c).

$\overset{(c)}{\Longleftarrow}$ Если $\Box B \in x$ и $x\, R_{\mathbf{L}} y$, то $B \in y$, по определению отношения $R_{\mathbf{L}}$.

$\overset{(c)}{\Longrightarrow}$ Предположим $\Box B \notin x$. Надо построить такое МНМ y, что $x\, R_{\mathbf{L}} y$ и $B \notin y$. Если мы докажем, что множество формул $\Gamma := \{C \mid \Box C \in x\} \cup \{\neg B\}$ непротиворечиво, то по лемме Линденбаума оно содержится в некотором МНМ y, и для этого y автоматически будет выполнено $x\, R_{\mathbf{L}} y$ и $B \notin y$.

Итак, докажем, что Γ непротиворечиво. Допустим противное, тогда в нем найдется конечное подмножество[10] $\{C_1, \ldots, C_n, \neg B\} \subset \Gamma$, где каждая $\Box C_i \in x$, такое что
$\mathbf{L} \vdash \neg(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \wedge \neg B)$. Это равносильно, ввиду тавтологий,
$\mathbf{L} \vdash C_1 \wedge \ldots \wedge C_n \to B$. Пользуясь Задачей 4.2(в), получаем
$\mathbf{L} \vdash \Box C_1 \wedge \ldots \wedge \Box C_n \to \Box B$. Эта теорема логики $\mathbf{L}$ лежит в x, и его посылка лежит в x (так как каждый ее конъюнкт $\Box C_i$ лежит в x). По пункту (d) леммы о МНМ, ее заключение $\Box B$ лежит в x. Но этого не может быть, ибо по предположению $\Box B \notin x$. □

Теорема 5.8. $L \vdash A \iff M_{\mathbf{L}} \models A$, *для любой формулы* A.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если $\mathbf{L} \vdash A$, то для всех МНМ x имеем $A \in x$ и $M_{\mathbf{L}}, x \models A$, откуда $M_{\mathbf{L}} \models A$.

($\Leftarrow$) Пусть $L \nvdash A$. Тогда множество $\{\neg A\}$ является $\mathbf{L}$-непротиворечивым и по лемме Линденбаума содержится в некотором МНМ x. Тогда $M_{\mathbf{L}}, x \models \neg A$, то есть $M_{\mathbf{L}}, x \not\models A$. □

[10] Без ограничения общности, содержащее формулу $\neg B$, ведь это более сильное утверждение.

5.1 Каноническая порожденная подмодель

Если даны две логики $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'$, то всякое $\mathbf{L}'$-непротиворечивое множество формул является и $\mathbf{L}$-непротиворечивым. Каноническое отношение и каноническая оценка переменных задаются вообще не зависимо от логики; меняется лишь множество точек, на которых мы их определяем (так что вполне можно было бы их обозначать R_{can} и V_{can}). Итак, $M_{\mathbf{L}'}$ — подмодель модели $M_{\mathbf{L}}$ («если логика увеличивается, то ее каноническая модель уменьшается»). Оказывается, это — порожденная подмодель.

Лемма 5.9. *Если $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'$, то $M_{\mathbf{L}'}$ является порожденной подмоделью модели $M_{\mathbf{L}}$.*

Доказательство. Как мы заметили выше, $W_{\mathbf{L}'} \subseteq W_{\mathbf{L}}$. Сначала убедимся, что есть простое свойство, выделяющее точки $W_{\mathbf{L}'}$ среди точек $W_{\mathbf{L}}$, а именно: $W_{\mathbf{L}'} = \{x \in W_{\mathbf{L}} \mid \mathbf{L}' \subseteq x\}$. Включение $\subseteq$ очевидно: для всякого $x \in W_{\mathbf{L}'}$ выполнено $\mathbf{L}' \subseteq x$ по пункту (a) леммы о МНМ. Включение $\supseteq$: пусть $x \in W_{\mathbf{L}}$ и $\mathbf{L}' \subseteq x$. Если бы x оказался $\mathbf{L}'$-противоречивым, то для некоторого конечного подмножества $X \subseteq x$ мы имели бы: $\mathbf{L}' \vdash \neg\bigwedge X$, и значит, $\neg\bigwedge X \in x$, а также $\bigwedge X \in x$, поскольку всякое МНМ замкнуто относительно конъюнкции; получилось, что x противоречив.

Теперь докажем, что $M_{\mathbf{L}'}$ — порожденная подмодель в $M_{\mathbf{L}}$, то есть что отношение R_{can} не выводит за множество $W_{\mathbf{L}'}$. Пусть $x \in W_{\mathbf{L}'}$ (а значит, $\mathbf{L}' \subseteq x$) и $x \, R_{\mathsf{can}} \, y$. Покажем, что $y \in W_{\mathbf{L}'}$, то есть $\mathbf{L}' \subseteq y$. Для любой формулы A, если $\mathbf{L}' \vdash A$, то $\mathbf{L}' \vdash \Box A$, поэтому $\Box A \in x$, а тогда $A \in y$ по построению R_{can}. $\Box$

Таким образом, каноническая модель для логики $\mathbf{K}$ — самая большая, в том смысле, что каноническая модель любой другой нормальной модальной логики является ее порожденной подмоделью.

6 Полные по Крипке логики

Пусть $\mathbf{L}$ — логика, A — модальная формула. Будем писать $\mathbf{L} \models A$ и говорить, что формула A является *семантическим следствием* логики $\mathbf{L}$, если для любой шкалы F из $F \models \mathbf{L}$ следует $F \models A$.

Определение 6.1. Модальная логика $\mathbf{L}$ называется *полной*[11] (*по Крипке*), если для любой формулы A имеет место эквивалентность: $\mathbf{L} \vdash A \ \Leftrightarrow\ \mathbf{L} \models A$.

Можно дать другие, но эквивалентные определения полноты. Рассмотрим класс $\mathcal{F} = \mathsf{Frames}(\mathbf{L})$ всех $\mathbf{L}$-шкал. Очевидно, в $\mathcal{F}$ будут общезначимы все теоремы логики $\mathbf{L}$. Если общезначимы только они, то логику $\mathbf{L}$ называют *полной по Крипке* (она в состоянии вывести все свои «семантические истины»). Если же в $\mathcal{F}$ общезначимы еще какие-то формулы, не входящие в $\mathbf{L}$, то $\mathbf{L}$ называют неполной. Если брать класс не всех, а лишь некоторых $\mathbf{L}$-шкал, то оказывается, что понятие не изменится — это отражено в определении и задаче ниже. Мы приходим к эвивалентному определению полноты.

Определение 6.2. Модальная логика $\mathbf{L}$ называется *полной (по Крипке)*, если существует такой класс шкал Крипке $\mathcal{F}$, что для любой формулы A имеем: $\mathbf{L} \vdash A \iff \mathcal{F} \models A$.

Задача 6.3. Докажите, что в этом определении всегда можно брать класс *всех* $\mathbf{L}$-шкал $\mathsf{Frames}(\mathbf{L})$.

Свойство полноты логики $\mathbf{L}$ можно переписать так: $\mathbf{L} = \mathsf{Logic}(\mathcal{F})$ для некоторого класса шкал $\mathcal{F}$, а с учетом задачи 6.3 — даже так: $\mathbf{L} = \mathsf{Logic}(\mathsf{Frames}(\mathbf{L}))$, то есть $\mathbf{L}$ есть логика класса всех своих шкал.

Задача 6.4. Пусть логики $\mathbf{L} \subsetneq \mathbf{L}'$ общезначимы в одних и тех же шкалах. Тогда $\mathbf{L}$ не полна.

6.1 Канонические логики и формулы

Если каноническая шкала $F_{\mathbf{L}} = (W_{\mathbf{L}}, R_{\mathbf{L}})$ окажется среди $\mathbf{L}$-шкал, то это влечет полноту логики $\mathbf{L}$.

Определение 6.5. Логика $\mathbf{L}$ называется *канонической*, если она общезначима на своей канонической шкале: $F_{\mathbf{L}} \models \mathbf{L}$.

Например, логика $\mathbf{K}$ — каноническая, ведь она общезначима на любой шкале, в том числе на $F_{\mathbf{K}}$.

Лемма 6.6. *Если логика* $\mathbf{L}$ *— каноническая, то* $\mathbf{L}$ *— полная.*

Доказательство. Мы покажем, что для любой формулы A имеем: $\mathbf{L} \vdash A \iff F_{\mathbf{L}} \models A$. Импликация $\Leftarrow$ верна всегда: если A истинна на шкале $F_{\mathbf{L}}$ при любой оценке, то она истинна и при канонической оценке, то есть $M_{\mathbf{L}} \models A$; по свойству канонической модели (теорема 5.8) заключаем: $\mathbf{L} \vdash A$. Импликация $\Rightarrow$ доказывается так: если логика $\mathbf{L}$ канонична, то есть $F_{\mathbf{L}} \models \mathbf{L}$, и если $\mathbf{L} \vdash A$, то, очевидно, $F_{\mathbf{L}} \models A$. $\square$

Пусть логика задана своими аксиомами: $\mathbf{L} = \mathbf{K} + \Gamma$. Очевидно, что для проверки каноничности логики $\mathbf{L}$ достаточно проверить, что на шкале $F_{\mathbf{L}}$ общезначимы формулы из Γ, ибо логика $\mathbf{K}$ всегда общезначима. То есть надо проверить, что $F_{\mathbf{L}} \models A$ для каждой $A \in \Gamma$.

Определение 6.7. Формула A называется *канонической*, если для логики $\mathbf{L} = \mathbf{K} + A$ имеем: $F_{\mathbf{L}} \models A$.

[11] Вспомним, какова ситуация с полнотой в других областях логики.

В пропозициональной логике имеется *исчисление высказываний* (ИВ), традиционно формулируемое в виде 10 схем аксиом и правила modus ponens, являющееся полным в следующем смысле: в нем доказываются тавтологии и только они; то есть для любой пропозициональной формулы A имеет место эквивалентность: $\text{ИВ} \vdash A \Leftrightarrow\ \models A$. Более того, имеет место также полнота любых пропозициональных теорий: для любого множества формул (или теории) Γ и любой формулы A имеем: $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$, где $\vdash$ использует, помимо собственно Γ, схемы аксиом ИВ и правило modus ponens.

В логике первого порядка также имеется *исчисление предикатов* (ИП), являющееся полным в следующем смысле (это знаменитая теорема Гёделя о полноте): в ИП доказываются общезначимые формулы и только они; то есть для любой формулы первого порядка A имеет место эквивалентность: $\text{ИП} \vdash A \Leftrightarrow\ \models A$. Более того, имеет место также полнота любых теорий первого порядка: для любого множества формул (или теории) Γ и любой формулы A имеем: $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$, где $\vdash$ использует, помимо собственно Γ, схемы аксиом ИП и правила modus ponens и обобщения ($A \vdash \forall x\, A$).

В модальной же логике не всякая логика полна. Кроме того, отличие от вышеприведенных фактов в том, что выводимость из логики $\mathbf{L} \vdash A$ включает три правила — modus ponens, подстановки и усиления.

Оказывается, это условие гарантирует, что формула A будет общезначимой и на канонических шкалах любых других логик, содержащих эту формулу.

Лемма 6.8. *Пусть A — каноническая формула, $\mathbf{L}$ — непротивор. логика. Если $\mathbf{L} \vdash A$, то $F_{\mathbf{L}} \models A$.*

Доказательство. Обозначим логику $\mathbf{L}' = \mathbf{K} + A$. Имеем $\mathbf{L}' \subseteq \mathbf{L}$. Так как формула A — каноническая, то $F_{\mathbf{L}'} \vdash A$. По лемме 5.9 $F_{\mathbf{L}}$ является порожденной подшкалой шкалы $F_{\mathbf{L}'}$. Значит, $F_{\mathbf{L}} \models A$. $\square$

Следствие 6.9. *Если непротиворечивая логика $\mathbf{L}$ аксиоматизирована каноническими формулами, то она каноническая и, значит, полная.*

6.2 Полнота «традиционных» модальных логик

Здесь мы докажем полноту 15 логик из раздела 4.1 и даже более широкого семейства логик.

Пусть $i, j, m, n \geqslant 0$ — натуральные числа.

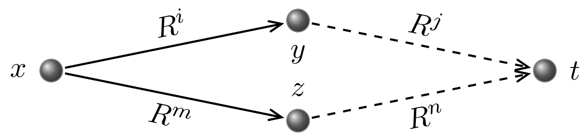
Модальную формулу $\Diamond^i \Box^j p \to \Box^m \Diamond^n p$ назовем (i,j,m,n)-*формулой* и обозначим $(A^{i,j}_{m,n})$.

Заметим, что все аксиомы из раздела 4.1 являются частными случаями таких формул:

(AD)	$\Box p \to \Diamond p$	является $(0,1,0,1)$-формулой,
(AT)	$\Box p \to p$	является $(0,1,0,0)$-формулой,
(AB)	$p \to \Box\Diamond p$	является $(0,0,1,1)$-формулой,
(A4)	$\Box p \to \Box\Box p$	является $(0,1,2,0)$-формулой,
(A5)	$\Box p \to \Box\Diamond p$	является $(0,1,1,1)$-формулой.

В шкале Крипке $F = (W, R)$ обозначаем: $R^0 = \{(a,a) \mid a \in W\}$, $R^{k+1} = R^k \circ R$.

Назовем (i,j,m,n)-*условием* условие: $\boxed{\forall x, y, z\,\big(x\,R^i\,y\ \&\ x\,R^m\,z\ \Rightarrow\ \exists t\,(y\,R^j\,t\ \&\ z\,R^n\,t)\big)}$



Лемма 6.10. *(i,j,m,n)-формула общезначима на шкале $F \iff F$ удовлетворяет (i,j,m,n)-условию.*

Доказательство. $(\Leftarrow)$ Пусть $a \models \Diamond^i\Box^j p$; это значит, что $\exists b$: $a\,R^i\,b$ и $b \models \Box^j p$. Докажем, что $a \models \Box^m\Diamond^n p$. Для этого возьмем любую точку c, такую что $a\,R^m\,c$, и докажем $c \models \Diamond^n p$. По (i,j,m,n)-условию, $\exists d$: $b\,R^j\,d$ и $c\,R^n\,d$. Ввиду $b \models \Box^j p$ получаем $d \models p$. Так как $c\,R^n\,d$, то заключаем $c \models \Diamond^n p$.

$(\Rightarrow)$ Допустим, что (i,j,m,n)-условие не выполнено для шкалы F, то есть найдутся такие точки a, b, c, что $a\,R^i\,b$ и $a\,R^m\,c$, но $R^j(b) \cap R^n(c) = \varnothing$. Зададим оценку на этой шкале: $V(p) := R^j(b)$. Тогда $b \models \Box^j p$ и $a \models \Diamond^i\Box^j p$, а также $c \models \Box^n\neg p$ и $a \models \Diamond^m\Box^n p$. Тем самым в точке a опроверглась (i,j,m,n)-формула. $\square$

Теорема 6.11. *Каждая (i,j,m,n)-формула является канонической.*

Доказательство. Для этого докажем, что в канонической шкале $F_{\mathbf{L}}$ логики $\mathbf{L} = \mathbf{K} + A^{i,j}_{m,n}$ общезначима (i,j,m,n)-формула. Согласно предыдущей лемме, для этого надо показать, что шкала $F_{\mathbf{L}} = (W_{\mathbf{L}}, R_{\mathbf{L}})$ удовлетворяет (i,j,m,n)-условию. Вместо $R_{\mathbf{L}}$ будем писать R для краткости.

Возьмем любые ее точки $x, y, z \in W_{\mathbf{L}}$, такие что $x\,R^i\,y$ и $x\,R^m\,z$. Надо доказать, что найдется точка $t \in W_{\mathbf{L}}$, такая что $y\,R^j\,t$ и $z\,R^n\,t$. Для этого рассмотрим множество формул:

$$T = T_1 \cup T_2, \quad \text{где} \quad T_1 = \{A \mid \Box^j A \in y\}, \quad T_2 = \{B \mid \Box^n B \in z\}.$$

Если мы докажем, что множество T является $\mathbf{L}$-непротиворевивым, то по лемме Линденбаума оно содержится в некотором $t \in W_{\mathbf{L}}$, для которого, ввиду задачи 6.12(а), выполняется $y\,R^j\,t$ и $z\,R^n\,t$.

Итак, допустим, T является $\mathbf{L}$-противоречивым. Ввиду задачи 6.12(б), это значит, что существуют формулы $A \in T_1$ и $B \in T_2$, такие что $\mathbf{L} \vdash \neg(A \wedge B)$. Это равносильно $\mathbf{L} \vdash A \to \neg B$. Пользуясь аксиомой дистрибутивности (и контрапозицией), получаем $\mathbf{L} \vdash \Diamond^n A \to \Diamond^n\neg B$, то есть $\mathbf{L} \vdash \neg(\Diamond^n A \wedge \Box^n B)$. **(*)**

Имеем $\Box^j A \in y$ и $\Box^n B \in z$. Из первого и $x\,R^i\,y$, ввиду задачи 6.12(а), следует $\Diamond^i\Box^j A \in x$. Поскольку $\mathbf{L} \vdash \Diamond^i\Box^j A \to \Box^m\Diamond^n A$ и $\mathbf{L} \subseteq x$, получаем $\Box^m\Diamond^n A \in x$. Это вместе с $x\,R^m\,z$ дает $\Diamond^n A \in z$. Но это вместе с $\Box^n B \in z$ и **(*)** означает, что множество формул z является $\mathbf{L}$-противоречивым, что не так. $\square$

Задача 6.12. **(а)** Напомним, как задается отношение в канонической шкале:

$x\, R_{\mathbf{L}}\, y \ \leftrightharpoons\ $ для любой формулы A имеем: $(\Box A \in x \ \Rightarrow A \in y)$.

Докажите следующее: для любого $n \geqslant 0$

$x\, (R_{\mathbf{L}})^n\, y \ \Leftrightarrow\ $ для любой формулы A имеем: $(\Box^n A \in x \ \Rightarrow A \in y)$.

Или, что равносильно:

$x\, (R_{\mathbf{L}})^n\, y \ \Leftrightarrow\ $ для любой формулы A имеем: $(A \in y \ \Rightarrow \Diamond^n A \in x)$.

На самом деле, из этих эквивалентностей в теореме 6.11 нам нужна лишь простая импликация $\Rightarrow$.

(б) Пусть $x \in W_{\mathbf{L}}$. Тогда множество формул $\{A \mid \Box^n A \in x\}$ замкнуто относительно конъюнкции.

Как следствие, получаем следующий результат.

Теорема 6.13. *Всякая логика, аксиоматизированная некоторыми (i, j, m, n)-формулами, является канонической, а следовательно, и полной по Крипке. В частности, полными являются все 15 «традиционных» логик из раздела 4.1. Например,*

$\mathbf{K4} \vdash A \iff$ *формула A общезначима на всех транзитивных шкалах;*
$\mathbf{S4} \vdash A \iff$ *формула A общезначима на всех рефлексивных транзитивных шкалах;*
$\mathbf{S5} \vdash A \iff$ *формула A общезначима на всех шкалах с отношением эквивалентности.*

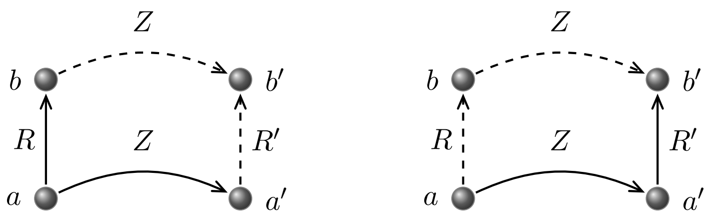
7 Бисимуляции

Первоначально возникнув в других областях (при моделировании вычислений в виде множеств состояний и переходов между ними и сравнении поведения различных систем такого вида), понятие бисимуляции пришло в модальную логику в работах ван Бентема и стало играть ключевую роль в изучении выразительных возможностей модальных языков. Интуитивно, бисимуляция между моделями Крипке M и M' — это такое сопоставление (не обязательно однозначное) некоторых точек из M некоторым точкам из M', при котором, во-первых, в сопоставленных друг другу точках истинны одни и тем же переменные, а во-вторых, всякий «шаг» в модели M (по отношению R) всегда можно «имитировать» соответствующим «шагом» (по отношению R') в модели M', и наоборот.

Определение 7.1 (**Бисимуляция**)**.** Непустое двуместное отношение $Z \subseteq (W \times W')$ называется *бисимуляцией* между моделями $M = (W, R, V)$ и $M' = (W', R', V')$, если выполнены следующие условия (для всех фигурирующих в них точек из соответствующих по смыслу носителей W или W'):

(var) $a\,Z\,a' \implies$ для каждой переменной p имеем: $M, a \models p \;\Leftrightarrow\; M', a' \models p$;
(zig) $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b \implies$ существует $b' \in W'$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a'\,R'\,b'$ (см. рис. слева);
(zag) $a\,Z\,a'$ и $a'\,R'\,b' \implies$ существует $b \in W$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a\,R\,b$ (см. рис. справа).

Понятие бисимуляции между шкалами определяется аналогично, без условия **(var)**.



Условие **(zig)** Условие **(zag)**

Данное определение похоже на определение p-морфизма, и это не случайно.

Задача 7.2. Пусть $f\colon W \to W'$ — функция. Тогда f — p-морфизм $\iff$ f — бисимуляция.

Задача 7.3. Пусть Z — бисимуляция между моделями M и M'. Докажите, что
(a) область определения $\mathsf{Dom}(Z)$ является порожденной подмоделью в M,
(b) область значений $\mathsf{Ran}(Z)$ является порожденной подмоделью в M'.

Модель с выделенной точкой (M, a) будем называть *отмеченной моделью* (pointed model).

Если бисимуляция Z соединяет точку $a \in W$ модели M с точкой $a' \in W'$ модели M', то мы будем записывать это как $Z\colon (M, a) \simeq (M', a')$. Говорим, что отмеченные модели (M, a) и (M', a') *бисимулируют* (are bisimilar), если их можно соединить некоторой бисимуляцией Z; обозначение: $(M, a) \simeq (M', a')$.

Задача 7.4. Отношение $\simeq$ между отмеченными моделями является отношением эквивалентности.

Фундаментальный (но простой) факт состоит в том, что бисимулирующие точки не может отличить никакая модальная формула.

Теорема 7.5. *Если $(M, a) \simeq (M', a')$, то для любой модальной формулы φ имеем:*

$$M, a \models \varphi \quad \iff \quad M', a' \models \varphi.$$

Доказательство. Индукция по φ. Разбираем лишь случай $\varphi = \Box\psi$. Так как (M, a) и (M', a') входят в формулировку утверждения (а также в определение бисимуляции) симметрично, то достаточно доказать импликацию лишь в одну сторону.

Итак, пусть $Z\colon (M, a) \simeq (M', a')$ и $M, a \models \Box\psi$. Чтобы доказать, что $M', a' \models \Box\psi$, возьмем произвольную точку точку $b' \in W'$, такую что $a'\,R'\,b'$, и докажем, что $M', b' \models \psi$. По условию (zag), найдется точка $b \in W$, такая что $b\,Z\,b'$ и $a\,R\,b$. Ввиду $M, a \models \Box\psi$, имеем $M, b \models \psi$. Ввиду $(M, b) \simeq (M', b')$, мы по предположению индукции заключаем, что $M', b' \models \psi$, что и требовалось. $\Box$

Отмеченные модели (M, a) и (M', a') называются *модально эквивалентными*, обозначение: $(M, a) \equiv (M', a')$, если в них истинны одни и те же модальные формулы: $M, a \models A \Leftrightarrow M', a' \models A$, для любой модальной формулы A. Теперь доказанную выше теорему можно сформулировать так: *если две отмеченные модели бисимулируют, то они модально эквивалентны:*

$$(M, a) \simeq (M', a') \quad \Longrightarrow \quad (M, a) \equiv (M', a').$$

Обратная импликация не всегда верна (пример см. ниже). Но есть важный случай, когда все же обратная импликация имеет место — это случай конечных моделей, или, несколько более общо, случай моделей с конечным ветвлением.

Мы говорим, что модель M имеет *конечное ветвление*, если всякая ее точка имеет лишь конечное число последователей: множество $R(a)$ конечно для любой точки $a \in W$.

Теорема 7.6. *Пусть даны две отмеченные модели с конечным ветвлением (M, a) и (M', a'). Если они модально эквивалентны, то они бисимулируют; а значит, для них верна эквивалентность:*

$$(M, a) \simeq (M', a') \quad \Longleftrightarrow \quad (M, a) \equiv (M', a').$$

Доказательство. Пусть $(M, a) \equiv (M', a')$. Докажем, что сама модальная эквивалентность $\equiv$ является бисимуляцей (соединяющей точку a с точкой a'). С этой целью проверим для отношения $\equiv$ условия **(var)**, **(zig)** и **(zag)**. Условие **(var)** очевидно, ведь в соединяемых отношением $\equiv$ точках выполняются одни и те же формулы, в том числе, переменные. Условия **(zig)** и **(zag)** симметричны, поэтому достаточно проверить лишь одно из них.

Пусть $a \equiv a'$ и $a\,R\,b$. Докажем, что существует точка b' в модели M', такая что $b \equiv b'$ и $a'\,R'\,b'$. Допустим ее не существует. Множество $R'(a')$ конечно (модели с конечным ветвлением) и непусто, поскольку из $a \models \Diamond\top$ вытекает, что $a' \models \Diamond\top$. Пусть $R'(a') = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Мы предположили, что $c_i \not\equiv b$. Значит, найдутся модальные формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие что $b \models A_i$, но $c_i \not\models A_i$, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Но тогда формула $\Diamond(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ истинна в точке a и ложна в точке a', чего не может быть, ибо $a \equiv a'$. $\square$

Пример 7.7. Покажем, что условие конечности ветвления в предыдущей теореме существенно. Рассмотрим две модели M и M'. Модель M состоит из корня a, из которого выходит путь, состоящий ровно из одного ребра, путь, состоящий ровно из двух ребер, и т.д. (таким образом, все пути — конечной длины). Модель M' имеет корень a' и содержит все то же, что и модель M, но дополнительно M' имеет бесконечный путь, начинающийся в корне: $a' = a_0, a_1, a_2, \ldots$. Для простоты положим, что всюду в M и в M' истинны все переменные. Утверждается, что в (M, a) и (M', a') верны одни и те же модальные формулы. Однако нельзя построить никакую бисимуляцию *шкал* (а тем более бисимуляцию *моделей*), соединяющую точку a с точкой a'.

Докажем последнее: допустим, бисимуляция, соединяющая точку a с точкой a', существует. Поскольку в модели M' есть «шаг» из точки $a' = a_0$ в точку a_1, то в модели M ему соответствует шаг из точки a в некоторую точку b. Но b находится на пути γ конечной длины n. Тогда если мы сделаем в модели M' из точки a_1 еще $n+1$ шагов, то в модели M не найдется n шагов на пути γ.

Теперь дадим набросок доказательства первого утверждения: в (M, a) и (M', a') верны одни и те же модальные формулы. Допустим, это не так и модальная формула A их различает: $a \models A$, $a' \not\models A$. Пусть формула A имеет модальную глубину n (то есть имеется n вложенных друг в друга модальных операторов $\Box$). Тогда утверждения $a \models A$ и $a' \not\models A$ останутся верными, если мы от моделей M и M' перейдем к моделям, «обрубленным» на глубине n. Но такие модели уже будут бисимулирующими, более того, изоморфными: каждая из них будет иметь выходящие из корня цепи длины $1, 2, \ldots, n-1$, а также счетное число цепей длины n. (Упражнение: восстановите недостающие детали. Потребуется понятие высоты точки в модели и «обрубание» модели на глубине n.)

Две модели M и M' будем называть *бисимулирующими*, обозначение: $M \simeq M'$, если между ними существует *тотальная* бисимуляция, то есть такая бисимуляция Z, что $\mathsf{Dom}(Z) = W$ и $\mathsf{Ran}(Z) = W'$. Аналогично для шкал. Простым следствием из доказанной выше теоремы является следующий факт.

Следствие 7.8. *Если $M \simeq M'$, то в моделях M и M' истинны одни и те же модальные формулы.*

Для шкал это уже не верно: в бисимулирующих шкалах не обязательно *общезначимы* одни и те же модальные формулы. Действительно, шкала $F = (\mathbb{N}, <)$ бисимулирует с одноэлементной рефлексивной шкалой F', однако формула $\Box p \leftrightarrow p$ общезначима в F', но не F.

На самом деле, результаты об операциях на моделях Крипке, полученные в разделе 2 а точнее, пункты **(a)** лемм 2.2, 2.5, 2.7 являются следствием теоремы 7.5. Достаточно заметить, что между «старой» моделью и моделью, полученной в результате каждой из операций, имеется бисимуляция.

Задача 7.9. Докажите следующие (простые) утверждения.
(a) Пусть $M = \biguplus_{i \in I} M_i$, $i \in I$, $a \in W_i$. Тогда $(M, (i, a)) \simeq (M_i, a)$.
(b) Пусть $M' \hookrightarrow M$, $a \in W'$. Тогда $(M, a) \simeq (M', a)$.
(b) Пусть f есть p-морфизм из M в M', $a \in W$. Тогда $(M, a) \simeq (M', f(a))$.

8 Финитная аппроксимируемость

Финитная аппроксимируемость некоторой модальной логики означает, что мы можем ограничиться лишь конечными шкалами этой логики.

Будем говорить, что формула A *следует* из логики $\mathbf{L}$ *на конечных шкалах*, и писать[12] $\mathbf{L} \models_{\mathsf{ff}} A$, если для любой конечной шкалы F из $F \models \mathbf{L}$ следует $F \models A$. Очевидны импликации: $\mathbf{L} \vdash A \Longrightarrow \mathbf{L} \models A \Longrightarrow \mathbf{L} \models_{\mathsf{ff}} A$. Если верны и обратные импликации, то логику $\mathbf{L}$ называют финитно аппроксимируемой.

Определение 8.1 (ПОКШ)**.** Логика $\mathbf{L}$ называется *финитно аппроксимируемой* (или *полной относительно конечных шкал*[13]), если (даем эквивалентные, как мы покажем ниже, определения):

(F1) для любой формулы A имеем: $\mathbf{L} \vdash A \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L} \models_{\mathsf{ff}} A$;
(F2) для любой формулы A, если $\mathbf{L} \nvdash A$, то найдется конечная шкала F, такая что $F \models \mathbf{L}$ и $F \not\models A$;
(F3) $\mathbf{L}$ — логика некоторого класса конечных шкал $\mathcal{F}$, то есть $\mathbf{L} = \mathsf{Logic}(\mathcal{F})$;
(F4) $\mathbf{L}$ — логика класса всех конечных $\mathbf{L}$-шкал $\mathcal{F}_{\mathbf{L}}$, то есть: $\mathbf{L} = \mathsf{Logic}(\mathcal{F}_{\mathbf{L}})$.
Здесь $\mathcal{F}_{\mathbf{L}} = \{F \mid F$ есть конечная шкала и $F \models \mathbf{L}\}$.

Лемма 8.2. *Условия* (F1)*,* (F2)*,* (F3)*,* (F4) *эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Простое упражнение. □

Будем говорить, что формула A *следует* из логики $\mathbf{L}$ *на конечных моделях*, и писать[14] $\mathbf{L} \models_{\mathsf{fm}} A$, если для любой конечной модели M из $M \models \mathbf{L}$ следует $M \models A$. Дадим аналог для моделей определения 8.1.

Определение 8.3 (ПОКМ)**.** Логика $\mathbf{L}$ называется *полной относительно конечных моделей*,[15] если (даем эквивалентные, как мы покажем ниже, определения):

(M1) для любой формулы A имеем: $\mathbf{L} \vdash A \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L} \models_{\mathsf{fm}} A$;
(M2) для любой формулы A, если $\mathbf{L} \nvdash A$, то найдется конечная модель M, такая что $M \models \mathbf{L}$ и $M \not\models A$;
(M3) $\mathbf{L}$ — логика некоторого класса конечных моделей $\mathcal{M}$, то есть $\mathbf{L} = \mathsf{Logic}(\mathcal{M})$;
(M4) $\mathbf{L}$ — логика класса $\mathcal{M}_{\mathbf{L}}$ всех конечных моделей, в которых истинна $\mathbf{L}$, то есть $\mathbf{L} = \mathsf{Logic}(\mathcal{M}_{\mathbf{L}})$.
Здесь $\mathcal{M}_{\mathbf{L}} = \{M \mid M$ есть конечная модель и $M \models \mathbf{L}\}$.

Лемма 8.4. *Условия* (M1)*,* (M2)*,* (M3)*,* (M4) *эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Простое упражнение. □

Оказывается, два введенных понятия эквивалентны друг другу.

Теорема 8.5. *Логика ПОКШ тогда и только тогда, когда она ПОКМ.*

Доказательство. Докажем эквивалентность условий (F2) и (M2), а точнее, что существование конечной шкалы F, такой что $F \models \mathbf{L}$ и $F \not\models A$, равносильно существованию конечной модели M, такой что $M \models \mathbf{L}$ и $M \not\models A$.

Импликация в одну сторону очевидна: если $F \models \mathbf{L}$ и $F \not\models A$, то второе означает, что для некоторой модели $M = (F, V)$ имеем $M \not\models A$, а первое влечет $M \models \mathbf{L}$. Здесь даже не важно, что шкала F конечна.

Пусть теперь имеется *конечная* (это важно) модель $M = (F, V)$, такая что $M \models \mathbf{L}$ и $M \not\models A$. Очевидно, что $F \not\models A$. Но совсем не обязательно, что $F \models \mathbf{L}$. Мы покажем, что можно построить другую конечную шкалу F', для которой уже $F' \models \mathbf{L}$ и $F' \not\models A$. Для этого модель M преобразуем[16] в модель M', в которой любые две точки модально различимы.[17]

[12] Здесь «ff» является аббревиатурой для «finite frames».
[13] Английский эквивалент этого термина: “$\mathbf{L}$ has the *finite frame property*”, FFP.
[14] Здесь «fm» является аббревиатурой для «finite models».
[15] Английский эквивалент этого термина: “$\mathbf{L}$ has the *finite model property*”, FMP.
[16] Для тех, кто знаком с понятием фильтрации, можно сразу сказать, что M' — любая, например, минимальная фильтрация модели M сквозь отношение модальной эквивалентности $\equiv$.
[17] Напомним, что две точки a и b модели M называются *модально эквивалентными*, обозначение $a \equiv b$, если в них истинны одни и те же модальные формулы; *модально различимыми*, если они не являются модально эквивалентными.

Итак, рассмотрим $M' = (W', R', V')$, где $W' = W/{\equiv}$ — фактор-множество W по отношению $\equiv$; класс эквивалентности точки a будем обозначать $[a]$; отношение достижимости вводим так:

$$[a]\, R'\, [b] \quad \leftrightharpoons \quad \exists a_1 \equiv a \ \ \exists b_1 \equiv b\colon a_1\, R\, b_1.$$

Наконец, оценку переменных V' задаем канонически: $[a] \models p \leftrightharpoons a \models p$. Легко доказать следующие свойства получившейся модели:
– $M', [a] \models A \Leftrightarrow M, a \models A$ (доказывается индукцией по построению формулы A);
– в модели M' любые две точки модально различимы.

Теперь докажем следующее: *если $M = (F, V)$ — конечная модель, в которой любые две точки модально различимы, и в M истинны все подстановочные примеры формулы A, то $F \models A$.*

Действительно, в модели M каждая точка модально определима — для каждой точки $a \in W$ найдется модальная формула A_a, такая что для любой точки $b \in W$ имеем: $M, b \models A_a \Leftrightarrow a = b$ (упражнение). А значит, и любое подмножество $X \subseteq W$ модально определимо — имеется формула A_X, такая что для любой точки $b \in W$ имеем: $M, b \models A_X \Leftrightarrow b \in X$ (упражнение).

Теперь чтобы доказать, что $F \models A$, возьмем любую модель над шкалой $N = (F, U)$ и покажем, что $N \models A$. Для каждой переменной p возьмем модальную формулу A_p, определяющую в точности множество точек, где истинна эта переменная в модели N: $A_p := A_{U(p)}$. Для любой формулы B обозначим через B' формулу, полученную из B подстановкой $p := A_p$, для всех входящих в формулу B переменных p. Простой индукцией по построению формулы B доказывается: $N, a \models B \Leftrightarrow M, a \models B'$.

Поскольку в M истинны любые подстановочные примеры формулы A, то в ней истинна и формула A' (во всех точках). Следовательно, $N \models A$, что и требовалось. $\square$

Логика называется *конечно аксиоматизируемой*, если она представляется в виде $\mathbf{L} = \mathbf{K} + \Gamma$, для некоторого конечного множества формул Γ (обозначение $\mathbf{K} + \Gamma$ было введено в разделе 4).

Теорема 8.6 (Харроп)**.** *Конечно аксиоматизируемая финитно аппроксимируемая логика разрешима.*

Доказательство. С одной стороны, множество теорем логики $\mathbf{L}$ перечислимо:[18] можно порождать всевозможные конечные последовательности модальных формул и для каждой из них за конечное число шагов проверять, является ли она доказательством формулы A в логике $\mathbf{L}$ (это можно сделать за конечное число шагов, так как у логики $\mathbf{L}$ лишь конечное число аксиом), и если является — то остановиться.

С другой стороны, множество формул, не являющихся теоремами логики $\mathbf{L}$, тоже перечислимо: чтобы узнать, что данная формула не является теоремой логики $\mathbf{L}$, можно порождать всевозможные конечные шкалы[19] и для каждой из них, F, проверять, верно ли, что $F \models \mathbf{L}$ (это можно сделать, ибо в логике $\mathbf{L}$ лишь конечное число аксиом) и $F \not\models A$ (это тоже проверяется за конечное число шагов).

По теореме Поста (известному факту в теории алгоритмов), перечислимое множество с перечислимым дополнением является разрешимым. Можно даже предъявить явное рассуждение: для произвольной модальной формулы запускаем параллельно (на двух компьютерах) два описанных выше процесса; хотя бы один из них обязательно остановится (ведь данная формула либо является, либо не является теоремой логики $\mathbf{L}$); и по тому, какой из процессов остановился, мы и сделаем вывод, является ли данная формула теоремой логики $\mathbf{L}$. $\square$

[18] Это означает, что существует алгоритм, который принимает на вход произвольные формулы, останавливается на теоремах логики и не останавливается на остальных формулах.

[19] Например, с носителем $W \subseteq \mathbb{N}$, ведь нас интересуют шкалы с точностью до эквивалентности.

8.1 Финитная аппроксимируемость логики K

Можно дать элементарное доказательство полноты и разрешимости логики **K**, а точнее, полноты логики **K** относительно конечных моделей.

Сначала опишем «общую часть» конструкции, которую мы позже применим и для PDL.

8.2 О конечных максимальных непротиворечивых множествах формул

Пусть **L** — непротиворечивая модальная логика, Γ — непустое конечное множество формул, замкнутое относительно взятия подформул: $\mathsf{Sub}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Положим

$$\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma, \text{ где } \neg\Gamma = \{\neg A \mid A \in \Gamma\}.$$

Формулу A назовем **L**-*непротиворечивой* (или кратко *непротиворечивой*), если $\mathbf{L} \nvdash \neg A$. Мы будем часто пользоваться следующим свойством: дизъюнкция $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ непротиворечива тогда и только тогда, когда хотя бы один из дизъюнктивных членов A_i непротиворечив.

Множество формул $x \subseteq \Gamma'$ назовем *непротиворечивым*, если непротиворечива конъюнкция $\widehat{x}$ всех формул из x; *максимальным непротиворечивым* (МНМ), если оно является максимальным среди непротиворечивых подмножеств Γ'. Про МНМ можно доказать аналоги лемм 5.1 и 5.2. Лемма Линденбаума становится тривиальной, так как в конечном частично упорядоченном множестве, очевидно, над любым элементом есть максимальный. Лемма о МНМ нуждается в корректировке, но ее доказательство — прежнее.

Лемма 8.7 (Об МНМ)**.** *Пусть x — любое МНМ, A, B — любые формулы.*

(a) *Пусть $A, B \in \Gamma'$ и $\mathbf{L} \vdash A \to B$. Тогда если $A \in x$, то $B \in x$;*
(b) *Пусть $A \in \Gamma$. Тогда: $\neg A \in x \iff A \notin x$;*
(c) *Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \wedge B) \in x \iff A \in x$ и $B \in x$;*
(d) *Пусть $(A \vee B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \vee B) \in x \iff A \in x$ или $B \in x$;*
(e) *Пусть $(A \to B) \in \Gamma$. Тогда: $(A \to B) \in x \iff (A \in x \Rightarrow B \in x)$.*

Важное свойство множества W всех МНМ, верное для любой логики, дает следующая лемма. Ниже для $Q \subseteq W$ мы обозначаем $\overline{Q} = W \setminus Q$ и $\bigvee Q := \bigvee_{x \in Q} \widehat{x}$.

Лемма 8.8. *Для любой логики **L** и множества W всех максимальных непротиворечивых множеств формул $x \subseteq \Gamma'$, где $\Gamma' = \Gamma \cup \neg\Gamma$, а Γ — любое множество формул, верно следующее.*

а) $\vdash \bigvee W$.
б) $\vdash \bigvee Q \leftrightarrow \neg \bigvee \overline{Q}$.
в) $x \in Q \Leftrightarrow \vdash \widehat{x} \to \bigvee Q$.
г) *для любой формулы $A \in \Gamma$ имеем: $A \in x \Leftrightarrow$ формула $\widehat{x} \wedge A$ непротиворечива.*
д) $\vdash A \leftrightarrow \bigvee_{\{x \in W \mid A \in x\}} \widehat{x}$, *для всякой формулы $A \in \Gamma$.*

Доказательство. **а)** Пусть $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Имеем: $\vdash \bigvee_{i=1}^n (A_i \vee \neg A_i)$. Раскрываем скобки по дистрибутивности, получаем: $\vdash \bigvee_{\sigma \in 2^n} (A_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge A_n^{\sigma_n})$; здесь σ — набор из n нулей или единиц, $B^0 := \neg B$, $B^1 := B$. Среди этих 2^n конъюнкций мы можем выбросить **L**-противоречивые — очевидно, что получающаяся дизъюнкция будет эквивалентна в **L** прежней. Оставшиеся **L**-непротиворечивые конъюнкции представляют собой $\widehat{x}$ для всевозможных МНМ $x \subseteq \Gamma'$, то есть получили $\vdash \bigvee_{x \in W} \widehat{x}$.

б) Обозначим $A = \bigvee Q$, $B = \bigvee \overline{Q}$. С одной стороны, $\vdash A \vee B$ по пункту **а)**. С другой, если бы формула $A \wedge B$ была непротиворечива, то (по дистрибутивности $\wedge$ относительно $\vee$) был бы непротиворечив один из дизъюнктов: $\widehat{x} \wedge \widehat{y}$, где $x \in Q$ и $y \notin Q$. Но тогда это значило бы, что x не максимален, ибо содержится в большем непротиворечивом множестве $x \cup y$. Итак, $\vdash \neg(A \wedge B)$. Все вместе это означает $\vdash A \leftrightarrow \neg B$.

в) Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Если $x \notin Q$, то $\vdash \widehat{x} \to \bigvee \overline{Q}$. Поэтому если бы еще и $\vdash \widehat{x} \to \bigvee Q$, то $\vdash \widehat{x} \to \bot$ и тогда множество x оказалось бы противоречивым.

г) Импликация ($\Rightarrow$) очевидна. Докажем импликацию ($\Leftarrow$): пусть формула $\widehat{x} \wedge A$ непротиворечива, тогда если бы $A \notin x$, то ввиду максимальности $(\neg A) \in x$, ведь $(\neg A) \in \Gamma'$; и тогда множество x оказалось бы противоречивым.

д) Имеем: $\vdash B \leftrightarrow B \wedge \top \leftrightarrow B \wedge \bigvee_{x \in W} \widehat{x} \leftrightarrow \bigvee_{x \in W} (B \wedge \widehat{x})$.
В последней дизъюнкции **L**-противоречивые дизъюнкты можно выбросить; непротиворечивость же формулы формулы вида $B \wedge \widehat{x}$ равносильна $B \in x$, ввиду чего сама формула $B \wedge \widehat{x}$ эквивалентна $\widehat{x}$. $\square$

Недописано...

9 Дескрипционная логика

Историческая справка. *Дескрипционные логики* (description logics), или *логики описания понятий*, возникли в области *представления знаний* в конце 1970-х — начале 1980-х гг. Лишь в 1991 году K. Schield заметил, что базовая дескрипционная логика $\mathcal{ALC}$ есть не что иное, как записанная в других обозначениях модальная логика $\mathbf{K}_n$, из чего автоматически следует ее разрешимость и даже заимствуются известные в модальной логике разрешающие алгоритмы. Сейчас ДЛ используются для записи формальных *онтологий*, для чего был разработан Язык Сетевых Онтологий (Web Ontology Languages, OWL), который фактически является языком ДЛ, но записанным уже не в математических обозначениях, а в более подходящем для предствления в сети XML-формате. Разработаны также средства создания онтологий — редакторы онтологий, среди которых наиболее известный — Protégé (распространяется свободно).

Несмотря на то, что между дескрипционными логиками (ДЛ) и модальными логиками (МЛ) есть сходство (похожий синтаксис, фактически та же семантика), есть и значительные отличия:

1) в ДЛ изучаются более выразительные синтаксические конструкции, чем в МЛ; в частности, помимо аналогов связок $\Box$ и $\Diamond$ рассматриваются и другие связки, а также помимо аналогов формул рассматриваются и другие синтаксические объекты, среди которых главные — онтологии; при этом всегда следят за балансом «выразительность / разрешимость»: чем более выразительным становится язык, тем меньше шансов, что интересующие нас проблемы для такого языка будут разрешимыми, и при этом с невысокой вычислительной сложностью;
2) в МЛ обычно интересуются лишь разрешимостью логики, то есть разрешимостью проблемы выполнимости формул; в ДЛ же спектр рассматриваемых алгоритмических проблем шире — они приходят из практических потребностей; зачастую эти проблемы (в их модальной формулировке) никогда не изучались специалистами по МЛ (или изучались мало);
3) в ДЛ нет надобности в каких-либо аксиоматиках логик (соотвественно, не возникает и вопрос о полноте); основной акцент делается на изучении разрешимости той или иной проблемы для той или иной ДЛ, выяснении ее алгоритмической сложности (полиномиальная, экспоненциальная и т.п.), а главное — разработке разрешающих алгоритмов и их практической реализации и всевозможным оптимизациям; если некоторый язык ДЛ оказался достаточно сложным алгоритмически, то пытаются найти его фрагмент, в котором по-прежнему можно записать имеющиеся у нас знания о действительности, но который имеет меньшую алгоритмическую сложность.

9.1 Язык $\mathcal{ALC}$

Фиксируем два конечных (можно счетных) алфавита: $\mathsf{CN} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ — *имена понятий* (или *атомарные концéпты*), $\mathsf{RN} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ — *имена двуместных отношений* (или *атомарные роли*). Из них строятся сложные *понятия* (*концепты*) согласно следующему синтаксису, где $A \in \mathsf{CN}$, $R \in \mathsf{RN}$:

$$C, D \ ::= \ \bot \mid \top \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \exists R.C \mid \forall R.C$$

Семантика. *Интерпретация* — это структура

9.2 Терминологии (TBox). Системы фактов (ABox). Онтологии

9.3 Связь с модальной логикой

9.4 Расширенные языки (логика $\mathcal{ALCOIQ}$) и их свойства

9.5 Табло-алгоритм для логики $\mathcal{ALC}$ без и с терминологиями

10 Пропозициональная динамическая логика PDL

Историческая справка. Логика PDL впервые появилась в работе Fisher Ladner 1979 — они решили изучать пропозициональную часть динамической логики первого порядка, введенной ранее в работах Pratt 1976 и Harel 1979. Логика PDL (в каком виде?) изучалась также в работе Segerberg 1977, который дал первое (хотя и не корректное) доказательство полноты аксиоматики (ему потребовалось 5 лет, чтобы найти корректное доказательство). Позже появлялись и другие доказательства, основанные на совершенно других идеях. Элементарное доказательство полноты дали Kozen Parikh 1981 — его-то мы и приведем. Fisher-Ladner доказали, что PDL лежит в ExpTime, и на самом деле ExpTime-полна (они же?). Рассматривались также более выразительные варианты PDL— с обратными программами, с детерминированными программами, с пересечением программ, с дополнением программ, с нерегулярными программами. Изучались вопросы их полной аксиоматизации, разрешимости, сложности. Интересный факт: до сих пор открыт вопрос об интерполяционном свойстве для PDL, несмотря на многочисленные (в течение, кажется, 30 лет) неудачные (но опубликованные) попытки его доказать. Последнее некорректное доказательство опубликовано в 2002 году (T.Kowalski, Journal of Symbolic Logic) и опровергнуто в том же журнале через 2 года (но без указания, в чем именно ошибка).

10.1 Синтаксис и семантика логики PDL

Синтаксис. В языке логики PDL имеются два сорта «выражений» — формулы и программы. Соответственно, нам нужны два словаря «элементарных» выражений: $\Pi = \{a_0, a_1, \dots\}$ — счетное множество *атомарных программ*, $\mathsf{Var} = \{p_0, p_1, \dots\}$ — счетное множество *пропоцизиональных переменных*. Из них строятся *программы* и *формулы* совместной индукцией (где $a \in \Pi$, $p \in \mathsf{Var}$):

$$\begin{array}{lcl} \alpha & ::= & a \mid \alpha \cup \beta \mid \alpha \circ \beta \mid \alpha^* \mid (A?) \\ A & ::= & \bot \mid p \mid A \to B \mid [\alpha]\, A. \end{array}$$

Таким образом, в языке имеются модальности $[\alpha]$ для каждой программы. Заметим, что синтаксис программ ссылается на формулы, а синтаксис формул — на программы. Как обычно, остальные связки ($\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$) вводятся как сокращения. Вводится также модальность ромб: $\langle\alpha\rangle A := \neg[\alpha]\neg A$.

Множество всех формул языка PDL обозначим $\mathsf{Fm}(\mathsf{PDL})$, множество всех программ — $\mathsf{Prog}(\mathsf{PDL})$.

Пример программы: $a \cup \big((p \wedge [q? \circ b]\, p)? \big)^*$. Пример формулы: $[a]p \wedge \langle (p?)^* \rangle p$.

Интуитивный смысл формул и программ логики PDL: точки модели — это состояния компьютера; отношения R_a — это переходы между состояниями, отвечающие «элементарным» операторам a; формула вида $[\alpha]\, A$ означает, что из данного состояния, выполнив программу α, мы обязательно попадем в состояние, в котором выполняется формула A; выполнение программы $\alpha \circ \beta$ заключается в выполнении программы α, а затем программы β; выполнение программы $\alpha \cup \beta$ заключается в недетерминированном выборе — выполнить программу α или выполнить программу β; выполнение программы α^* заключается в выполнении некоторого (недетерминированного) конечного (быть может, нулевого) количества раз программы α; выполнение программы $A?$ заключается в проверке, выполняется ли в текущем состоянии компьютера формула A, и если да, то выполнять программу далее, иначе — остановиться.

Семантика. Модель Крипке логики PDL— это обычная модель с отношениями достижимости для каждой атомарной программы: $M = (W, (R_a)_{a \in \Pi}, V)$, где $W \neq \varnothing$, $R_a \subseteq W \times W$ для всех атомарных программ $a \in \Pi$, и $V(p) \subseteq W$ для каждой переменной $p \in \mathsf{Var}$. Далее определяются отношения R_α для всех программ α и отношение истинности формулы в точке $M, x \models A$ для всех формул A — естественно, совместной индукцией по построению программ и формул:

$$R_{\alpha \cup \beta} := R_\alpha \cup R_\beta, \qquad R_{\alpha \circ \beta} := R_\alpha \circ R_\beta, \qquad R_{\alpha^*} := (R_\alpha)^*, \qquad R_{A?} := \{\langle x, x\rangle \mid M, x \models A\};$$
$$M, x \models [\alpha]\, A \quad \leftrightharpoons \quad \forall y\ (x\, R_\alpha\, y \ \Rightarrow\ M, y \models A).$$

Здесь для отношения $R \subseteq W \times W$ через R^* обозначено *рефлексивно-транзитивное замыкание* отношения R; напомним, оно определяется так: $R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in W\}$, $R^{n+1} = R \circ R^n$, $R^* = \bigcup_{n \geqslant 0} R^n$.

Понятие формулы, истинной в модели, общезначимой на шкале, общезначимой, даются как обычно.

Программные конструкторы. В языке PDL можно выразить стадартные программные конструкторы, используемые в обычных языках программирования (ниже $\neg A?$ обозначает $(\neg A)?$):

if A then α else β	$(A? \circ \alpha) \;\cup\; (\neg A? \circ \beta)$
while A do α	$(A? \circ \alpha)^* \circ \neg A?$
repeat α until A	$\alpha \circ (\neg A? \circ \alpha)^* \circ A?$

Задача 10.1. Убедитесь, что выше приведены «правильные» интерпретации программных конструкторов в языке PDL, то есть согласованные с семантикой языков программирования. Более точно:

- Пусть π есть программа (if A then α else β). Тогда в модели Крипке точки x и y связаны отношением R_π (то есть $x\,R_\pi\,y$) тогда и только тогда, когда выполнено следующее: в точке x истинна формула A и $x\,R_\alpha\,y$, или в точке x ложна формула A и $x\,R_\beta\,y$.

- Пусть π есть программа (while A do α). Тогда в модели Крипке точки x и y связаны отношением R_π (то есть $x\,R_\pi\,y$) тогда и только тогда, когда выполнено следующее: точки x и y соединены конечным путем $x = x_0\,R_\alpha\,x_1\,R_\alpha \ldots R_\alpha x_n = y$, где $n \geqslant 0$ (при $n = 0$ это понимается как $x = y$), так что формула A истинна в точках x_i при всех $i < n$ и ложна в точке y.

- Пусть π есть программа (repeat α until A). Тогда в модели Крипке точки x и y связаны отношением R_π (то есть $x\,R_\pi\,y$) тогда и только тогда, когда выполнено следующее: точки x и y соединены конечным путем $x = x_0\,R_\alpha\,x_1\,R_\alpha \ldots R_\alpha x_n = y$, где $n \geqslant 1$, так что формула A ложна в точках x_i при $1 \leqslant i < n$ и истинна в точке $x_n = y$. (Про истинность формулы A в точке $x = x_0$ ничего не утверждается, что соответствует известному факту: тело цикла repeat выполняется хотя бы раз).

10.2 Аксиоматика логики PDL

- **Аксиомы** логики PDL:
  - все подстановочные примеры классических тавтологий (или аксиом логики высказываний);
  - $[\alpha](A \to B) \to ([\alpha]\,A \to [\alpha]\,B)$ для всех программ α и всех формул A, B;
  - аксиомы для операций над программами, для всех программ α и всех формул A, B:

(Ax1)	$[\alpha \cup \beta]\,A$	$\leftrightarrow$	$[\alpha]\,A \wedge [\beta]\,A$
(Ax2)	$[\alpha \circ \beta]\,A$	$\leftrightarrow$	$[\alpha][\beta]\,A$
(Ax3)	$[\alpha^*]\,A$	$\to$	A
(Ax4)	$[\alpha^*]\,A$	$\to$	$[\alpha][\alpha^*]\,A$
(Ax5)	$[B?]\,A$	$\leftrightarrow$	$(B \to A)$
(Ax6)	$[\alpha^*](A \to [\alpha]\,A) \to (A \to [\alpha^*]\,A)$		

- **Правила вывода** логики PDL: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$, (Nec) $\dfrac{A}{[\alpha]\,A}$, для всех программ α.

Аксиома (Ax6) называется *аксиомой индукции.* Если формула A выводима в логике PDL, то мы будем это записывать так: $\mathsf{PDL} \vdash A$; в этом случае также говорят, что A является *теоремой* логики PDL.

Задача 10.2. Выведите в PDL следующие формулы:

$$[?\top]\,A \leftrightarrow A \qquad [\alpha^*]\,A \;\leftrightarrow\; [\alpha^*][\alpha^*]\,A \qquad [\alpha^*]\,A \;\leftrightarrow\; A \wedge [\alpha^*][\alpha]\,A$$
$$\langle ?B \rangle A \;\leftrightarrow\; (B \wedge A) \qquad [\alpha][\alpha^*]\,A \;\leftrightarrow\; [\alpha^*][\alpha]\,A \qquad [\alpha^*]\,A \;\leftrightarrow\; A \wedge [\alpha^*][\alpha]\,A$$

Задача 10.3. (*) Докажите, что вместо аксиомы (Ax5) можно взять правило $\dfrac{A \to [\alpha]\,A}{A \to [\alpha^*]\,A}$.

Задача 10.4. (**) Докажите, что «логика оператора $[a^*]$» в PDL — в точности **S4**.

Две программы α и β называются *эквивалентными*, если $\mathsf{PDL} \vdash [\alpha]\,p \leftrightarrow [\beta]\,p$.

Задача 10.5. Докажите эквивалентность программ: $\alpha \cup (\beta \cup \gamma)$ и $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma$, $\alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ и $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma$, $\alpha \cup \beta$ и $\beta \cup \alpha$, дистрибутивность $\circ$ относительно $\cup$.

10.3 Полнота и разрешимость логики PDL

Лемма 10.6 (Корректность). *Все теоремы логики* PDL *общезначимы.*

Далее мы докажем полноту логики PDL (без “$A?$”) относительно конечных моделей: если формула не является теоремой, то у нее есть конечная контр-модель. Из этого легко следуют такие результаты:

Теорема 10.7 (Полнота). *Формула выводится в* PDL $\iff$ *она общезначима.*

Теорема 10.8 (Разрешимость). *Существует алгоритм, распознающий теоремы логики* PDL.

Мы уже вводили множество $\mathsf{Sub}(A)$ всех *подформул* формулы A (для обычного модального языка, но оно очевидным образом переносится и на язык логики PDL). Здесь же нам потребуется следующее обобщение этого понятия, включающее, помимо подформул, также и некоторые «близкие» формулы.

Пусть X — некоторое множество формул в языке логики PDL.

Определение 10.9. *Замыкание*[20] *Фишера–Ладнера* $\mathsf{FL}(X)$ множества формул X — это наименьшее множество формул Γ, содержащее X и удовлетворяющее следующим условиям:

- множество Γ замкнуто относительно подформул: $\mathsf{Sub}(\Gamma) \subseteq \Gamma$;
- если $[\alpha \cup \beta]\, A \in \Gamma$, то $[\alpha]\, A \in \Gamma$ и $[\beta]\, A \in \Gamma$;
- если $[\alpha \circ \beta]\, A \in \Gamma$, то $[\alpha][\beta]\, A \in \Gamma$;
- если $[\alpha^*]\, A \in \Gamma$, то $[\alpha][\alpha^*]\, A \in \Gamma$;
- если $[B?]\, A \in \Gamma$, то $B \in \Gamma$.

Упражнение 10.10. Постройте $\mathsf{FL}(X)$ для множества X, состоящего из одной аксиомы (Ax6).

Задача 10.11 (*). Докажите, что если множество формул X конечно, то и множество $\mathsf{FL}(X)$ конечно. Более того, его мощность линейно зависит от мощности множества X. Внимание: ввиду правила замыкания для $[\alpha^*]$ может показаться, что множество $\mathsf{FL}(X)$ может бесконечно расти; но это не так.

Мы готовы доказывать полноту PDL (без тестов “$A?$”) относительно конечных моделей. Пусть формула A_0 не является теоремой PDL. Покажем, что она опровергается в некоторой *конечной* модели. Эта модель напоминает каноническую модель (раздел 5), но она будет состоять из максимальных непротиворечивых подмножеств *конечного* множества формул (раздел 8.2) и потому будет конечной.

Рассмотрим конечные множества формул:

$$\Gamma \;:=\; \mathsf{FL}(\{A_0\}), \qquad \Gamma' \;:=\; \Gamma \cup \neg\Gamma.$$

Пусть W — множество всех максимальных PDL-непротиворечивых подмножеств множества Γ'.

Определение 10.12. Семейство $(R_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{Prog}}$ отношений $R_\alpha \subseteq W \times W$ будем называть

- *плоским*,[21] если $R_{\alpha\cup\beta} = R_\alpha \cup R_\beta$, $R_{\alpha\circ\beta} = R_\alpha \circ R_\beta$, $R_{\alpha^*} = (R_\alpha)^*$, для всех программ α, β;
- *вогнутым*, если $R_{\alpha\cup\beta} \subseteq R_\alpha \cup R_\beta$, $R_{\alpha\circ\beta} \subseteq R_\alpha \circ R_\beta$, $R_{\alpha^*} \subseteq (R_\alpha)^*$, для всех программ α, β;
- *выпуклым*, если $R_{\alpha\cup\beta} \supseteq R_\alpha \cup R_\beta$, $R_{\alpha\circ\beta} \supseteq R_\alpha \circ R_\beta$, $R_{\alpha^*} \supseteq (R_\alpha)^*$, для всех программ α, β.

Введем два важных семейства отношений на множестве W — для каждой программы α положим:

$$\begin{aligned} x\, R^{\mathsf{min}}_\alpha\, y \quad &\leftrightharpoons \quad \text{формула } \widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle \widehat{y} \text{ является PDL-непротиворечивой;} \\ x\, R^{\mathsf{max}}_\alpha\, y \quad &\leftrightharpoons \quad \text{для всех формул вида } [\alpha]\, A \in \Gamma \ \Big([\alpha]\, A \in x \;\Rightarrow\; A \in y \Big). \end{aligned}$$

[20] Обычно оператором *замыкания* называют отображение $\Phi\colon 2^U \to 2^U$ на множестве подмножеств некоторого множества U, такое, что $X \subseteq \Phi(X)$; $\Phi(\Phi(X)) = \Phi(X)$, и наконец, если $X \subseteq Y$, то $\Phi(X) \subseteq \Phi(Y)$. Легко видеть, что замыкание Фишера–Ладнера, преобразующее множества формул в множества формул, этими свойствами обладает.

[21] Вспомним, что определяя семантику PDL, мы задаем произвольным образом отношения R_a для атомарных программ $a \in \Pi$, а далее «доопределяем» их для всех программ согласно равенствам из определения плоского семейства. Тем самым, получающееся семейство отношений всегда является плоским.

Утверждение 1. $R^{\mathsf{min}}_\alpha \subseteq R^{\mathsf{max}}_\alpha$ для любой программы $\alpha \in \mathsf{Prog}$.

Пусть формула $\widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle\widehat{y}$ непротиворечива. Возьмем любую формулу $[\alpha]A \in \Gamma$, лежащую в x. Так как $A \in \Gamma$, то $(\neg A) \in \Gamma'$. Докажем, что $A \in y$. Допустим противное: $(\neg A) \in y$. Из непротиворечивости формулы $\widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle\widehat{y}$ вытекает непротиворечивость более слабой формулы $\widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle\neg A$, которая эквивалентна $\widehat{x} \wedge \neg[\alpha]A$. Но тогда $(\neg[\alpha]A) \in x$ и множество x оказалось противоречивым.

Утверждение 2. Семейство отношений R^{min}_α — вогнутое.

- Докажем: $R^{\mathsf{min}}_{\alpha\cup\beta} \;=\; R^{\mathsf{min}}_\alpha \cup R^{\mathsf{min}}_\beta$ (то есть даже равенство, хотя это и не потребуется).

$$\begin{array}{rcl}
x\, R^{\mathsf{min}}_{\alpha\cup\beta}\, y & \Longleftrightarrow & \text{формула } \widehat{x} \wedge \langle\alpha\cup\beta\rangle\widehat{y} \text{ непротиворечива}\\
& \Longleftrightarrow & \text{формула } \widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle\widehat{y} \text{ непротиворечива} \;\; \text{или}\\
& & \text{формула } \widehat{x} \wedge \langle\beta\rangle\widehat{y} \text{ непротиворечива}\\
& \Longleftrightarrow & x\, R^{\mathsf{min}}_\alpha\, y \;\; \text{или} \;\; x\, R^{\mathsf{min}}_\beta\, y\\
& \Longleftrightarrow & x\, (R^{\mathsf{min}}_\alpha \cup R^{\mathsf{min}}_\beta)\, y.
\end{array}$$

Здесь использована выводимость: $\mathsf{PDL} \vdash \langle\alpha\cup\beta\rangle A \;\leftrightarrow\; \langle\alpha\rangle A \vee \langle\beta\rangle A$. (Для $\subseteq$ достаточно $\rightarrow$?)

- Докажем: $R^{\mathsf{min}}_{\alpha\circ\beta} \;\subseteq\; R^{\mathsf{min}}_\alpha \circ R^{\mathsf{min}}_\beta$.

$$\begin{array}{rcl}
x\, R^{\mathsf{min}}_{\alpha\circ\beta}\, y & \Longleftrightarrow & \text{формула } \widehat{x} \wedge \langle\alpha\circ\beta\rangle\widehat{y} \text{ непротиворечива}\\
& \overset{(a)}{\Longleftrightarrow} & \text{формула } \widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle\widehat{y} \text{ непротиворечива}\\
& \overset{(b)}{\Longleftrightarrow} & \text{формула } \bigvee_{z\in W}\Big(\widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle(\widehat{z} \wedge \langle\beta\rangle\widehat{y})\Big) \text{ непротиворечива}\\
& \Longleftrightarrow & \text{формула } \widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle(\widehat{z} \wedge \langle\beta\rangle\widehat{y}) \text{ непротиворечива, для некоторого } z \in W\\
& \overset{(c)}{\Longrightarrow} & \text{формула } \widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle\widehat{z} \text{ непротиворечива} \;\; \text{и}\\
& & \text{формула } \widehat{z} \wedge \langle\beta\rangle\widehat{y} \text{ непротиворечива, для некоторого } z \in W\\
& \Longleftrightarrow & x\, R^{\mathsf{min}}_\alpha\, z \;\; \text{и} \;\; z\, R^{\mathsf{min}}_\beta\, y, \text{ для некоторого } z \in W\\
& \Longleftrightarrow & x\, (R^{\mathsf{min}}_\alpha \circ R^{\mathsf{min}}_\beta)\, y.
\end{array}$$

Здесь (a) использует аксиому $(\mathsf{Ax2})$; (b) использует Лемму 8.8(a) и дистрибутивность $\langle\alpha\rangle$ и $\wedge$ относительно $\vee$; (c) использует факт, верный для любой нормальной логики (упражнение): *если формула $A \wedge \langle\alpha\rangle(B \wedge \langle\beta\rangle C)$ непротиворечива, то формулы $A \wedge \langle\alpha\rangle B$ и $B \wedge \langle\beta\rangle C$ тоже.* Первое утверждение использует монотонность оператора $\langle\alpha\rangle$, второе — правило усиления.

- Докажем: $R^{\mathsf{min}}_{\alpha^*} \;\subseteq\; (R^{\mathsf{min}}_\alpha)^*$ (это самое сложное, здесь нужна аксиома индукции).

Пусть $x\, R^{\mathsf{min}}_{\alpha^*}\, y$. Обозначим $S := R^{\mathsf{min}}_\alpha$. Надо доказать: $x\, S^*\, y$. Рассмотрим множество $Q := S^*(x)$. Надо доказать, что $y \in Q$. Очевидно: $x \in Q$, а также если $u \in Q$ и $u\, S\, v$, то $v \in Q$.

Рассмотрим формулу $Y := \bigvee Q$. Вспомним, что $\vdash \neg Y \leftrightarrow \bigvee \overline{Q}$.

Утверждение. $\mathsf{PDL} \;\vdash\; Y \rightarrow [\alpha]Y$.

Действительно, иначе формула $Y \wedge \langle\alpha\rangle\neg Y$ была бы непротиворечивой, а она, по дистрибутивности $\langle\alpha\rangle$ и $\wedge$ относительно $\vee$, эквивалентна дизъюнкции $\bigvee_{u\in Q, v\in\overline{Q}}(\widehat{u} \wedge \langle\alpha\rangle\widehat{v})$. Но ее непротиворечивость влекла бы непротиворечивость какого-то дизъюнктивного члена $\widehat{u} \wedge \langle\alpha\rangle\widehat{v}$. Это означало бы $u\, S\, v$, что при $u \in Q$ и $v \notin Q$ невозможно, ввиду замкнутости множества Q относительно S.

Теперь в PDL выводим $\vdash [\alpha^*](Y \rightarrow [\alpha]Y)$ и $\vdash Y \rightarrow [\alpha^*]Y$, пользуясь аксиомой индукции. Поскольку $x \in Q$, имеем $\vdash \widehat{x} \rightarrow Y$, а значит $\vdash \widehat{x} \rightarrow [\alpha^*]Y$. (#)

Итак, докажем, что $y \in Q$, то есть $\vdash \widehat{y} \rightarrow Y$. Если бы $y \notin Q$, то $\vdash \widehat{y} \rightarrow \neg Y$, что вместе с (#) влекло бы $\vdash \widehat{x} \rightarrow [\alpha^*]\neg\widehat{y}$, то есть противоречивость формулы $\widehat{x} \wedge \langle\alpha^*\rangle\widehat{y}$, вопреки условию $x\, S_{\alpha^*}\, y$.

Утверждение 3. Семейство отношений R_α^{max} — выпуклое.

- Докажем: $R_{\alpha\cup\beta}^{\mathsf{max}} \supseteq R_\alpha^{\mathsf{max}} \cup R_\beta^{\mathsf{max}}$.

  Пусть $x\, R_\alpha^{\mathsf{max}}\, y$ (в случае β аналогично). Докажем, что $x\, R_{\alpha\cup\beta}^{\mathsf{max}}\, z$. Возьмем любую формулу вида $[\alpha\cup\beta]\, A \in \Gamma$, лежащую в x. По построению замыкания Фишера–Ладнера $[\alpha]\, A \in \Gamma$. По аксиоме $(\mathsf{Ax1})$ имеем $\mathsf{PDL} \vdash [\alpha\cup\beta]\, A \to [\alpha]\, A$. Значит, $[\alpha]\, A \in x$ и тогда $A \in y$, ибо $x\, R_\alpha^{\mathsf{max}}\, y$.

- Докажем: $R_{\alpha\circ\beta}^{\mathsf{max}} \supseteq R_\alpha^{\mathsf{max}} \circ R_\beta^{\mathsf{max}}$.

  Пусть $x\, R_\alpha^{\mathsf{max}}\, y\, R_\beta^{\mathsf{max}}\, z$. Докажем, что $x\, R_{\alpha\circ\beta}^{\mathsf{max}}\, z$. Возьмем любую формулу вида $[\alpha\circ\beta]\, A \in \Gamma$, лежащую в x. По построению замыкания Фишера–Ладнера $[\alpha][\beta]\, A \in \Gamma$. По аксиоме $(\mathsf{Ax2})$ имеем $\mathsf{PDL} \vdash [\alpha\circ\beta]\, A \to [\alpha][\beta]\, A$. Значит, $[\alpha][\beta]\, A \in x$, откуда $[\beta]\, A \in y$ и, наконец, $A \in z$.

- Докажем: $R_{\alpha^*}^{\mathsf{max}} \supseteq (R_\alpha^{\mathsf{max}})^*$.

  Для этого достаточно доказать:[22] **а)** $R_{\alpha^*}^{\mathsf{max}} \supseteq \mathsf{Id}(W)$; **б)** $R_{\alpha^*}^{\mathsf{max}} \supseteq R_\alpha^{\mathsf{max}} \circ R_{\alpha^*}^{\mathsf{max}}$.
  Ибо тогда индукцией по n доказывается $R_{\alpha^*}^{\mathsf{max}} \supseteq (R_\alpha^{\mathsf{max}})^n$, а значит, и требуемое включение.

  а) Надо доказать: $x\, R_{\alpha^*}^{\mathsf{max}}\, x$. Возьмем любую формулу вида $[\alpha^*]\, A \in \Gamma$, лежащую в x. Поскольку $\mathsf{PDL} \vdash [\alpha^*]\, A \to A$, то $A \in x$, что и требовалось.

  б) Пусть $x\, R_\alpha^{\mathsf{max}}\, y\, R_{\alpha^*}^{\mathsf{max}}\, z$. Докажем, что $x\, R_{\alpha^*}^{\mathsf{max}}\, z$. Возьмем любую формулу вида $[\alpha^*]\, A \in \Gamma$, лежащую в x. Поскольку $\mathsf{PDL} \vdash [\alpha^*]\, A \to [\alpha][\alpha^*]\, A$ и $[\alpha][\alpha^*]\, A \in \Gamma$ по построению замыкания Фишера–Ладнера, то $[\alpha][\alpha^*]\, A \in x$, откуда $[\alpha^*]\, A \in y$ и, наконец, $A \in z$.

Мы готовы строить PDL-модель $M = (W, (R_a)_{a\in\Pi}, V)$:

- W — множество всех МНМ $x \subseteq \Gamma'$;
- R_a — любое отношение,[23] удовлетворяющее включениям $R_a^{\mathsf{min}} \subseteq R_a \subseteq R_a^{\mathsf{max}}$, для каждой $a \in \Pi$;
- $x \models p \;\leftrightharpoons\; p \in x$, для всякой переменной $p \in \Gamma$.

Так как R_α^{min} — вогнутое, R_α — плоское, R_α^{max} — выпуклое семейства отношений, то (индукцией по построению программ) легко показать, что $R_\alpha^{\mathsf{min}} \subseteq R_\alpha \subseteq R_\alpha^{\mathsf{max}}$ для любой программы α.

Лемма 10.13 (Ключевая лемма)**.** *Для любых $x, y \in W$ и $A \in \Gamma$ имеем: $M, x \models A \iff A \in x$.*

Этой леммы достаточно для завершения доказательства полноты PDL: поскольку $\neg A_0$ является непротиворечивой формулой, то она содержится в некотором МНМ x, а значит, $A_0 \notin x$ и по ключевой лемме $M, x \not\models A_0$; тем самым мы предъявили конечную контрмодель формулы A_0.

Доказательство. Индукция по построению формулы A. База индукции: случаи $A = \bot$ и $A = p$ тривиальны. Шаг индукции. Случай $A = (B \to C)$ очевиден. Остается случай $A = [\alpha]\, B$. Имеем:

$$\begin{aligned} x \models [\alpha]\, B &\iff \forall y \in W\, (\, x\, R_\alpha\, y \;\Rightarrow\; y \models B) \\ &\iff \forall y \in W\, (\, x\, R_\alpha\, y \;\Rightarrow\; B \in y) \\ &\iff [\alpha]\, B \in x. \end{aligned}$$

Первая эквивалентность — по определению семантики, вторая — по предположению индукции; докажем третью. Импликация $(\Leftarrow)$ — легкая: если $[\alpha]\, B \in x$ и $x\, R_\alpha\, y$, то $x\, R_\alpha^{\mathsf{max}}\, y$, откуда $B \in y$. Остается доказать обратную импликацию $(\Rightarrow)$. Как обычно в таких случаях, она доказывается от противного. Заметим, что коль скоро $[\alpha]\, B \in \Gamma$, мы имеем $B \in \Gamma$, $\neg[\alpha]\, B \in \Gamma'$ и $\neg B \in \Gamma'$.

Предположим[24] $[\alpha]\, B \notin x$, тогда $\neg[\alpha]\, B \in x$. Поэтому формула $\widehat{x} \wedge \neg[\alpha]\, B$, а значит, и эквивалентная ей формула $\widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle\neg B$ непротиворечива. Формула $\neg B$ эквивалентна дизъюнкции содержащих ее МНМ. Ввиду дистрибутивности $\langle\alpha\rangle$ и $\wedge$ относительно $\vee$, хотя бы для одного МНМ $y \in W$, содержащего формулу $\neg B$, формула $\widehat{x} \wedge \langle\alpha\rangle\widehat{y}$ непротиворечива, то есть $x\, R_\alpha^{\mathsf{min}}\, y$. Отсюда $x\, R_\alpha\, y$, а также $B \notin y$. $\square$

Что делать с программами «$A?$»?

[22] Напомним: $\mathsf{Id}(W) = \{(x,x) \mid x \in W\}$ — диагональ множества W (отношение равенства на W). Заметим: $R_{\top?} = \mathsf{Id}(W)$.

[23] Может, вообще верно $R_a^{\mathsf{min}} = R_a^{\mathsf{max}}$, для всех *атомарных* программ a? И тогда выбор R_a однозначен.

[24] Возникает вопрос, почему мы не рассуждаем как обычно: докажем, что множество $Y = \{C \mid [\alpha]C \in x\} \cup \{\neg B\}$, непротиворечиво, и погрузим его в некоторый $y \in W$. Дело в том, что так мы получим (конечно же $B \notin y$) лишь $x\, R_\alpha^{\mathsf{max}}\, y$, тогда как нужно нам $x\, R_\alpha\, y$. Само семейство R_α^{max} нам не годится, ибо оно вообще говоря не плоское.

11 Градуированная модальная логика

Историческая справка. Градуированные модальные формулы строятся как обычные формулы, только помимо модальности $\Diamond$ («существует последователь, такой что...») в них используются модальности $\Diamond^{\geqslant n}$ («существует не менее n последователей, таких что...»). Первая серьезная статья про них — Kit Fine "In so many possible worlds" (1972), где дана аксиоматика и доказана теорема о полноте. Далее последовали: серия работ "Graded modalities I, II, ..., VII" (1985–1999) итальянских авторов (Fattorosi-Barnaba, de Caro, Cerrato и др.), (причем первые 4 статьи (до 94 года) они писали, не зная о существовании работы K.Fine), в этих работах строились аксиоматики градуированных логик и доказывалась их полнота, устанавливалась разрешимость градуированных логик (некоторые доказательства содержат ошибки, иправленные, в работах других авторов, лишь в 2007), строились канонические модели и изучались другие вопросы; глава 4 диссертации Wiebe van der Hoek (1992), где исследовались для этого языка модальная определимость классов шкал, фильтрация, бисимуляция, автоматическое построение первопорядковых эквивалентов (аналог теоремы Салквиста); статья Maarten de Rijke "A note on graded modal logic" (2000), где введено (более громоздкое) понятие бисимуляции и доказаны аналоги теорем ван Бентема о характеризации данного языка внутри языка первого порядка и критерий аксиоматизируемости классов моделей Крипке с выделенной точкой; Stephan Tobies (2001) предъявил PSpace-алгоритм для градуированной модальной логики. Один из недавних результатов — теорема (Золин, 2011) о том, что градуированная модальная логика с обратными модальностями класса транзитивных шкал неразрешима; теорема о совпадении понятий бисимуляционной эквивалентности по van der Hoek и de Rijke (2017). В настоящее время градуированная модальная логика используется, например, в области представления знаний — она является фрагментом дескрипционной логики $\mathcal{ALCQ}$ и других логик, применяемых для построения формальных онтологий.

11.1 Синтаксис, семантика, аксиомы

Синтаксис: градуированные модальные формулы:[25] $A \ ::= \ p \ \mid \ \neg A \ \mid \ A \to B \ \mid \ \Diamond^{\geqslant n} A$, где $n \geqslant 1$.

Вводятся сокращения:

$$\Diamond A := \Diamond^{\geqslant 1} A,\ \Box A := \neg\Diamond\neg A,\ \Diamond^{>n} A := \Diamond^{\geqslant (n+1)} A,\ \Diamond^{\leqslant n} A = \neg\Diamond^{>n} A,\ \Diamond^{<n} A = \neg\Diamond^{\geqslant n} A,\ \Diamond^{=n} A := \ \Diamond^{\geqslant n} A \wedge \Diamond^{\leqslant n} A.$$

Также вводят: $\Box^{\leqslant n} A := \Diamond^{\leqslant n}\neg A$ и $\Box^{<n} A := \Diamond^{<n}\neg A$. Тем самым $\Box^{\leqslant n}$ двойственен к $\Diamond^{>n}$, а $\Box^{<n}$ двойственен к $\Diamond^{\geqslant n}$. Заметим еще, что $\Box = \Box^{\leqslant 0}$.

Вместо «градуированная модальная формула» мы пишем «GML-формула» или просто «формула».

Семантика: GML-формулы интерпретируются в обычных моделях Крипке $M = (W, R, V)$, лишь нужно дать пункт определения, касающийся градуированных модальностей: формула $\Diamond^{\geqslant n} A$ истинна в точке, если у этой точки есть $\geqslant n$ последователей, где истинна формула A:

$$M, x \models \Diamond^{\geqslant n} A \quad \leftrightharpoons \quad \bigl|\{y \in W \ : \ x\,R\,y \ \ \& \ \ M, y \models A\}\bigr| \geqslant n.$$

Остальные (введенные сокращениями) модальности имеют очевидный смысл; в частности, формула $\Box^{\leqslant n} A$ истинна в точке x, если формула A истинна во всех последователях точки x, за исключением $\leqslant n$ таковых. Заметим, что модальность $\Diamond^{\leqslant n} A$, несмотря на наличие символа «робм» в ее обозначении, не утверждает *существования* последователей, где верна формула A. Для сравнения: в естественном языке фраза «Существует не более 10 учёных, понимающих доказательство Великой теоремы Ферма», строго говоря, не означает наличие хотя бы одного учёного с данным свойством.

Все стандартные понятия (истинность в модели, общезначимость в шкале и т.п.) формулируются как обычно. В частности, формула называется *общезначимой*, если она общезначима во всех шкалах.

Для градуированной модальной логики естественно рассматривать те же вопросы, что и для обычной модальной логики: как аксиоматизировать все общезначимые GML-формулы (или все формулы, общезначимые на том или ином классе шкал); разрешимо ли свойство быть общезначимой GML-формулой и какова вычислительная сложность проблемы распознавания общезначимости; какие классы шкал можно задать градуированными модальными формулами; каков естественный аналог понятия

[25] Мы выбрали набор связок $\{\neg, \to\}$. Если же брать набор $\{\bot, \to\}$, то нужно будет либо добавлять аксиому $\neg\Diamond\bot$, которая в противном случае невыводима, либо добавлять непосредственно в язык модальность $\Box$ и вводить аксиому двойственности $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$. Это не специфика градуированной модальной логики, а ньюанс, имеющий место и для обычной модальной логики, если в ней в качестве базовой модальности выбирается ромб, а не бокс.

бисимуляции, который бы гарантировал сохранение истинности GML-формул; каковы операции над моделями, сохраняющие истинность GML-формул.

11.2 Аксиоматика минимальной градуированной модальной логики GrK

Аксиомы:[26] (для всех $n, m \geqslant 1$)

(G0) классические тавтологии
(G1) $\Box(p \to q) \ \to \ (\Diamond^{\geqslant n} p \to \Diamond^{\geqslant n} q)$
(G2) $\Diamond^{\geqslant (n+1)} p \ \to \ \Diamond^{\geqslant n} p$
(G3) $\neg\Diamond(p \wedge q) \ \wedge \ \Diamond^{= n} p \ \wedge \ \Diamond^{= m} q \ \to \ \Diamond^{= n+m}(p \vee q)$

Правила вывода — обычные: modus ponens, правило подстановки и правило $\dfrac{A}{\Box A}$.

Лемма 11.1. *Исчисление* **GrK**, *равно как и любое исчисление в GML-языке, содержащее аксиомы* (G0) *и* (G1) *и правила* (MP), (Sub), (Nec), *замкнуто относительно правила эквивалентной замены:*

$$\frac{A \leftrightarrow B}{C[A/p] \leftrightarrow C[B/p]}.$$

Доказательство. Индукция по построению формулы C. Единственный нетривиальный случай: $C = \Diamond^{\geqslant n} D$. Итак, надо доказать замкнутость относительно правила $A \leftrightarrow B \vdash \Diamond^{\geqslant n} A \leftrightarrow \Diamond^{\geqslant n} B$. Это просто: из $A \leftrightarrow B$ выводим $A \to B$, затем $\Box(A \to B)$, и по аксиоме (G1) (к которой применили подстановку $A/p, B/q$) получаем $\Diamond^{\geqslant n} A \to \Diamond^{\geqslant n} B$. Обратная импликация выводится аналогично. $\Box$

Лемма 11.2. *В логике* **GrK** *выводимы следующие формулы, для всех* $n, m \geqslant 1$*:*

(G4) $\Box(p \to q) \to (\Box^{\leqslant n} p \to \Box^{\leqslant n} q)$
(G5) $\Box(p \to q) \ \to \ (\Box p \to \Box q)$
(G6) $\Diamond^{= n} p \ \to \ \Diamond^{\leqslant m} p \qquad (n \leqslant m)$
(G7) $\neg(\Diamond^{= n} p \wedge \Diamond^{= m} p) \qquad (n \neq m)$
(G8) $\Diamond^{\leqslant n} p \ \leftrightarrow \ \big(\Diamond^{= 0} p \vee \ldots \vee \Diamond^{= n} p\big)$
(G9) $\Diamond^{\geqslant n}(p \wedge q) \ \to \ \Diamond^{\geqslant n} p \wedge \Diamond^{\geqslant n} q$
(G10) $\Diamond^{\geqslant n} p \vee \Diamond^{\geqslant n} q \ \to \ \Diamond^{\geqslant n}(p \vee q)$
(G11) $\Diamond^{\leqslant n} p \wedge \Diamond^{\leqslant m} q \ \to \ \Diamond^{\leqslant n+m}(p \vee q)$
(G12) $\Diamond^{\geqslant n}(p \wedge q) \wedge \Diamond^{\geqslant m}(p \wedge \neg q) \ \to \ \Diamond^{\geqslant n+m} p$
(G13) $\Diamond^{\geqslant n} p \ \leftrightarrow \ \bigvee\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} \Diamond^{\geqslant i}(p \wedge q) \wedge \Diamond^{\geqslant (n-i)}(p \wedge \neg q)$

Доказательство. См. [van der Hoek, 1993]. Лишь формулу (G13) он не рассматривал, она была у Файна, и мы на нее опираемся ниже в доказательстве полноты, поэтому ее нужно вывести. $\Box$

[26] Аксиомы взяты из van der Hoek (1993). Kit Fine (1972) вместо (G3) брал (G13).

11.3 Теорема о полноте исчисления GrK

Теорема 11.3 (Fine, 1972)**.** *Формула выводится в исчислении* **GrK** $\iff$ *она общезначима.*

Остаток раздела 11.3 посвящен доказательству данной теоремы. Корректность, то есть общезначимость аксиом исчисления **GrK** легко проверить. Докажем полноту, то есть выводимость в **GrK** любой общезначимой GML-формулы. Это будет модифицированный метод канонической модели.[27]

Сначала возьмем обычную каноническую модель $M = (W, R, V)$ для логики **GrK**, где

- W есть множество всех максимальных **GrK**-непротиворечивых множеств GML-формул;
- $x\,R\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$;
- $x \in V(p) \leftrightharpoons p \in x$.

Далее для каждого $n \geqslant 1$ введем на множестве W отношение R_n следующим образом:[28]

- $x\,R_n\,y \;\leftrightharpoons\;$ для всех формул A имеем: $(\Box^{<n} A \in x \;\Rightarrow\; A \in y)$.

Очевидно, $R = R_1$. Ввиду аксиомы (G2) имеем включения: $R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq \ldots$ Если обозначить $x^{<n} = \{A \mid \Box^{<n} A \in x\}$, то определение отношения R_n можно записать кратко: $x\,R_n\,y \;\leftrightharpoons\; x^{<n} \subseteq y$.

Мы готовы строить окончательную модель $\mathbb{M} = (\mathbb{W}, \mathbb{R}, \mathbb{V})$. Положим[29]

- $\mathbb{W} = W \times \mathbb{N}$ (будем считать для удобства, что $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$)
- $\langle x, m\rangle\,\mathbb{R}\,\langle y, n\rangle \;\leftrightharpoons\; x\,R_n\,y$ (независимо от m)
- $\langle x, m\rangle \in \mathbb{V}(p) \;\leftrightharpoons\; x \in V(p)$, то есть $\Leftrightarrow p \in x$ (независимо от m)

Лемма 11.4 (Ключевая)**.** $\mathbb{M}, \langle x, m\rangle \models A \iff A \in x,$ *для любой формулы A, любых $x \in W$, $m \in \mathbb{N}$.*

Как обычно, этой леммы достаточно для завершения доказательства теоремы: если **GrK** $\nvdash A$, то множество $\{\neg A\}$ является **GrK**-непротиворечивым. По лемме Линденбаума оно содержится в некотором максимальном **GrK**-непротиворечивом множестве $x \in W$. Тогда по ключевой лемме $\mathbb{M}, \langle x, 1\rangle \not\models A$ и тем самым формула A не является общезначимой.

Ключевая лемма доказывается индукцией по построению формулы A. Главный случай:

$$\begin{aligned}\langle x, m\rangle \models \Diamond^{\geqslant n} A \;&\overset{\text{def}}{\iff}\; \big|\{\langle y, \ell\rangle \;\mid\; \langle x, m\rangle\,\mathbb{R}\,\langle y, \ell\rangle \text{ и } \langle y, \ell\rangle \models A\}\big| \geqslant n \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff}\; \big|\{\langle y, \ell\rangle \;\mid\; x\,R_\ell\,y \text{ и } A \in y\}\big| \geqslant n \\ &\iff\; |T_x(A)| \geqslant n \;\overset{(*)}{\iff}\; \Diamond^{\geqslant n} A \in x.\end{aligned}$$

Все эквивалентности, кроме последней, очевидны. На предпоследнем шаге мы обозначили

$$T_x(A) \;=\; \{\langle y, \ell\rangle \in \mathbb{W} \;\mid\; x\,R_\ell\,y \text{ и } A \in y\}.$$

Ввиду тавтологии $A \leftrightarrow (A \wedge B) \oplus (A \wedge \neg B)$, имеем: $T_x(A) \;=\; T_x(A \wedge B) \sqcup T_x(A \wedge \neg B)$. $(\sqcup)$

Осталось доказать эквивалентность $\overset{(*)}{\iff}$; она будет доказана ниже в лемме 11.6.

---

[27] В обычной канонической модели, если у точки x есть последователь y, содержащий какую-то нужную нам формулу (или формулы), то нас не интересовало, сколько именно таких y имеется в модели; и в типичном случае таких последователей существовало континуум. Теперь же нам нужно строго следить, сколько последователей какого-то типа имеется у данной точки. Например, это нужно, чтобы из $\Diamond^{\leqslant n} A \in x$ всегда следовало $x \models \Diamond^{\leqslant n} A$, то есть чтобы у такой точки x было $\leqslant n$ последователей, в которых истинна (или, что эквивалентно, содержится) формула A.

[28] Для сравнения дадим эквивалентные определения R и R_n через ромбы:

$$x\,R\,y \;\leftrightharpoons\; \text{для всех формул } A \text{ имеем: } (A \in y \;\Rightarrow\; \Diamond A \in x);$$
$$x\,R_n\,y \;\leftrightharpoons\; \text{для всех формул } A \text{ имеем: } (A \in y \;\Rightarrow\; \Diamond^{\geqslant n} A \in x).$$

[29] Интуитивно, мы продублируем каждую точку $x \in W$ канонической модели счетное число раз. Подчеркнем, что для фиксированного $x \in W$, каждая точка $\langle x, m\rangle$ будет $\mathbb{R}$-видеть одни и те же точки и будет считать истинными одни и те же переменные, то есть будет неотличима от других пар вида $\langle x, m'\rangle$. Смысл же конструкции в том, что точка $\langle y, n\rangle$ будет $\mathbb{R}$-видима только из тех точек $\langle x, m\rangle$, которым это нужно согласно имеющимся в них GML-формулам.

Лемма 11.5. $\mathbf{GrK} \vdash \Diamond^{\geqslant n} A \longrightarrow \Box(A \to B) \vee \Box(A \to \neg B) \vee \bigvee_{0<i<n} \Diamond^{\geqslant i}(A \wedge B) \wedge \Diamond^{\geqslant n-i}(A \wedge \neg B)$ *при* $n \geqslant 2$.

Доказательство. Обозначим $\Phi_i := \Diamond^{\geqslant i}(A \wedge B) \wedge \Diamond^{\geqslant n-i}(A \wedge \neg B)$. Имеем следующую тавтологию α:

$$\Box(A \to B) \ \vee \ \Box(A \to \neg B) \ \vee \ \big(\Diamond(A \wedge B) \wedge \Diamond(A \wedge \neg B)\big).$$

Поэтому если $\Diamond^{\geqslant n} A$, то верен первый или второй дизъюнкт из α, или же третий дизъюнкт и, согласно аксиоме (G13), дизъюнкция $\Phi_0 \vee \ldots \vee \Phi_n$. Но при наличии третьего дизъюнкта из α имеем: Φ_0 влечет Φ_1, а Φ_n влечет Φ_{n-1}. Отсюда получаем $\Phi_1 \vee \ldots \vee \Phi_{n-1}$. □

Лемма 11.6. $|T_x(A)| \geqslant n \overset{(*)}{\iff} \Diamond^{\geqslant n} A \in x,$ *для любых* $n \geqslant 1$*, любой GML-формулы* A *и точки* $x \in W$.

Доказательство. Индукция по n, причем сразу для всех формул A и всех $x \in W$.[30]

($\Longleftarrow$) Пусть $\Diamond^{\geqslant n} A \in x$. Согласно лемме 11.5 возможны два случая:

1) Для некоторой формулы B имеется $0 < i < n$, такой что $\Diamond^{\geqslant i}(A \wedge B) \in x$ и $\Diamond^{\geqslant n-i}(A \wedge \neg B) \in x$. (Это возможно лишь при $n \geqslant 2$.) Тогда по предположению индукции (для i и $n-i$), пользуясь ($\sqcup$), имеем:

$$|T_x(A)| \ = \ |T_x(A \wedge B)| + |T_x(A \wedge \neg B)| \ \geqslant \ i + (n - i) = n.$$

2) Для каждой формулы B имеем: $\Box(A \to B) \in x$ или $\Box(A \to \neg B) \in x$. В частности, это имеет место для каждой формулы B из $x^{<n}$. Поэтому возможны подслучаи:

2a) Для некоторой формулы $B \in x^{<n}$ имеем $\Box(A \to \neg B) \in x$. Тогда $(\Diamond^{\geqslant n} A \to \Diamond^{\geqslant n} \neg B) \in x$ по аксиоме (G1). Но $\Diamond^{\geqslant n} A \in x$, значит, $\Diamond^{\geqslant n} \neg B \in x$, то есть $\neg \Box^{<n} B \in x$. Это противоречит тому, что $B \in x^{<n}$.

2b) Для каждой формулы $B \in x^{<n}$ имеет место $\Box(A \to B) \in x$.

Вспомним, что нам нужно доказать, что $|T_x(A)| \geqslant n$. Рассмотрим множество формул $Y := x^{<n} \cup \{A\}$. Если мы докажем, что оно непротиворечиво, то найдется $y \in W$, такой что $Y \subseteq y$. Тогда $A \in y$ и $x\, R_n\, y$, а значит, для всех $1 \leqslant \ell \leqslant n$ имеем $x\, R_\ell\, y$ и тем самым $\langle y, \ell \rangle \in T_x(A)$. Следовательно, $|T_x(A)| \geqslant n$.

Итак, допустим, что множество Y противоречиво. Это значит, что для некоторых формул $B_1, \ldots, B_k \in x^{<n}$ имеет место выводимость $\mathbf{GrK} \vdash (B_1 \wedge \ldots \wedge B_k) \to \neg A$. Обозначим $C := (B_1 \wedge \ldots \wedge B_k)$. Тогда $\vdash \Box(C \to \neg A)$ и $\Box(C \to \neg A) \in x$. Кроме того, в силу (2b), $\Box(A \to B_i) \in x$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. По нормальности (то есть выводимости даже в $\mathbf{K}$) имеем $\Box(A \to C) \in x$. Из этих двух фактов заключаем $\Box \neg A \in x$, то есть $\neg \Diamond A \in x$, что противоречит исходному предположению $\Diamond^{\geqslant n} A \in x$.

($\Longrightarrow$) Пусть $|T_x(A)| \geqslant n$. Будем всякую точку $\langle y, \ell \rangle$ называть точкой *типа* y. Возможны 2 случая:

1) Все точки в $T_x(A)$ одного типа, скажем, y. Поскольку их $\geqslant n$, то $\langle y, \ell \rangle \in T_x(A)$ для некоторого $\ell \geqslant n$. Это означает, что $A \in y$ и $x\, R_\ell\, y$, а значит, и $x\, R_n\, y$. По определению R_n (см. сноску 28) $\Diamond^{\geqslant n} A \in x$.

2) В $T_x(A)$ есть точки различных типов $y \neq z$ (очевидно, это возможно лишь при $n \geqslant 2$). Тогда найдется такая формула B, что $B \in y$ и $(\neg B) \in z$. Все точки множества $T_x(A)$ разбиваются на те, в которых лежит B, и те, в которых лежит $\neg B$, причем оба множества непусты. Значит, для некоторого $0 < i < n$ имеем $|T_x(A \wedge B)| \geqslant i$ и $|T_x(A \wedge \neg B)| \geqslant (n-i)$. По предположению индукции (для i и $n-i$) получаем $\Diamond^{\geqslant i}(A \wedge B) \in x$ и $\Diamond^{\geqslant n-i}(A \wedge \neg B) \in x$. Пользуясь формулой (G13), заключаем $\Diamond^{\geqslant n} A \in x$. □

[30] Точнее, трансфинитной индукцией по n, поскольку при доказательстве утверждения для n мы будем опираться на его истинность для всех меньших чисел (для всевозможных формул и точек). Для такой индукции база не нужна:

$$\forall n\, (\, \forall m < n P(m) \ \to \ P(n)\,) \ \to \ \forall n\, P(n).$$

Файн этого, кстати, не заметил и проводил отдельное доказательство для $n = 1$, дословно повторяющее обычное доказательство леммы о канонической модели для логики $\mathbf{K}$.

11.4 Аксиомы для других градуированных логик

Рассмотрим градуированные аналоги «традиционных» модальных логик (см. раздел 4.1).

		Аксиома ML	Аксиома GML
(D)	*сериальность*	$\Diamond\top$	$\Diamond\top$
(T)	*рефлексивность*	$p \to \Diamond p$	$p \to \Diamond p$
(B)	*симметричность*	$p \to \Box\Diamond p$	$p \to \Box\Diamond p$
(4)	*транзитивность*	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\Diamond\Diamond^{\geqslant n} p \to \Diamond^{\geqslant n} p$
(5)	*евклидовость*	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\Diamond^{\geqslant n} p \to \Box\Diamond^{\geqslant n} p$

Теорема 11.7 (Fine, 1972)**.** *Градуированные модальные логики* **GrK**, **GrKT**, **GrKB**, **GrKTB**, **GrS5**, *получающиеся добавлением соответствующих аксиом к логике* **GrK**, *полны.*

Файн пишет, что для транзитивных логик всё сложнее. Например, он делает следующее наблюдение.

Задача 11.8. Обычные модальные логики классов рефлексивных транзитивных шкал и рефлексивных транзитивных антисимметричных шкал совпадают — это **S4**. В градуированном же случае они различны: в последней имеется формула $p \wedge \Diamond(\neg p \wedge \Diamond^{\geqslant n} p) \to \Diamond^{\geqslant n+1} p$. Проверьте это.

Теорема 11.9 (de Caro, "Graded Modalities II", 1988)**.** *Логика* $\mathbf{GrK4} = \mathbf{GrK} + (\Diamond\Diamond^{\geqslant n} p \to \Diamond^{\geqslant n} p)$ *полна.*

Полноту для **GrK**, **GrK4** и **GrS5** получил также Cerrato в своей диссертации[31] 1984 г. Потребовалось написать целую статью, чтобы аксиоматизировать **GrS4**, и ее аксиоматика получилась странной:

Теорема 11.10 (Fattorosi-Barnaba, Cerrato, "Graded Modalities III")**.** *Полна по Крипке градуированная модальная логика* **GrS4**, *получающаяся добавлением к логике* **GrK** *аксиом* $p \to \Diamond p$, $\Diamond\Diamond^{\geqslant n} p \to \Diamond^{\geqslant n} p$, *а также следующих двух аксиом «чисто комбинаторного характера»:*

$$\Box(p \to \Diamond^{=m} p) \wedge \Diamond^{=n} p \;\to\; \bot, \quad \text{где } m, n \geqslant 1 \text{ и } n \text{ не делится на } m;$$

$$\Diamond^{>ns}\big(p \wedge \Diamond^{\leqslant s} p \wedge \Diamond^{\geqslant t}(q \wedge \Diamond^{\geqslant s} p)\big) \;\to\; \Diamond^{>nt} q, \quad \text{где } n \geqslant 0,\ s, t \geqslant 1.$$

Насколько необходимы эти «комбинаторные» аксиомы, авторы не пишут.[32] Поэтому вероятно, что для того, чтобы аксиоматизировать «градуированный» напарник полной по Крипке логики **L**, то есть логику $\mathbf{GrL} = \{A \in \mathrm{GML} \mid \mathsf{Frames}(\mathbf{L}) \models A\}$, не всегда достаточно добавить к **GrK** аксиомы логики **L**.

Задача 11.11. Докажите, что формула $\Box(p \to \Diamond^{=m} p) \to \neg\Diamond^{=n} p$, где n не делится на m, общезначима на всех рефлексивных транзитивных шкалах, но не общезначима на всех транзитивных шкалах.

Для доказательства полноты симметричных логик (**GrKB** и т.п.) тоже потребовалось написать отдельную статью ("Graded Modalities IV", 1990), модифицировав конструкцию канонической модели.

Сложность логик при переходе к градуированным напарникам возрастает неравномерно. Например, логики **K** и **K4** обе PSPACE-полны, а их градуированные аналоги **GrK** и **GrK4** — PSPACE-полна и NEXPTIME-полна, соответственно, как доказали Е. Казаков и I. Pratt-Hartmann (2011).

Лемма 11.12. *GML-логика класса всех транзитивных иррефлексивных шкал*[33] *не является полной относительно конечных шкал (то есть не FMP).*

Доказательство. Формула $\Diamond\top \wedge \Box\Diamond\top$, конечно же, выполнима на этом классе шкал, например, на шкале $(\mathbb{N}, <)$. Однако, ни на какой конечной шкале этого класса она не выполнима ни в какой точке: в противном случае из такой точки выстраивается бесконечная R-цепь, и ввиду конечности шкалы, она должна пройти по некоторой точке дважды, а значит, ввиду транзитивности, эта точка будет рефлексивной, чего не должно быть. $\square$

[31] Недоступна в электронном виде.

[32] А бывает ли аналогичное явление в обычной модальной логике: пусть логики $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ полны, и $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — классы всех их шкал; верно ли тогда, что класс $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ (пусть он не пуст) аксиоматизируется логикой $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$?

[33] Данный класс шкал задается формулой $\Diamond(p \wedge \Diamond p) \to \Diamond^{\geqslant 2} p$, однако мне не известно, полна ли логика с этой аксиомой.

11.5 Бисимуляции для градуированной модальной логики

Пусть (M, a) и (M', a') — две модели с выделенными точками. Если между ними имеется бисимуляция, то в них верны одни и те же модальные формулы. Для градуированной модальной логики это уже не верно: если взять две модели, 2-х элементную и 3-х элементную, в первой из корня видна вторая точка, во второй из корня видны обе оставшиеся точки, то между корнями имеется бисимуляция, однако эти корни различаются GML-формулой $\Diamond^{\geqslant 2}\top$.

Определение 11.13 (van der Hoek, 1993). Непустое двуместное отношение $Z \subseteq (W \times W')$ называется *G-бисимуляцией* между моделями M и M', если выполнены следующие условия (для всех фигурирующих в них точек из соответствующих по смыслу носителей W или W' и всех $n \geqslant 1$):

(var) $a\,Z\,a' \implies$ для каждой переменной p имеем: $M, a \models p \;\Leftrightarrow\; M', a' \models p$;
(zig) $a\,Z\,a'$ и $a\,R\,b_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, где все $b_i \in W$ различны $\implies$
существуют различные $b'_1, \ldots, b'_n \in W'$, такие что $b_i\,Z\,b'_i$ и $a'\,R'\,b'_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$;
(zag) аналогично в обратном направлении.

Мы пишем $(M, a) \simeq_G (M', a')$, если существует G-бисимуляция между M и M', такая что $a\,Z\,a'$.

Теорема 11.14. *Если $(M, a) \simeq_G (M', a')$, то в них истинны одни и те же GML-формулы.*

Доказательство. Очевидная индукция по построению GML-формулы. □

Замечание 11.15. Для обычного модального языка имеется следующий знаменитый результат (теорема ван Бентема): *формула первого порядка с одной свободной переменной эквивалентна (на всех моделях Крипке с выделенной точкой) некоторой модальной формуле тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно бисимуляций.* van der Hoek (1993), хотя и ввел понятие G-бисимуляции, приведенное выше, не задался вопросом о получении аналогичной теоремы. de Rijke (2000) сформулировал другое, гораздо более сложное, определение G-бисимуляции (недавно (2017) было доказано, что оно эквивалентно приведенному выше) и для него доказал аналог теоремы ван Бентема. Позже (Lutz, Piro, Wolter, "Description Logic TBoxes: Model-Theoretic Characterizations and Rewritability", IJCAI 2011) был доказан аналог теоремы ван Бентема для van der Hoek-овского (т.е. простого) понятия G-бисимуляции.

11.6 Модальная определимость

Естественно ожидать, что в градуированном модальном языке можно задавать новые классы шкал, которые нельзя было задать в обычном модальном языке.

Лемма 11.16. *Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке. Тогда:*
а) $F \models \Diamond(p \wedge \Diamond p) \to \Diamond^{\geqslant 2} p \iff$ отношение R транзитивно и иррефлексивно;
б) $F \models \Diamond^{\geqslant 2} p \to \Diamond(p \wedge \Diamond p) \iff \forall x, y, z \left[xRy \text{ и } xRz \Rightarrow (yRz \vee y = z \vee zRy) \right]$.

Значит, эквивалентность $\Diamond(p \wedge \Diamond p) \leftrightarrow \Diamond^{\geqslant 2} p$ задает в точности шкалы, являющиеся несвязной суммой строгих линейных порядков. Заметим, что условие (а) нельзя задать ML-формулой. Условие (б) можно: $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$; но его нельзя задать ML-формулой от одной переменной (van Benthem, 1983).

Задача 11.17. $F \models \Diamond^{\geqslant n} p \to \Box^{\leqslant m} p \iff F \models \Diamond^{\leqslant n+m}\top$, то есть у каждой точки $\leqslant n+m$ последователей.

Задача 11.18. $(\mathbb{N}, <) \models \Diamond^{\geqslant 3} p \leftrightarrow \Diamond(p \wedge \Diamond(p \wedge \Diamond p))$ и аналогично для любого $n \geqslant 2$.

Теорема 11.19. *Пусть GML-формула A построена из переменных $\vec{p}$ с помощью связок $\wedge, \vee, \Diamond^{\geqslant n}$. Пусть GML-формула B позитивна по $\vec{p}$, то есть каждая переменная из $\vec{p}$ в ней стоит под четным числом отрицаний. Тогда формула $A \to B$ соответствует на шкалах некоторой формуле первого порядка; ее можно эффективно построить по A и B.*

Какие-то $\Box$-формулы и негативные формулы в посылках всё же можно допускать:

Лемма 11.20. *Пусть GML-формула B позитивна по переменной p.*
Тогда формулы $\Diamond^{=n}\neg p \to B$ и $\Diamond^{\leqslant n} p \to B$ задают на шкалах условия первого порядка.

Но не все!

Лемма 11.21. *Формула $\Box\Box\Diamond^{\geqslant 2} p \to \Diamond\Diamond^{\geqslant 3} p$ не является первопорядково определимой.*

11.7 Модальность «бесконечно много»

В работе “Graded modalities VII” (1999) аксиоматизирована логика, в которой помимо обычной модальности $\Box$ имеется модальность $\Diamond^\infty$ со следующей семантикой:[34]

$$M, x \models \Diamond^\infty A \quad \leftrightharpoons \quad \text{существует бесконечно много таких } y\text{, что } x\,R\,y \text{ и } M, y \models A.$$

Модальный язык (вместе с его семантикой) называется *компактным*, если для любого множества формул из того, что всякое его конечное подмножество выполнимо, следует, что всё множество выполнимо (то есть истинно в некоторой точке некоторой модели Крипке). Модальный язык с модальностью бесконечности не является компактным: взяв формулы $A_n = p \wedge \neg q_1 \wedge \neg q_2 \wedge \ldots\ldots \neg q_{n-1} \wedge q_n$, рассмотрим множество формул $\Gamma = \{\neg\Diamond^\infty p\} \cup \{\Diamond A_n \mid n \geqslant 1\}$. Оно не выполнимо, но любое его конечное подмножество выполнимо.

Аксиомы исчисления $\mathbf{K}^\infty$:

классические тавтологии
$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
$\Box(p \to q) \to (\Diamond^\infty p \to \Diamond^\infty q)$
$\Diamond^\infty p \to \Diamond p$
$\Diamond^\infty (p \vee q) \to (\Diamond^\infty p \vee \Diamond^\infty q)$

Правила вывода: modus ponens, подстановка и правило $A \vdash \Box A$.

Теорема 11.22. *Исчисление $\mathbf{K}^\infty$ полно: формула выводится $\Longleftrightarrow$ она общезначима.*

Техника, применяемая при доказательстве этой теоремы, уже значительно отличается от обычной и скорее напоминает технику работы с инфинитарной логикой (логикой, в которой допускаются бесконечные конъюнкции и дизъюнкции). Собственно, это не удивительно, если учесть, что модальность бесконечности выражается в инфинитарной градуированной модальной логике формулой

$$\Diamond^\infty p \quad \leftrightarrow \quad \bigwedge_{n \geqslant 1} \Diamond^{\geqslant n} p.$$

Данная логика не является полной относительно конечных шкал. Действительно, формула $\Diamond^\infty \top$ выполнима, но не выполнима ни на какой конечной модели.

Естественно также рассматривать модальности $\Diamond^{\leqslant\kappa}$, $\Diamond^{=\kappa}$, $\Diamond^{\geqslant\kappa}$ для всевозможных кардиналов κ, означающие «существует (не более, не менее, в точности) κ достижимых миров, в которых верна данная формула». Не знаю, рассматривал ли их кто-то, хотя бы, например, для одного лишь счетного кардинала $\Diamond^{=\omega}$. Для таких языков можно рассматривать понятия бисимуляции, и пробовать доказывать аналог теоремы ван Бентема о том, что получающийся модальный язык является в точности бисимуляционным фрагментов логики первого порядка с дополнительными кванторами $\exists^{\geqslant\kappa}$ и т.п. Опять-таки лектору неизвестно, получены ли подобные результаты, хотя бы для языка с оператором $\Diamond^{=\omega}$, или даже с рассмотренным выше оператором $\Diamond^\infty$.

Расширения[35] логики первого порядка $\mathsf{FO}(\exists^{\geqslant\aleph_\alpha})$ (обозначим для краткости L_α) квантором «существует $\geqslant\aleph_\alpha$ точек, таких что…», хорошо изучены. В частности, в L_0 квантор означает «существует бесконечно много точек, таких что...», а в L_1 квантор означает «существует несчетно много точек, таких что...» Известно, что L_1 ведет себя гораздо лучше, чем L_0. Для L_0 невозможно предъявить аксиоматику (логика неперечислима), тогда как L_1 перечислима; конкретную ее аксиоматику нашел Кейслер (1970). Логика L_1 счетно-компактна: всякое счетное множество формул выполнимо, если каждое его конечное подмножество выполнимо.

Модальные логика, расширенная модальностью $\Diamond^{\geqslant\aleph_\alpha}$, является фрагментом логики $\mathsf{FO}(\exists^{\geqslant\aleph_\alpha})$. Соответственно, было бы интересно для логики с $\Diamond^{\geqslant\aleph_1}$ найти аксиоматику (будет ли она отличаться от выписанной выше для $\Diamond^\infty$?), выяснить ее разрешимость и сложность, теорему ван Бентема.

[34] Точнее, они рассматривали отрицание этой модальности, $\Diamond^{<\infty}$, означающее «существует конечное число последователей, в которых данная формула верна».

[35] См. книгу: Barwise J., Feferman S. “Model-Theoretic Logics”, Springer, 1985.