Конспект курса
“Введение в модальную логику”
(Draft)

И. Б. Шапировский

Краткое изложение курса (в основном, определения и формулировки утверждений). Лекции 1–18.

Текст черновой, возможны опечатки. Будьте внимательны!

Лекция 1.

Аналогично формулам логики высказываний, модальные формулы строятся из пропозициональных переменных с помощью связок и скобок. Имеются двухместные связки $\vee$ (*дизъюнкция*), конъюнкция $\wedge$ (*конъюнкция*), $\to$ (*импликация*), одноместная связка $\neg$ (*отрицание*); кроме того, имеются одноместные связки $\Diamond$ (*"ромб"*) и $\Box$ (*"бокс"*).

Определение 1.1. Зафиксируем счетное множество $PV = \{p_1, p_2, \ldots\}$, элементы которого будем называть *пропозициональными переменными*. Пропозициональные переменные являются *формулами*; если φ и ψ — *формулы*, то $\neg\varphi$, $(\varphi \vee \psi)$, $\Diamond\psi$ — *формулы*; других формул нет.

$\varphi \wedge \psi$ мы рассматриваем как сокращенную запись формулы $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, запись $\varphi \to \psi$ является сокращением для $\neg\varphi \vee \psi$, а запись $\varphi \leftrightarrow \psi$ — сокращением для $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Кроме того, нам будет удобно иметь обозначения для пропозициональныех констант (или нульместных связок) $\bot$ (*ложь*) и $\top$ (*истина*): $\bot$ обозначает $(p_1 \wedge \neg p_1)$, $\top$ обозначает $(p_1 \vee \neg p_1)$.

Помимо этого, мы определяем двойственную к $\Diamond$ связку $\Box$: $\Box\varphi$ обозначает формулу $\neg\Diamond\neg\varphi$.

Определение 1.2. *Шкалой Крипке*, или просто *шкалой*, называется пара $\mathsf{F} = (W, R)$, где W — непустое множество и R — бинарное отношение на W. *Оценкой* на шкале F называется отображение $\theta : PV \to \mathcal{P}(W)$, то есть $\theta(p) \subseteq W$ для всякой переменной $p \in PV$. *Модель Крипке* — это шкала с оценкой. W называется *носителем* F и M, R называется *отношением достижимости* F и M. Истинность модальных формул в модели Крипке $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$ определяется индукцией по длине формулы (обозначение: $\mathsf{M}, w \models \varphi$, читается как *"формула φ истинна в точке w модели* M*"*).

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{M}, w \models p & \leftrightharpoons & w \in \theta(p); \\
\mathsf{M}, w \models \neg\varphi & \leftrightharpoons & \mathsf{M}, w \not\models \varphi; \\
\mathsf{M}, w \models \varphi \vee \psi & \leftrightharpoons & \mathsf{M}, w \models \varphi \text{ или } \mathsf{M}, w \models \psi; \\
\mathsf{M}, w \models \Diamond\varphi & \leftrightharpoons & \exists v(wRv \ \&\ \mathsf{M}, v \models \varphi);
\end{array}$$

Из этих определений немедленно следует

Предложение 1.3.

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{M}, w \models \varphi \wedge \psi & \iff & \mathsf{M}, w \models \varphi \textit{ и } \mathsf{M}, w \models \psi, \\
\mathsf{M}, w \models \varphi \to \psi & \iff & \mathsf{M}, w \not\models \varphi \textit{ или } \mathsf{M}, w \models \psi, \\
\mathsf{M}, w \models \top, & & \\
\mathsf{M}, w \not\models \bot & &
\end{array}$$

и

$$\mathsf{M}, w \models \Box\varphi \iff \forall v(wRv \Rightarrow \mathsf{M}, v \models \varphi).$$

Определение 1.4. *φ истинна в модели* $\mathsf{M} \leftrightharpoons \forall w \in W\ \mathsf{M}, w \vDash \varphi$; обозначение: $\mathsf{M} \vDash \varphi$.

φ общезначима в шкале $\mathsf{F} \leftrightharpoons \forall \mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)\ \mathsf{M} \vDash \varphi$.

Предложение 1.5. *Рассмотрим шкалу* $\mathsf{F} = (W, R)$.

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{F} \vDash p \to \Diamond p & \iff & \forall x\ xRx; \\
\mathsf{F} \vDash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p & \iff & \forall x, y, z (xRy \& yRz \Rightarrow xRz); \\
\mathsf{F} \vDash p \to \Box\Diamond p & \iff & R = R^{-1}; \\
\mathsf{F} \vDash \Diamond\top & \iff & \forall x \exists y\ xRy; \\
\mathsf{F} \vDash \Box\bot & \iff & R = \varnothing; \\
\mathsf{F} \vDash \Diamond p \to \Diamond\Diamond p & \iff & \forall x, y (xRy \Rightarrow \exists z\ xRz \& zRy); \\
\mathsf{F} \vDash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p & \iff & \forall x, y_1, y_2 (xRy_1 \& xRy_2 \Rightarrow \exists z\ y_1Rz \& y_2Rz).
\end{array}$$

Доказательство. Несложное упражнение: справа налево — совсем просто, слева направо — нужно угадать с оценкой так, чтобы истинность модальной формулы повлекла выполнение соответствующего первопорядкового свойства.

Например, покажем, как из общезначимости формулы $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ следует транзитивность отношения R: для x, y, z таких, что $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, рассмотрим такую оценку θ, что $\theta(p) = \{x\}$. Тогда $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\Diamond p$ в модели $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$. Поскольку $\mathsf{F} \vDash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$, получаем $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond p$. Поскольку единственная точка в M в которой истинна p — это z, получаем, что xRz. $\Box$

Лекция 2.

Обозначение: $R(x) \leftrightharpoons \{y \mid xRy\}$.

Еще один пример того, какие свойства бинарных отношений можно описывать на модальном языке, даёт *формула Гёделя-Лёба*:
$\mathrm{AGL} \leftrightharpoons \Diamond p \to \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$.

Предложение 2.1. *Пусть* $\mathsf{F} = (W, R)$. $\mathsf{F} \vDash \mathrm{AGL} \iff R$ *— строгий частичный порядок и любое непустое* $V \subseteq W$ *имеет максимальный элемент.*

Доказательство. ($\Leftarrow$). Пусть $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond p$. Рассмотрим множество $V = \theta(p) \cap R(x)$ и заметим, что оно непусто. Пусть y — какой-то его максимальный элемент; тогда $\mathsf{M}, y \vDash p \wedge \Box\neg p$. Поскольку $y \in V$, то xRy. Это означает, что $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$.

($\Rightarrow$). Иррефлексивность и транзитивность докажем от противного.

Если xRx для какого-то $x \in W$, то рассмотрим оценку при которой $\theta(p) = \{x\}$. Тогда в соответствующей модели получим $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond p$ и $\mathsf{M}, x \nvDash \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$.

Если $xRyRz$, но $(x, z) \notin R$, то положим $\theta(p) := \{y, z\}$. Тогда $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond p$, следовательно $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$; единственная точка в $R(x)$, где истинна p — это y, следовательно $\mathsf{M}, y \vDash p \wedge \Box\neg p$; тогда $\mathsf{M}, y \vDash \Box\neg p$, то есть $\mathsf{M}, y \nvDash \Diamond p$. С другой стороны, yRz и $z \in \theta(p)$, то есть $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond p$.

Таким образом, мы показали, что R — строгий частичный порядок.

Пусть теперь V — непустое подмножество W. Покажем, что оно имеет максимальную точку. Положим $\theta(p) = V$. Пусть x — элемент V. Если x не максимальная, то $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond p$. В силу общезначимости AGL в F, имеем $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$, то есть существует $y \in R(x)$ такой, что $\mathsf{M}, y \vDash p \wedge \Box\neg p$. Это означает, что y — максимальный элемент V. $\Box$

Замечание. В этом предложении, в отличие от предложения 1.5, речь идёт о свойстве, которое не может быть задано никаким, даже бесконечным, множеством формул первого порядка (это можно показать, используя теорему Мальцева о компактности).

Определение 2.2. Рассмотрим шкалы $\mathsf{F} = (W, R)$, $\mathsf{G} = (V, R)$ и отображение $f : W \to V$.

f *монотонно* $\leftrightharpoons$ для любых $x, y \in W$, из xRy следует $f(x)Sf(y)$;

f обладает свойством *поднятия* $\leftrightharpoons$ для любых $x \in W$, $z \in V$, если $f(x)Sz$, то найдется $y \in R(x)$ такой, что $f(y) = z$.

Если f сюръективно, монотонно и обладает свойством поднятия, то f называется *p-морфизмом шкалы* F *на шкалу* G (в этом случае пишем $f : \mathsf{F} \twoheadrightarrow \mathsf{G}$);

$\mathsf{F} \twoheadrightarrow \mathsf{G} \leftrightharpoons$ существует p-морфизм F на G.

Предложение 2.3. f *монотонно и обладает свойством поднятия* $\iff$ $\forall x \in W \;\, f(R(x)) = S(f(x))$

Доказательство. Монотонность эквивалентна условию $\forall x \in W\ f(R(x)) \subseteq S(f(x))$, свойство поднятия — условию $\forall x \in W\ f(R(x)) \supseteq S(f(x))$. $\square$

Пример 2.4. Пусть C_1 — шкала, состоящая из единственной рефлексивной точки (формально: $\mathsf{C}_1 = (\{0\}, \{(0,0)\})$). Тогда $(\mathbb{N}, <) \twoheadrightarrow \mathsf{C}_1$. $(\mathbb{Z}_-, <) \not\twoheadrightarrow \mathsf{C}_1$ ($\mathbb{Z}_-$ обозначает отрицательные целые).

Лемма 2.5 (о p-морфизме)**.** $\mathsf{F} \twoheadrightarrow \mathsf{G}$ *и* $\mathsf{F} \vDash \varphi \Rightarrow \mathsf{G} \vDash \varphi$.

Доказательство этой несложной, но важной леммы дадим чуть позже.

Обозначение: Для множества формул Φ и шкалы F, $\mathsf{F} \vDash \Phi \leftrightharpoons \forall \varphi \in \Phi\ \mathsf{F} \vDash \varphi$.

Определение 2.6. Класс шкал $\mathcal{F}$ называется *модально определимым*, если существует множество модальных формул Φ такое, что для всякой шкалы F
$$\mathsf{F} \vDash \Phi \iff \mathsf{F} \in \mathcal{F}.$$

Предложение 2.7. *Класс всех иррефлексивных шкал не является модально определимым.*

Доказательство. Следует из леммы о p-морфизме и примера 2.4. $\square$

Лекция 3.

Предложение 3.1. *Класс всех антисимметричных шкал не является модально определимым.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что некоторая шкала, не являющаяся антисимметричной, является p-морфным образом некоторой симметричной шкалы.

На множестве натуральных чисел рассмотрим антисимметричное отношение $next := \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$; рассмотрим симметричную шкалу $\mathsf{F} = (\{0,1\}, \{(0,1),(1,0)\})$.

Положим $f(n) := n \mod 2$. Легко проверить, что $f : (\mathbb{N}, next) \twoheadrightarrow \mathsf{F}$. □

Прежде чем доказать лемму о p-морфизме, сформулируем и докажем её аналог для моделей.

Определение 3.2. Рассмотрим модели $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$, $\mathsf{N} = (\mathsf{G}, \eta)$ и p-морфизм шкал $f : \mathsf{F} \twoheadrightarrow \mathsf{G}$. f называется *p-морфизмом* M *на* N $\leftrightharpoons$ для любых $p \in PV$, x из F

$$\mathsf{M}, x \vDash p \iff \mathsf{N}, f(x) \vDash p \tag{1}$$

Лемма 3.3 (о p-морфизме моделей)**.** *Если f — p-морфизм модели* M *на модель* N*, то для любой формулы φ и любого x из* F

$$\mathsf{M}, x \vDash \varphi \iff \mathsf{N}, f(x) \vDash \varphi \tag{2}$$

Доказательство. Эта лемма легко доказывается индукцией по числу связок формулы φ. В дальнейшем мы будем неоднократно использовать этот приём, зачастую опуская простые детали, но в этом доказательстве мы их приведём подробно.

Если связок нет, т.е. если $\varphi \in PV$, то (2) — это (1).

Если связки есть, то φ имеет вид $\neg\psi$, $\psi \vee \xi$ или $\Diamond\psi$ для каких-то ψ, ξ.

Рассмотрим случай $\varphi = \neg\psi$. Имеем:

$$\mathsf{M}, x \vDash \neg\psi \iff \mathsf{M}, x \nvDash \psi \overset{\text{IH}}{\iff} \mathsf{N}, f(x) \nvDash \psi \iff \mathsf{N}, f(x) \vDash \neg\psi.$$

В этом рассуждении первая и третья эквивалентности — немедленное следствие определения истинности формулы в модели Крипке; эквивалентность, помеченная IH, имеет место в силу предположения индукции, так как в формуле ψ связок меньше, чем в формуле φ (мы и в дальнейшем будем писать IH, когда будем ссылаться на induction hypothesis — предположение индукции).

Случай $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ совершенно аналогичен предыдущему:

$$\mathsf{M}, x \vDash \psi \vee \chi \iff \mathsf{M}, x \vDash \psi \text{ или } \mathsf{M}, x \vDash \chi \overset{\text{IH}}{\iff}$$
$$\mathsf{N}, f(x) \vDash \psi \text{ или } \mathsf{N}, f(x) \vDash \chi \iff \mathsf{N}, f(x) \vDash \psi \vee \chi.$$

Осталось разобрать единственный нетривиальный случай, когда $\varphi = \Diamond\psi$. Нам нужно показать, что по всех точках модели

$$\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi \iff \mathsf{N}, f(x) \vDash \Diamond\psi.$$

($\Rightarrow$). Пусть $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$. Тогда $\exists x \in R(x)$ $\mathsf{M}, x' \vDash \psi$. В силу монотонности f, $f(x)Sf(x')$; в силу IH, $N, f(x') \vDash \psi$. Следовательно, $\mathsf{N}, f(x) \vDash \Diamond\psi$.

($\Leftarrow$). Пусть $\mathsf{N}, f(x) \vDash \Diamond\psi$. Тогда $\exists y \in S(f(x))$ $\mathsf{N}, y \vDash \psi$. В силу свойства поднятия, $\exists x' \in R(x)$ $f(x') = y$; в силу IH, $\mathsf{M}, x' \vDash \psi$, Тем самым, $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$. □

Доказательство леммы 2.5. Покажем, что если $\mathsf{F} \twoheadrightarrow \mathsf{G}$ и $\mathsf{G} \nvDash \varphi$, то $\mathsf{F} \nvDash \varphi$.

Если $\mathsf{G} \nvDash \varphi$, то найдутся оценка η и точка y такие, что $(\mathsf{G}, \eta), y \vDash \neg\varphi$.

Пусть $f : \mathsf{F} \twoheadrightarrow \mathsf{G}$. Определим на F оценку θ, положив $\theta(p) := f^{-1}(\eta(p))$ для каждой переменной p. Тогда выполнено (1), то есть f — p-морфизм модели (F, θ) на модель (G, η). Поскольку f — сюръективно, то $f(x) = y$ для некоторого x из F. В силу леммы о p-морфизме моделей, $(\mathsf{F}, \eta), x \vDash \neg\varphi$, то есть $\mathsf{F} \nvDash \varphi$. □

Определение 3.4. Пусть F — шкала. Множество

$$\textsc{Log}(\mathsf{F}) \leftrightharpoons \{\varphi \mid \mathsf{F} \vDash \varphi\}$$

называется *логикой шкалы* F.

Формула называется *общезначимой в классе шкал* $\mathcal{F}$, если она общезначима в любой шкале из этого класса.

Множество

$$\textsc{Log}(\mathcal{F}) \leftrightharpoons \{\varphi \mid \mathcal{F} \vDash \varphi\}$$

называется *логикой класса шкал* $\mathcal{F}$.

Изучение логик шкал будет являться одной из основных задач этого курса.

Определение 3.5. Пусть M — модель. Множество $\|\varphi\|_{\mathsf{M}} \leftrightharpoons \{x \mid \mathsf{M}, x \vDash \varphi\}$ называется *оценкой формулы* φ *в модели* M.

Для бинарного отношение R на множестве W и множества $V \subseteq W$ положим

$$R(V) \leftrightharpoons \bigcup_{x \in V} R(x),$$

то есть $R(V) = \{y \mid \exists x \in V \ xRy\}$. Очевидно, что $R(\varnothing) = \varnothing$, $R(U \cup V) = R(U) \cup R(V)$, и из $U \subseteq V$ следует $R(U) \subseteq R(V)$.

Следующее предложение является непосредственным следствием определения истинности в модели (более того, могло бы быть использовано в качестве этого определения).

Предложение 3.6. *В произвольной модели* $\mathsf{M} = (W, R, \theta)$,

$$\begin{array}{lcl}
\|p\|_{\mathsf{M}} & = & \theta(p), \\
\|\top\|_{\mathsf{M}} & = & W, \\
\|\bot\|_{\mathsf{M}} & = & \varnothing, \\
\|\varphi \vee \psi\|_{\mathsf{M}} & = & \|\varphi\|_{\mathsf{M}} \cup \|\psi\|_{\mathsf{M}}, \\
\|\varphi \wedge \psi\|_{\mathsf{M}} & = & \|\varphi\|_{\mathsf{M}} \cap \|\psi\|_{\mathsf{M}}, \\
\|\varphi \to \psi\|_{\mathsf{M}} & = & (-\|\varphi\|_{\mathsf{M}}) \cup \|\psi\|_{\mathsf{M}} \\
\|\Diamond\varphi\|_{\mathsf{M}} & = & R^{-1}(\|\varphi\|_{\mathsf{M}}), \\
\|\Box\varphi\|_{\mathsf{M}} & = & -R^{-1}(-\|\varphi\|_{\mathsf{M}}).
\end{array}$$

Это предложение позволяет интерпретировать $\vee, \neg, \Diamond$ и остальные связки как операции на множестве $\mathcal{P}(W)$; при таком подходе формула — это алгебраическое выражение (*терм*), а оценка формулы в модели — это значение этого выражения при заданных значениях входящих в него переменных.

Предложение 3.7.

1. $\mathsf{M} \vDash \varphi \iff \|\varphi\|_{\mathsf{M}} = W$;
2. $\mathsf{M} \vDash \varphi \to \psi \iff \|\varphi\|_{\mathsf{M}} \subseteq \|\psi\|_{\mathsf{M}}$;
3. $\mathsf{M} \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \iff \|\varphi\|_{\mathsf{M}} = \|\psi\|_{\mathsf{M}}$;
4. $\mathsf{M} \vDash \neg\bot$;
5. $\mathsf{M} \vDash \Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$;
6. $\mathsf{M} \vDash \varphi \to \psi \Rightarrow \mathsf{M} \vDash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$.

Доказательство. Простое упражнение. □

Для формул φ, α и переменной p пусть $[\alpha/p]\varphi$ обозначает результат замены всех вхождений p в φ на α. Формально: $[\alpha/p]p \leftrightharpoons p$; $[\alpha/p]q \leftrightharpoons q$ при $p \neq q$; $[\alpha/p]\Diamond\varphi \leftrightharpoons \Diamond[\alpha/p]\varphi$; $[\alpha/p]\neg\varphi \leftrightharpoons \neg[\alpha/p]\varphi$; $[\alpha/p](\varphi \vee \psi) \leftrightharpoons [\alpha/p]\varphi \vee [\alpha/p]\psi$.

Предложение 3.8. *Если* $\mathsf{F} \vDash \varphi$, *то* $\mathsf{F} \vDash [\alpha/p]\varphi$ *при любых* α *и* p.

Чтобы доказать это предложение, установим сначала следующий простой факт.

Предложение 3.9. *Пусть* α *— формула,* $p \in PV$, (F, θ) *— модель. В модели* (F, θ') *такой, что* $\theta'(p) = \|\alpha\|_{\mathsf{M}}$ *и* $\theta'(q) = \theta(q)$ *при* $q \neq p$, *для любой формулы* φ *имеем* $\|[\alpha/p]\varphi\|_{\mathsf{M}} = \|\varphi\|_{\mathsf{M}'}$.

Доказательство. Этот факт становится очевидным, если смотреть на формулу φ как на алгебраическое выражение.

Доказательство этого факта проводится скучной индукцией по числу связок в формуле.

Если φ — отличная от p переменная q, то $[\alpha/p]\varphi = \varphi = q$, и $\|[\alpha/p]\varphi\|_{\mathsf{M}} = \|\varphi\|_{\mathsf{M}'}$ следует из того, что $\theta(q) = \theta'(q)$; если $\varphi = p$, то $[\alpha/p]\varphi = \alpha$, и $\|[\alpha/p]\varphi\|_{\mathsf{M}} = \|\varphi\|_{\mathsf{M}'}$ следует из того, что $\theta'(p) = \|\alpha\|_{\mathsf{M}}$.

Если $\varphi = \Diamond\psi$, то

$$\|\varphi\|_{\mathsf{M}'} = R^{-1}(\|\psi\|_{\mathsf{M}'}) \overset{\text{IH}}{=} R^{-1}(\|[\alpha/p]\psi\|_{\mathsf{M}}) = \|\Diamond[\alpha/p]\psi\|_{\mathsf{M}} = \|[\alpha/p]\Diamond\psi\|_{\mathsf{M}}.$$

Для связок $\vee$ и $\neg$ рассуждения совершенно аналогичны. $\square$

Доказательство предложения 3.8. Рассмотрим произвольную оценку θ на F и покажем, что в модели $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$ истинна $[\alpha/p]\varphi$. Пусть M' определяется как в предыдущем предложении; поскольку $\mathsf{F} \vDash \varphi$, то $\mathsf{M}' \vDash \varphi$; следовательно, $\mathsf{M} \vDash [\alpha/p]\varphi$. $\square$

Определение 3.10. Множество модальных формул Σ называется *нормальной (модальной) логикой*, если

- Σ содержит все пропозициональные тавтологии
- Σ содержит формулу $\neg\Diamond\bot$
- Σ содержит формулу $\Diamond(p_1 \vee p_2) \to \Diamond p_1 \vee \Diamond p_2$
- Σ замкнуто относительно *правила Modus Ponens* MP, *правила подстановки* Sub и *правила монотонности* Mon:

MP	$\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma \Rightarrow \psi \in \Sigma$;
Sub	$\varphi \in \Sigma \Rightarrow [\alpha/p]\varphi \in \Sigma$ при любых α и p;
Mon	$\varphi \to \psi \in \Sigma \Rightarrow \Diamond\varphi \to \Diamond\psi \in \Sigma$.

Теорема 3.11 (Теорема корректности)**.** *Если L — логика некоторого класса шкал, то L — нормальная логика.*

Доказательство. Следует из предложений 3.7 и 3.8. $\square$

Лекция 4.

Всюду далее под логикой понимается нормальная логика.

Пусть Fm обозначает множество всех формул нашего языка.

Заметим, что пересечение любой совокупности логик — логика. K обозначает наименьшую логику (то есть пересечение всех логик). Если L — логика, $\Psi \subseteq Fm$, то $L + \Psi$ обозначает наименьшую логику, содержащую $L \cup \Psi$. Если Ψ состоит из единственной формулы φ, то вместо $L + \{\varphi\}$ будем писать $L + \varphi$.

Предложение 4.1. *Пусть* $\Psi, \Phi \subseteq Fm$.

1. $\mathrm{K} + \Phi$ *— наименьшая логика, содержащая* Φ*;*
2. $(\mathrm{K} + \Phi) + \Psi = \mathrm{K} + (\Phi \cup \Psi)$.

Доказательство. Простое упражнение. □

Предложение 4.2. *Пусть* F *— шкала,* $\Psi \subseteq Fm$.

1. $\mathsf{F} \models \mathrm{K}$*;*
2. $\mathsf{F} \models \mathrm{K} + \Psi \iff \mathsf{F} \models \Psi$.

Доказательство. Легко следует из теоремы корректности. □

Договоримся понимать запись $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ при $k = 0$ как $\top$.

Определение 4.3. Пусть L — логика. Множество формул Γ называется *L-противоречивым*, если $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \in L$ для некоторых $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Gamma$; в противном случае Γ называется *L-непротиворечивым*.

Формула φ называется *L-(не)противоречивой*, если L-(не)противоречиво множество $\{\varphi\}$.

Множество формул Γ называется *L-максимальным*, если оно непротиворечиво, а любое его собственное расширение оказывается L-противоречивым.

Предложение 4.4. *Пусть L — логика, Γ — множество формул. Для любой формулы φ имеем:*

1. *Если $\varphi \in \Gamma$ и $\neg\varphi \in \Gamma$, то Γ L-противоречиво.*
2. *Если Γ L-непротиворечиво, то хотя бы одно из множеств $\Gamma \cup \{\varphi\}$ и $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ L-непротиворечиво.*

Доказательство. Пункт 1 следует из того, что $\neg(p \wedge \neg p)$ является тавтологией и, следовательно, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi) \in L$.

Чтобы доказать пункт 2, предположим, что оба множества L-противоречивы. Тогда $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \varphi) \in L$ и $\neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \wedge \neg\varphi) \in L$ при некоторых $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_1 \ldots, \beta_m$ из Γ. Тогда $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m) \in L$, что противоречит L-непротиворечивости Γ. Тут мы использовали следующий простой приём:

$$\neg(q_1 \wedge p) \to (\neg(q_2 \wedge \neg p) \to \neg(q_1 \wedge q_2))$$

является тавтологией (это несложно проверить непосредственно, или использовав теорему дедукции для логики высказываний); далее применяем правила подстановки и отделения. □

Лемма 4.5 (лемма Линденбаума)**.** *Пусть L — логика. Всякое L-непротиворечивое множество может быть расширено до максимального L-непротиворечивого.*

Доказательство. Путь Γ L-непротиворечиво. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — все формулы. Определим по индукции последовательность множеств Γ_n. Положим $\Gamma_0 := \Gamma$; $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$, если $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ L-непротиворечиво, и $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ в противном случае. В силу предложения 4.4(ii), все построенные множества L-непротиворечивы. Легко увидеть, что их объединение также непротиворечиво, и добавление к нему любой новой формулы приведёт к противоречивому множеству в силу предложения 4.4(i). □

Лекция 5.

Замечание. Множество всех формул Fm является логикой. Легко увидеть, что если L — логика, то

$$\bot \in L \iff L = Fm \iff \exists \varphi \in Fm(\varphi \in L \ \& \ \neg\varphi \in L);$$

кроме того, $Fm = \mathrm{Log}(\varnothing)$.

Fm называется *противоречивой логикой.*

Всякое множество формул (даже пустое) Fm-противоречиво. Если же L — непротиворечивая логика, то существуют L-непротиворечивые множества (например, сама логика L является L-непротиворечивым множеством); из этого следует, что существуют и L-максимальные (Лемма 4.5).

Все логики в оставшейся части лекции предполагаются непротиворечивыми, то есть не совпадающими с Fm.

Для множества формул Φ запись $\mathsf{M}, x \vDash \Phi$ означает, что $\mathsf{M}, x \vDash \varphi$ для всякой $\varphi \in \Phi$.

Предложение 5.1. *Пусть L — логика, M — модель. Если $\mathsf{M}, x \vDash L$, то множество $\{\varphi \mid \mathsf{M}, x \vDash \varphi\}$ является L-максимальным.*

Это предложение следует непосредственно из определений.

Оказывается, что всякое L-максимальное множество — это множество формул, истинных в некоторой точке некоторой специальной модели; при этом множество всех формул, истинных в этой модели, совпадает с L. Этот факт называется теоремой о канонической модели. Её построение — наша ближайшая цель.

Введём следующее обозначение: если Γ — множество формул, то

$$\Diamond\Gamma \leftrightharpoons \{\Diamond\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}.$$

Определение 5.2. *Канонической шкалой* непротиворечивой логики L называется шкала $\mathsf{F}^L \leftrightharpoons (W^L, R^L)$, где W^L — множество всех L-максимальных множеств, а R^L определяется следующим образом:

$$\Gamma_1 R^L \Gamma_2 \leftrightharpoons \Diamond\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1.$$

Оценка

$$\theta^L(p) \leftrightharpoons \{\Gamma \in W^L \mid p \in \Gamma\}$$

называется *канонической оценкой*, а модель $\mathsf{M}^L \leftrightharpoons (\mathsf{F}^L, \theta^L)$ — *канонической моделью* логики L.

Теорема 5.3 (Теорема о канонической модели)**.** *Пусть L — непротиворечивая логика.*

1. *Для любого $\Gamma \in W^L$,*

$$\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \varphi \iff \varphi \in \Gamma.$$

2.
$$\mathsf{M}^L \vDash \varphi \iff \varphi \in L.$$

Прежде чем доказывать эту важную теорему, приведём несколько следствий, иллюстрирующих её применение.

Следствие 5.4. $\textsc{Log}(\mathsf{F}^L) \subseteq L$.

Следствие 5.5. K — *логика класса всех шкал.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех шкал. Тогда

$$\mathrm{K} \subseteq \textsc{Log}(\mathcal{F}) \subseteq \textsc{Log}(\mathsf{F}^{\mathrm{K}}) \subseteq \mathrm{K}.$$

Первое включение имеет место в силу теоремы корректности (см. предложение 4.2), второе — по определению логики класса шкал, а последнее (самое неочевидное) включение — следствие следствия 5.4. □

Следствие 5.6. K4 — *логика класса всех транзитивных шкал.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех транзитивных шкал. Покажем, что

$$\mathrm{K4} \subseteq \textsc{Log}(\mathcal{F}) \subseteq \textsc{Log}(\mathsf{F}^{\mathrm{K4}}) \subseteq \mathrm{K4}.$$

Поскольку
$$(W,R) \vDash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \iff R \text{ транзитивно}$$
(предложение 1.5), в силу теоремы корректности имеет место первое включение. Последнее включение — следствие теоремы о канонической модели.

Существенным отличием от предыдущего примера является то, что сейчас нужно проверить второе включение. А именно, нужно установить, что R^{K4} транзитивно. Для этого покажем, что если $xR^{\mathrm{K4}}y$ и $yR^{\mathrm{K4}}z$, то для всякой формулы $\varphi \in z$ имеем $\Diamond\varphi \in x$ (напомним, что точки канонической шкалы — множества формул). Поскольку $\varphi \in z$, то $\mathsf{M}^{\mathrm{K4}}, z \vDash \varphi$ (пункт 1 теоремы о канонической модели); тогда $\mathsf{M}^{\mathrm{K4}}, y \vDash \Diamond\varphi$, и $\mathsf{M}^{\mathrm{K4}}, z \vDash \Diamond\Diamond\varphi$. В силу пункта 2 теоремы о канонической модели, $\mathsf{M}^{\mathrm{K4}}, x \vDash \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$, следовательно $\mathsf{M}^{\mathrm{K4}}, x \vDash \Diamond\varphi$, что в силу пункта 1 означает $\Diamond\varphi \in x$. □

Двинемся к доказательству теоремы о канонической модели. Нам понадобится

Лемма 5.7. *Пусть L — логика, Γ — L-максимальное множество, φ, ψ — формулы.*

1. *Если $\varphi \in \Gamma$, то $\neg\varphi \notin \Gamma$.*
2. *$\varphi \in \Gamma$ или $\neg\varphi \in \Gamma$.*
3. *Если $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$, то $\psi \in \Gamma$.*
4. *$\varphi, \psi \in \Gamma \iff \varphi \wedge \psi \in \Gamma$.*

5. $\varphi \vee \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$.

6. $L \subsetneqq \Gamma$.

Доказательство. Пункт 1 следует из 4.4.1 и L-непротиворечивости Γ. Пункт 2 следует из 4.4.2 и L-максимальности Γ.

Для доказательства пункта 3 заметим, что $\neg\psi \notin \Gamma$ (иначе Γ оказывается L-противоречивым, поскольку $\neg(p \wedge (p \to q) \wedge \neg q)$ является тавтологией и $\neg(\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi) \in L$); из пункта 2 получаем, что $\psi \in \Gamma$.

Докажем пункт 6. Если $\varphi \in L$, то $\neg\varphi \notin \Gamma$ в силу L-непротиворечивости Γ, то есть $\varphi \in \Gamma$ в силу пункта 2; это доказывает включение $L \subseteq \Gamma$. Кроме того, поскольку L — непротиворечивая логика, то $p \notin L$ и $\neg p \notin L$; в силу пункта 2, одна из формул p, $\neg p$ принадлежит Γ, следовательно, $L \neq \Gamma$.

Теперь пункт 4 следует из того, что $p \to (q \to (p \wedge q))$, $p \wedge q \to p$, $p \wedge q \to q$ — тавтологии.

Аналогично доказывается пункт 5, тут используются тавтологии $p \to p \vee q$, $q \to p \vee q$, $\neg p \to (\neg q \to \neg(p \vee q))$. $\square$

Доказательство теоремы 5.3. Пункт 1. Эквивалентность

$$\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \varphi \iff \varphi \in \Gamma \tag{1}$$

докажем индукцией по числу связок в формуле φ.

Если $\varphi \in PV$, то (1) следует из определения θ^L.

Разберем случаи, когда φ имеет вид $\neg\psi$, $\psi_1 \vee \psi_2$ или $\Diamond\psi$.

$\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \neg\psi \iff \mathsf{M}^L, \Gamma \nvDash \psi \overset{\text{IH}}{\iff} \psi \notin \Gamma$. В силу пунктов 1 и 2 леммы 5.7, последнее эквивалентно $\neg\psi \in \Gamma$.

Аналогично разбирается случай дизъюнкции: $\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \psi_1 \vee \psi_2 \iff \mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \psi_1$ или $\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \psi_2 \overset{\text{IH}}{\iff} \psi_1 \in \Gamma$ или $\psi_2 \in \Gamma$; осталось воспользоваться пунктом 5 леммы 5.7.

Рассмотрим самый важный случай $\varphi = \Diamond\psi$.

Пусть $\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \Diamond\psi$, то есть существует Δ такое, что $\mathsf{M}^L, \Delta \vDash \psi$ и $\Gamma R^L \Delta$. В силу предположения индукции, $\psi \in \Delta$, и в силу определения R^L, $\Diamond\psi \in \Gamma$.

Теперь предположим, что $\Diamond\psi \in \Gamma$, и покажем, что $\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \Diamond\psi$. Для этого построим Δ такое, что $\mathsf{M}^L, \Delta \vDash \psi$ и $\Gamma R^L \Delta$.

Утверждение 1. $\{\psi\}$ L-непротиворечиво.

Действительно, предположим, что $\{\psi\}$ L-противоречиво. Тогда $\neg\psi \in L$, то есть $\psi \to \bot \in L$; в силу правила монотонности $\Diamond\psi \to \Diamond\bot \in L$, и в силу 5.7.6, $\Diamond\psi \to \Diamond\bot \in \Gamma$; в силу 5.7.3, $\Diamond\bot \in \Gamma$. С другой стороны, $\neg\Diamond\bot \in L$ в силу определения 3.10, и (опять используем 5.7.6) $\neg\Diamond\bot \in \Gamma$. То есть $\neg\Diamond\bot \in \Gamma$ и $\Diamond\bot \in \Gamma$. Утверждение 1 доказано.

Положим

$$\Sigma \leftrightharpoons \{\neg\alpha \mid \Diamond\alpha \notin \Gamma\} \cup \{\psi\}.$$

Утверждение 2. Σ L-непротиворечиво.

Пусть Σ L-противоречиво. В силу утверждения 1 из этого следует, что найдутся формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 1$) такие, что $\Diamond\alpha_1, \dots, \Diamond\alpha_n \notin \Gamma$ и

$\neg(\neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_n \wedge \psi) \in L$. Тогда $\psi \to \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \in L$. По правилу монотонности получаем, что $\Diamond\psi \to \Diamond(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n) \in L$; поскольку $\Diamond\psi \in \Gamma$, имеем $\Diamond(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n) \in \Gamma$ (в силу пунктов 6 и 3 леммы 5.7). Используя то, что $\Diamond(p_1 \vee p_2) \to \Diamond p_1 \vee \Diamond p_2 \in L$ (определение 3.10) и пункт 5 леммы 5.7, легко увидеть, что $\Diamond\alpha_i \in \Gamma$ для какого-то i. Однако в силу определения Σ, $\Diamond\alpha_i \notin \Gamma$. Утверждение 2 доказано.

В силу леммы Линденбаума 4.5, существует $\Delta \in W^L$ такое, что $\Sigma \subseteq \Delta$.

Утверждение 3. $\Gamma R^L \Delta$.

Если $\Diamond\alpha \notin \Gamma$, то $\neg\alpha \in \Sigma$, следовательно $\neg\alpha \in \Delta$, то есть $\alpha \notin \Delta$, что доказывает утверждение 3.

По построению, $\psi \in \Delta$. В силу предположения индукции, $\mathsf{M}^L, \Delta \vDash \psi$, следовательно, $\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \Diamond\psi$.

Пункт 1 теоремы доказан.

Пункт 2. Если $\varphi \in L$, то для любого $\Gamma \in W^L$ имеем $\varphi \in \Gamma$, что, в силу доказанного выше, означает, что $\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \varphi$. Следовательно, $\mathsf{M}^L \vDash \varphi$.

Если $\varphi \notin L$, то $\neg\neg\varphi \notin L$, то есть $\{\neg\psi\}$ L-непротиворечиво. Тогда существует $\Gamma \in W^L$ такое, что $\neg\varphi \in \Gamma$. Тогда $\mathsf{M}^L, \Gamma \vDash \neg\varphi$, и $\mathsf{M}^L \nvDash \varphi$. $\square$

Лекция 6.

Определение 6.1. Логика L называется *полной по Крипке*, если L — логика некоторого класса шкал.

Будем писать $L + \varphi$ вместо $L + \{\varphi\}$.

Определение 6.2. Логика L называется *канонической*, если $L = \textsc{Log}(\mathsf{F}^L)$. Формула φ называется *канонической*, если канонической является логика $\mathrm{K} + \varphi$.

Таким образом, каноническая логика — это логика класса, состоящего из её канонической шкалы, то есть имеет место

Следствие 6.3. *Если L каноническая, то L полна по Крипке.*

Предложение 6.4. *Пусть L — непротиворечивая логика,* $\Gamma_1, \Gamma_2 \in W^L$. *Тогда*

$$\Gamma_1 R^L \Gamma_2 \iff \{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma_1\} \subseteq \Gamma_2.$$

Доказательство. Простое упражнение. $\Box$

Предложение 6.5. *Все модальные формулы из предложения 1.5 являются каноническими.*

Доказательство. Для формул $\Box\bot$, $\Diamond\top$ утверждение очевидно, так как эти формулы не зависят от оценки.

Формула транзитивности $\mathrm{A}\textsc{tr}$ была рассмотрена в следствии 5.6; аналогично рассматриваются случаи симметричности и рефлексивности (совсем несложное упражнение).

Рассмотрим формулу $\mathrm{ACR} = \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$. Напомним, что

$$(W, R) \vDash \mathrm{ACR} \iff \forall x, y_1, y_2 (xRy_1 \& xRy_2 \Rightarrow \exists z\ y_1 Rz \& y_2 Rz).$$

Это свойство называется *слабой направленностью* (или *свойством Чёрча-Россера*). Положим $L = \mathrm{K}{+}\mathrm{ACR}$ и покажем, что F^L обладает этим свойством, то есть что $\mathsf{F}^L \vDash \mathrm{ACR}$.

Пусть $xR^L y_1$, $xR^L y_2$. Положим

$$\Sigma = \{\varphi \mid \Box\varphi \in y_1 \cup y_2\}$$

и покажем, что Σ L-непротиворечиво. Пусть $\Box\alpha_1, \ldots, \Box\alpha_n \in y_1$, $\Box\beta_1, \ldots, \Box\beta_m \in y_2$. Тогда $\mathsf{M}^L, y_1 \vDash \wedge_i \Box\alpha_i$, следовательно $\mathsf{M}^L, y_1 \vDash \Box \wedge_i \alpha_i$. Тогда $\mathsf{M}^L, x \vDash \Diamond\Box \wedge_i \alpha_i$. Поскольку $\mathrm{ACR} \in L$, то

$$\mathsf{M}^L \vDash \Diamond\Box \wedge_i \alpha_i \to \Box\Diamond \wedge_i \alpha_i.$$

Следовательно $\mathsf{M}^L, x \vDash \Box\Diamond \wedge_i \alpha_i$ и $\mathsf{M}^L, y_2 \vDash \Diamond \wedge_i \alpha_i$. Тогда найдется точка $v \in R^L(y_2)$ такая, что все формулы α_i истинны в ней в модели M^L; кроме того, поскольку все формулы $\Box\beta_i$ истинны в y_2, то все β_i истинны в v; следовательно,

$$\mathsf{M}^L, v \not\models \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m).$$

Таким образом, ни для какого конечного $\Gamma \subseteq \Sigma$ формула $\neg \bigwedge \Gamma$ не принадлежит L, то есть Σ L-непротиворечиво.

В силу леммы Линденбаума, существует точка $z \in W^L$ такая, что $\Sigma \subseteq z$. В силу предложения 6.4, $y_1 R^L z$ и $y_2 R^L z$. Это означает, что $\mathsf{F}^L \models \mathrm{ACR}$.

Формула $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$ соответствует свойству *плотности* (предложение 1.5):

$$\forall x, y (xRy \Rightarrow \exists z\ xRz \& zRy).$$

Этот случай рассматривается аналогично предыдущему: если L — расширение K формулой плотности и $xR^L y$, то нужно рассмотреть множество

$$\Sigma = \Diamond y \cup \{\varphi \mid \Box\varphi \in x\},$$

доказать его непротиворечивость и рассмотреть его L-максимальное расширение. Упражнение. $\Box$

Предложение 6.6. $\mathrm{ACR} \in \mathrm{K} + \mathrm{Asym}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что всякая симметричная шкала обладает свойством направленности, и воспользоваться полнотой логики $\mathrm{K} + \mathrm{Asym}$. $\Box$

Положим

$$\mathrm{GL} \ \leftrightharpoons\ \mathrm{K} + \mathrm{AGL}.$$

В этом обозначении G — в честь Гёделя, L — в честь Лёба; в дальнейшем мы увидим, что как связана эта логика с формальной арифметикой.

Предложение 6.7. $\mathrm{Atr} \in \mathrm{K}{+}\mathrm{AGL}$.

Доказательство. Покажем, что $\mathsf{M}^{\mathrm{GL}} \models \mathrm{Atr}$. Для этого покажем, что R^{GL} транзитивно. Рассмотрим GL-максимальные множества формул x, y, z такие, что $xR^{\mathrm{GL}}yR^{\mathrm{GL}}z$.

Пусть $\varphi \in z$. Тогда $\Diamond\varphi \in y$, следовательно $\Diamond\varphi \vee \varphi \in y$, и $\Diamond(\Diamond\varphi \vee \varphi) \in x$. Заметим, что

$$[(\Diamond\varphi \vee \varphi)/p]\mathrm{AGL} = \Diamond(\Diamond\varphi \vee \varphi) \to \Diamond\left((\Diamond\varphi \vee \varphi) \wedge \Box\neg(\Diamond\varphi \vee \varphi)\right),$$

то есть эта формула принадлежит GL. Поскольку её посылка принадлежит x,

$$\mathsf{M}^L, x \models \Diamond\left((\Diamond\varphi \vee \varphi) \wedge \Box\neg(\Diamond\varphi \vee \varphi)\right).$$

Тогда в модели M^L в некоторой достижимой из x точке v истинна формула $\Diamond\varphi \vee \varphi$ и ложна формула $\Diamond\varphi$; тогда в ней истинна φ и $\mathsf{M}^L, x \models \Diamond\varphi$. Следовательно, $\Diamond\varphi \in x$, что доказывает транзитивность R^{GL}. $\Box$

Лекция 7.

Формулы φ и ψ называются *эквивалентными в логике* L, если $\varphi \leftrightarrow \psi \in L$.

Предложение 7.1. *Пусть L — логика. Тогда:*

1. *если φ и ψ эквивалентны в L (в частности, если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ является тавтологией или принадлежит* K*), то*
$$\varphi \in L \iff \psi \in L;$$
2. *если $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \in L$, то $\varphi \to \chi \in L$;*
3. *если $\varphi \in L$, то $\Box\varphi \in L$;*
4. *если $\varphi \to \psi$, то $\Box\varphi \to \Box\psi \in L$;*
5. *(лемма об эквивалентной замене) если $\alpha \leftrightarrow \beta \in L$ и ψ — результат замены в формуле φ одного из вхождений формулы α на формулу β, то $\varphi \leftrightarrow \psi \in L$.*

Доказательство. Проверим лишь последний пункт. Будем полагать, что $L \neq Fm$ (иначе нечего доказывать). Тогда условие $\alpha \leftrightarrow \beta \in L$ означает в точности, что $\|\alpha\|_{\mathsf{M}^L} = \|\beta\|_{\mathsf{M}^L}$ (теорема о канонической модели и предложение 3.7). Легко увидеть, что $\|\varphi\|_{\mathsf{M}^L} = \|\psi\|_{\mathsf{M}^L}$ (если рассуждать более формально, доказательство этого равенства выглядит так: существуют $\chi \in Fm$, $p \in PV$ такие, что $\varphi = [\alpha/p]\chi$, $\psi = [\beta/p]\chi$; рассмотрим модель $\mathsf{M} = (W^L, \theta)$, где $\theta(p) \leftrightharpoons \|\alpha\|_{\mathsf{M}^L}$, и $\theta(q) \leftrightharpoons \theta^L(q)$ при $p \neq q$; по предложению 3.9, $\|\varphi\|_{\mathsf{M}^L} = \|\chi\|_{\mathsf{M}}$, $\|\psi\|_{\mathsf{M}^L} = \|\chi\|_{\mathsf{M}}$). Следовательно, $\mathsf{M}^L \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$. $\Box$

Если $s \in \{\Diamond, \Box\}^*$ (слово в алфавите $\{\Diamond, \Box\}$), то $\overline{s}$ обозначает слово, получившееся из s одновременной заменой ромбов на боксы и боксов на ромбы.

Предложение 7.2. *Любая логика содержит формулы:*

1. $\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$, $\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$, $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$*;*
2. $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$, $\neg\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\neg\varphi$, $\neg\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\neg\varphi$*;*
$\neg s\varphi \leftrightarrow \overline{s}\neg\varphi$ *для любого* $s \in \{\Diamond, \Box\}^*$.

Доказательство. Легко проверяется, что эти формулы истинны в любой точке любой модели, то есть общезначимы в классе всех шкал. Поэтому эти формулы принадлежат K $\subseteq L$. $\Box$

Следствие 7.3. *Если $s, t \in \{\Diamond, \Box\}^*$, L — логика, то*
$$L + sp \to tp = L + \overline{t}p \to \overline{s}p.$$

Доказательство. Покажем, что для всякой логики L',

$$sp \to tp \in L' \iff \bar{t}p \to \bar{s}p \in L'.$$

Пусть $sp \to tp \in L'$. Этой формуле эквивалентна в K формула $\neg tp \to \neg sp$, и следовательно — формула $\bar{t}\neg p \to \bar{s}\neg p$ (предложение 7.2). Значит, $\bar{t}\neg p \to \bar{s}\neg p \in L'$. Тогда $\bar{t}\neg\neg p \to \bar{s}\neg\neg p \in L'$ (использовали подстановку). Используя лемму об эквивалентной замене, получаем $\bar{t}p \to \bar{s}p \in L'$.

Если же $\bar{t}p \to \bar{s}p \in L'$, то, в силу уже доказанного, $\bar{\bar{t}}p \to \bar{\bar{s}}p \in L'$. Осталось заметить, что $\bar{\bar{s}} = s$, $\bar{\bar{t}} = t$. $\square$

Пример. $\mathrm{S5} = \mathrm{K} + \{\Box p \to p, \Box p \to \Box\Box p, \Diamond\Box p \to p\}$

Пример. То, что $\mathrm{ACR} \in \mathrm{K} + \textsc{Asym}$, легко следует из полноты $\mathrm{K} + \textsc{Asym}$ (предложение 6.6). Этот факт легко получается и из доказанных выше предложений: если $p \to \Box\Diamond p \in L$, то $\Diamond\Box p \to p \in L$, и $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \in L$.

В предложении 6.7 мы проверили, что $\textsc{Atr} \in \mathrm{GL}$; для этого мы показали, что $\mathsf{M}^{\mathrm{GL}} \vDash \textsc{Atr}$. Дадим доказательство этого факта с использованием предложений 7.1 и 7.2, в котором каноническую модель GL рассматривать не понадобится.

Пусть $\beta = (\Diamond p \vee p) \wedge \Box\neg(\Diamond p \vee p)$.

По правилу подстановки, в GL имеется формула

$$\Diamond(\Diamond p \vee p) \to \Diamond\beta. \tag{1}$$

Несложно проверить, что в любой точке любой модели истинна формула $\beta \to \Box\neg p$ и истинна формула $\beta \to \Diamond p \vee p$, а значит, истинна и формула $\beta \to p$; в силу полноты K, это означает, что $\beta \to p \in \mathrm{K}$. По правилу монотонности, в K имеется формула

$$\Diamond\beta \to \Diamond p \tag{2}$$

Кроме того, в K имеется формула $\Diamond p \to \Diamond p \vee p$, следовательно (опять используем монотонность), в K есть

$$\Diamond\Diamond p \to \Diamond(\Diamond p \vee p). \tag{3}$$

Следовательно, формулы (1), (2) и (3) попали в GL, и дважды применив пункт 2 предложения 7.1, получаем $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p \in \mathrm{GL}$.

Вернёмся к изучению каноничности логик. Рассмотрим логику S5. Про каждую из трёх задающих её формул мы знаем, что они канонические: если $\varphi \in \{\textsc{Atr}, \textsc{Asym}, \textsc{Aref}\}$, то $\mathsf{F}^{\mathrm{K}+\varphi} \vDash \varphi$. Верно ли, что $\mathsf{F}^{\mathrm{S5}} \vDash \mathrm{S5}$? Ответ на этот вопрос утвердительный, в чем легко убедиться: для любой из этих трёх формул, доказательство общезначимости φ в канонической шкале логики $\mathrm{K} + \varphi$ переносится на случай любой непротиворечивой логики, содержащей φ. Этот факт обобщается следующим наблюдением:

Предложение 7.4. *Если φ каноническая, то φ общезначима в канонической шкале всякой непротиворечивой логики, содержащей φ.*

Это утверждение мы докажем с помощью понятия *порождённой подмодели.* Наряду с понятием p-морфизма, оно будет нами неоднократно использоваться в дальнейшем.

Определение 7.5. Рассмотрим шкалу $\mathsf{F} = (W, R)$, модель $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$ и непустое множество $V \subseteq W$. Отношение

$$R \restriction V \ \leftrightharpoons\ R \cap (V \times V)$$

называется *сужением отношения R на V*; шкала

$$\mathsf{F} \restriction V \ \leftrightharpoons\ (V, R \restriction V)$$

называется *сужением шкалы F на V*; наконец, модель

$$\mathsf{M} \restriction V \ \leftrightharpoons\ (\mathsf{F} \restriction V, \eta),$$

где $\eta(p) \leftrightharpoons \theta(p) \cap V$ для каждого $p \in PV$, называется *сужением модели M на V.*

V называется *R-замкнутым*, если $R(V) \subseteq V$, то есть если из $x \in V$ и xRy следует $y \in V$. В этом случае $\mathsf{F} \restriction V$ и $\mathsf{M} \restriction V$ называются *порождённой шкалой* и *подмоделью*, соответственно.

Лемма 7.6 (о порождённой подмодели)**.** *Пусть $\mathsf{F} = (W, R)$, $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$, V — непустое R-замкнутое подмножество W. Тогда*

1. *если $x \in V$, то*
$$\mathsf{M}, x \vDash \varphi \iff \mathsf{M} \restriction V, x \vDash \varphi;$$
2. *если $\mathsf{F} \vDash \varphi$, то $\mathsf{F} \restriction V \vDash \varphi$.*

Доказательство. Пункт 1 доказывается индукцией по числу связок в формуле. Рассмотрим лишь случай $\varphi = \Diamond\psi$.

Пусть $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$. Тогда $\mathsf{M}, y \vDash \psi$ и xRy для некоторого y. В силу R-замкнутости V, $y \in V$, что означает, что $(x, y) \in R \restriction V$. В силу IH, $\mathsf{M} \restriction V, y \vDash \psi$, следовательно, $\mathsf{M} \restriction V, x \vDash \Diamond\psi$.

Пусть $\mathsf{M} \restriction V, x \vDash \varphi$. Тогда $\mathsf{M} \restriction V, y \vDash \psi$ и $(x, y) \in R \restriction V$ для некоторого $y \in V$. Поскольку это означает, что xRy, осталось лишь применить IH.

Пункт 2 докажем от противного. Предположим, что $\mathsf{F} \restriction V \nvDash \varphi$, то есть найдутся $\mathsf{N} = (\mathsf{F} \restriction V, \eta)$ и $x \in V$ такие, что $\mathsf{N}, x \vDash \neg\varphi$. Рассмотрим модель $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$, где $\theta(p) = \eta(p)$ для всех переменных p. Тогда $\mathsf{M} \restriction V = \mathsf{N}$, и $\mathsf{M}, x \vDash \neg\varphi$ в силу пункта 1. □

Доказательство предложения 7.4. Положим $V = \{x \in W^{\mathrm{K}+\varphi} \mid L \subseteq x\}$.

Утверждение 1. $V = W^L$.

Напомним, что если в точке модели истинны все формулы какой-то логики, то все истинные в этой точке формулы образуют максимальное относительно этой логики множество (предложение 5.1). Если $x \in V$, то, поскольку $x = \{\varphi \mid \mathsf{M}^{\mathrm{K}+\varphi}, x \vDash \varphi\}$ и $\mathsf{M}^{\mathrm{K}+\varphi}, x \vDash L$, x является L-максимальным, то есть

$x \in W^L$. Если же $x \in W^L$, то $x = \{\varphi \mid \mathsf{M}^L, x \vDash \varphi\}$ и $\mathsf{M}^{\mathrm{K}+\varphi}, x \vDash L \supseteq \mathrm{K}+\varphi$, то есть $x \in W^{\mathrm{K}+\varphi}$; поскольку $L \subseteq x$, $x \in V$. Утверждение доказано.

Из определения канонического отношения немедленно следует, что для любых $x, y \in V$

$$xR^L y \iff xR^{\mathrm{K}+\varphi} y,$$

то есть $R^L = R^{\mathrm{K}+\varphi} \restriction V$. Таким образом, F^L — это сужение $\mathsf{F}^{\mathrm{K}+\varphi}$ на V.

Утверждение 2. V $R^{\mathrm{K}+\varphi}$-замкнуто.

Пусть $x \in V$, $xR^{\mathrm{K}+\varphi}y$. Покажем, что $L \subseteq y$. Если $\psi \in L$, то $\Box\psi \in L$, следовательно $\Box\psi \in x$, из чего заключаем, что $\psi \in y$. Следовательно, $L \subseteq y$, то есть $y \in V$.

Утверждения 1 и 2 означают, что F^L — порождённая подшкала $\mathsf{F}^{\mathrm{K}+\varphi}$. Поскольку φ каноническая, $\mathsf{F}^L \vDash \varphi$ в силу леммы о порождённой подмодели.

$\Box$

Следствие 7.7. *Если Ψ — множество канонических формул,* $\mathrm{K}+\Psi \neq Fm$, *то* $\mathrm{K}+\Psi$ *каноническая.*

Пример. Логика S5 (как и все непротиворечивые логики, получающиеся из модальных формул предложения 1.5) является канонической. Следовательно, она полна по Крипке, и следовательно, является логикой класса всех своих шкал (то есть шкал, где она общезначима). Поскольку

$$(W, R) \vDash \mathrm{S5} \iff R \text{ транзитивно, рефлексивно и симметрично},$$

имеем

$$\mathrm{S5} = \textsc{Log}(\{(W, R) \mid W \neq \varnothing \;\&\; R \text{ — отношение эквивалентности}\}).$$

Определение 7.8. Пусть F — шкала. Формула φ называется F-*выполнимой* (или *выполнимой в* F), если $\mathsf{F} \nvDash \neg\varphi$, то есть если существует модель $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$ и точка x этой модели такие, что $\mathsf{M}, x \vDash \varphi$.

Если $\mathcal{F}$ — класс шкал, то φ называется $\mathcal{F}$-*выполнимой*, если $\mathcal{F} \nvDash \neg\varphi$, то есть если φ выполнима в некоторой шкале этого класса.

Из этого определения непосредственно следует

Предложение 7.9. $L = \textsc{Log}(\mathcal{F}) \iff \mathcal{F} \vDash L$ *и всякая L-непротиворечивая формула является $\mathcal{F}$-выполнимой.*

Многие теоремы полноты оказывается удобно доказывать, следуя логике этого предложения. Например, докажем полноту S5 относительно класса шкал с *универсальным отношением*

$$\mathcal{F}^{(u)} \leftrightharpoons \{(W, W \times W) \mid W \neq \varnothing\}$$

(а заодно и проиллюстрируем еще раз использование леммы о порождённой подмодели).

Предложение 7.10. $\mathrm{S5} = \textsc{Log}(\mathcal{F}^{(u)})$.

Доказательство. Поскольку всякое универсальное отношение является отношением эквивалентности, $\mathcal{F}^{(u)} \vDash \mathrm{S5}$.

Рассмотрим S5-непротиворечивую формулу φ. В силу полноты по Крипке логики S5, φ выполнима в некоторой шкале $\mathsf{F} = (W, \sim)$, где $\sim$ — отношение эквивалентности. То есть $(\mathsf{F}, \theta), x \vDash \varphi$ для некоторых θ, x. Пусть V — класс эквивалентности x по $\sim$. Поскольку множество V $\sim$-замкнуто и непусто, $(\mathsf{F}, \theta){\restriction}V$ является порождённой подмоделью (F, θ), и в силу леммы о порождённой подмодели, $(\mathsf{F}, \theta) \restriction V, x \vDash \varphi$. Кроме того, $\sim\restriction V = V \times V$, то есть $\mathsf{F}{\restriction}V \in \mathcal{F}^{(u)}$. В силу предложения 7.9, $\mathrm{S5} = \textsc{Log}(\mathcal{F}^{(u)})$). $\square$

Лекция 8.

Определение 8.1. Логика называется *финитно аппроксимируемой*, если она полна относительно некоторого класса конечных шкал.

Определение 8.2. Логика L называется *конечно аксиоматизируемой*, если $L = \mathrm{K} + \Psi$ для некоторого конечного множества формул Ψ.

Замечание. Конечно аксиоматизируемая и финитно аппроксимируемая логика является разрешимой (т. Харропа).

Будем говорить, что F — *L-шкала*, если $\mathsf{F} \vDash L$.

Финитная аппроксимируемость логики L означает, что для всякой L-непротиворечивой формулы найдется конечная L-шкала, в которой эта формула выполнима (Предложение 7.9). Если мы уже установили полноту L относительно некоторого класса шкал $\mathcal{F}$, то условие L-непротиворечивости можно заменить на $\mathcal{F}$-выполнимость. В этом случае финитная аппроксимируемость будет следовать из такого рассуждения:

если M — модель на L-шкале и $\mathsf{M}, x \vDash \varphi$, то существует модель M' на конечной L-шкале и точка x' такие, что $\mathsf{M}', x' \vDash \varphi$.

Следующая конструкция, называемая *селективной фильтрацией* — один из способов “извлекать” такую M' из M.

Определение 8.3. Модель (V, S, η) называется *слабой подмоделью модели* (W, R, θ), если

$$V \subseteq W,\ S \subseteq R \text{ и } \eta(p) = \theta(p) \cap V \text{ для каждого } p \in PV.$$

Пусть Γ — множество формул, $\mathsf{N} = (V, S, \eta)$ — слабая подмодель M. Модель N называется *селективной фильтрацией* M *по* Γ, если выполнено следующее условие: для любых $\Diamond\psi \in \Gamma$, $x \in V$, если $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$, то $\mathsf{M}, y \vDash \psi$ для некоторого $y \in S(x)$.

Множество всех подформул формулы φ будем обозначать $sf(\varphi)$. Множество формул Γ *замкнуто относительно взятия подформул*, если из того, что $\varphi \in \Gamma$ и $\psi \in sf(\varphi)$ следует, что $\psi \in \Gamma$.

Лемма 8.4 (о селективной фильтрации)**.** *Пусть Γ замкнуто относительно взятия подформул, N — селективная фильтрация M по Γ. Тогда для любых $\varphi \in \Gamma$ и x из N верно:*

$$\mathsf{M}, x \vDash \varphi \iff \mathsf{N}, x \vDash \varphi.$$

Доказательство. Несложное упражнение. □

Заметим, что селективная фильтрация лишь сохраняет истинность подформул, входящих в Γ, но, вообще говоря, не гарантирует ни конечности получившейся модели, ни того, что сохранится общезначимость тех или иных модальных формул при переходе от шкалы “большой” модели к шкале “маленькой”.

Докажем финитную аппроксимируемость логики S5.

Предложение 8.5.

1. *Если* φ S5-*непротиворечива, то* φ *выполнима в шкале* $(V, V \times V)$, *где* $|V| \leq |sf(\varphi)|$.

2. $\mathrm{S5} = \mathrm{Log}\{(V, V \times V) \mid V$ *конечно и непусто*$\}$.

Доказательство. В силу предложения 7.10, всякая S5-непротиворечивая формула выполнима в некоторой шкале $\mathsf{F} = (W_0, W_0 \times W_0)$.

Пусть $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$, $\mathsf{M}, x \vDash \varphi$. Рассмотрим множество формул

$$\Phi = \{\psi \mid \Diamond\psi \in sf(\varphi) \ \& \ \exists y \ \mathsf{M}, y \vDash \psi\}.$$

Пусть $\Phi = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Выберем такие точки $x_1, \ldots, x_n$, что $\mathsf{M}, x_i \vDash \psi_i$, и положим $V = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$. Множество V непусто, так как $x \in V$. Рассмотрим сужение $\mathsf{M} \restriction V$ модели M на V: эта модель является селективной фильтрацией M по $sf(\varphi)$. В силу леммы о селективной фильтрации, $\mathsf{M}\restriction V, x \vDash \varphi$. Кроме того, $\mathsf{F}\restriction V = (V, V \times V)$. Пункт 1 доказан.

Пункт 2 следует из пункта 1 и предложения 7.9. □

Следствие 8.6. S5 *разрешима. (На самом деле, из пункта 1 предыдущего предложения не очень сложно получить более сильный результат:* S5 *является* $CoNP$*-полной логикой.)*

Нашей следующей целью будет доказать полноту логики GL. Это будет чуть сложнее, чем в случае логик, задаваемых формулами из предложения 1.5: эта логика не является канонической.

Предложение 8.7. $\mathsf{F}^{\mathrm{GL}} \nvDash \mathrm{GL}$.

Доказательство. В силу предложения 2.1, необходимым условием общезначимости AGL в шкале является её иррефлексивность. Покажем, что F^{GL} иррефлексивной не является.

Положим $\Sigma = \{\varphi \to \Diamond\varphi \mid \varphi \in Fm\}$, и покажем, что это множество GL-непротиворечиво.

Допустим, что

$$\neg((\alpha_1 \to \Diamond\alpha_1) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n \to \Diamond\alpha_n)) \in \mathrm{GL}$$

для каких-то формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Это означает, что в GL имеется формула

$$(\alpha_1 \wedge \Box\neg\alpha_1) \vee \ldots \vee (\alpha_n \wedge \Box\neg\alpha_n) \tag{1}$$

(предложение 7.2). Рассмотрим шкалу $\mathsf{G} = (\{1, \ldots, n+1\}, <)$. В силу предложения 2.1, $\mathsf{G} \vDash \mathrm{GL}$. Пусть M — какая-то модель на G. Тогда формула (1) истинна в модели M. Это означает, что в каждой точке этой модели истинен какой-то из дизъюнктов формулы (1); поскольку точек всего $n+1$, а дизъюнктов n, то в двух разных точках M истинна формула $\alpha_k \wedge \Box\neg\alpha_k$ при каком-то k; тогда в меньшей из них истинны формулы $\Diamond\alpha_k$ и $\Box\neg\alpha_k$. Это противоречие доказывает непротиворечивость Σ.

В силу леммы Линденбаума, существует точка $x \in W^{\mathrm{GL}}$ такая, что $\Sigma \subseteq x$. Очевидно, $xR^{\mathrm{GL}}x$. □

Теорема 8.8. GL *полна по Крипке.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех GL-шкал, т.е. $\mathcal{F} = \{\mathsf{F} \mid \mathsf{F} \vDash \mathrm{GL}\}$, и пусть φ GL-непротиворечива. Покажем, что φ $\mathcal{F}$-выполнима.

В силу GL-непротиворечивости φ, найдется точка $x_0 \in W^{\mathrm{GL}}$ такая, что $\varphi \in x_0$. Поскольку $\Diamond\varphi \to \Diamond(\varphi \wedge \neg\Diamond\varphi) \in \mathrm{GL}$, то или $\Diamond\varphi \notin x_0$, или $\Diamond(\varphi \wedge \neg\Diamond\varphi) \in x_0$. Следовательно, существует точка $x \in W^{\mathrm{GL}}$ такая, что $\varphi \in x$ и $\neg\Diamond\varphi \in x$.

Положим

$$V_\varphi = \{y \mid \mathsf{M}, y \vDash \psi \wedge \neg\Diamond\psi \text{ для какой-то } \psi \in sf(\varphi)\}.$$

Заметим, что $x \in V_\varphi$.

Утверждение 1. $\mathsf{M}^{\mathrm{GL}}{\restriction}V_\varphi$ — селективная фильтрация M^{GL} по $sf(\varphi)$.

Пусть $\Diamond\psi \in sf(\varphi)$, $z \in V_\varphi$ и $\mathsf{M}, z \vDash \Diamond\psi$. Тогда $\mathsf{M}, z \vDash \Diamond(\psi \wedge \neg\Diamond\psi)$, то есть найдется $y \in V_\varphi$ такой, что $\mathsf{M}^{\mathrm{GL}}, y \vDash \varphi$ и $zR^{\mathrm{GL}}y$; осталось заметить, что $(z, y) \in R^{\mathrm{GL}}{\restriction}V_\varphi$.

Утверждение 2. $\mathsf{F}^{\mathrm{GL}}{\restriction}V_\varphi \vDash \mathrm{GL}$. Транзитивность этой шкалы следует из транзитивности F^{GL} (предложение 6.7), иррефлексивность — из определения V_φ. Следовательно, $\mathsf{F}^{\mathrm{GL}}{\restriction}V_\varphi$ — строгий частичный порядок. Несложно увидеть, что число элементов любой цепи в V_φ ограничено числом подформул φ (иначе бы в двух точках цепи оказалась истинна какая-то формула вида $\psi \wedge \neg\Diamond\psi$, чего быть не может). Следовательно, всякое непустое подмножество V_φ имеет максимальный элемент.

В силу леммы о селективной фильтрации, $\mathsf{M}^{\mathrm{GL}}{\restriction}V_\varphi, x \vDash \varphi$. В силу предложения 7.9, $\mathrm{GL} = \textsc{Log}(\mathcal{F})$. $\square$

Лекция 9.

Предложение 9.1. *Если X — бесконечное множество, то* $\textsc{Log}(X, X \times X) = \mathrm{S5}$.

Доказательство. Очевидно, что $(X, X \times X) \vDash \mathrm{S5}$, то есть $\textsc{Log}(X, X \times X) \supseteq \mathrm{S5}$. Докажем обратное включение.

В силу предложения 8.5,

$$\textsc{Log}\{(V, V \times V) \mid V \text{ конечно и непусто}\} = \mathrm{S5}.$$

Если V конечно и непусто, то существует сюръективное отображение $f : X \twoheadrightarrow V$. Легко увидеть, что f — p-морфизм шкалы $(X, X \times X)$ на шкалу $(V, V \times V)$. В силу леммы о p-морфизме 2.5, $\textsc{Log}(X, X \times X) \subseteq \textsc{Log}(V, V \times V)$. Следовательно, $\textsc{Log}(X, X \times X) \subseteq \mathrm{S5}$. $\square$

Пусть C_0 обозначает шкалу, состоящую из единственной иррефлексивной точки: $\mathsf{C}_0 \leftrightharpoons (\{0\}, \varnothing)$.

Предложение 9.2. $\textsc{Log}(\mathsf{C}_0) = \mathrm{K} + \Box\bot$.

Доказательство. Очевидно, $\mathsf{C}_0 \vDash \Box\bot$. Пусть φ — $(\mathrm{K}+\Box\bot)$-непротиворечивая формула. Формула $\Box\bot$ является канонической, следовательно $\mathrm{K} + \Box\bot$ полна по Крипке, следовательно, существуют F, θ, x такие, что $(\mathsf{F}, \theta), x \vDash \varphi$ и $\mathsf{F} \vDash \Box\bot$. Последнее означает, что отношение в шкале F пусто (предложение 1.5). В силу леммы о порождённой подмодели, φ выполнима в шкале $\mathsf{F} \upharpoonright \{x\}$, которая является шкалой, состоящей из единственной иррефлексивной точки. Из этого следует, что φ выполнима в C_0.

В силу предложения 7.9, $\textsc{Log}(\mathsf{C}_0) = \mathrm{K} + \Box\bot$. $\square$

Пусть C_1 обозначает шкалу, состоящую из единственной рефлексивной точки: $\mathsf{C}_1 \leftrightharpoons (\{0\}, \{0, 0\})$.

Предложение 9.3. $\textsc{Log}(\mathsf{C}_1) = \mathrm{K} + \Diamond p \leftrightarrow p$.

Доказательство. Несложно показать, что общезначимость формулы $\Diamond p \leftrightarrow p$ соответствует условию

$$\forall x \forall y (xRx \iff x = y).$$

Кроме того, формула $\Diamond p \leftrightarrow p$ является канонической (это несложное упражнение), поэтому $\mathrm{K} + \Diamond p \leftrightarrow p$ полна.

Остальная часть доказательства совершенно аналогична доказательству предложения 9.2. $\square$

В доказательстве предложения 9.3 мы использовали следующее очевидное соображение: логики двух иррефлексивных точек совпадают. Это наблюдение обобщается следующим образом.

Определение 9.4. Шкалы (W,R) и (V,S) называются *изоморфными*, если существует биекция $f : W \to V$ такая, что

$$xRy \iff f(x)Sf(y).$$

Обозначение: $(W,R) \cong (V,S)$.

Предложение 9.5. $\mathsf{F} \cong \mathsf{G} \Rightarrow \textsc{Log}(\mathsf{F}) = \textsc{Log}(\mathsf{G})$.

Доказательство. Достаточно заметить, что изоморфизм является p-морфизмом. $\square$

Лекция 10.

Одной из наших ближайших целей будет найти аксиоматику логики $\textsc{Log}(\mathbb{R}, \leq)$.

$$\textsc{Alin} \leftrightharpoons \Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(q \wedge \Diamond p).$$

Предложение 10.1.

$$(W, R) \vDash \textsc{Alin} \iff \forall x, y, z(xRy \& xRz \Rightarrow yRz \vee zRy).$$

Доказательство. Упражнение. □

$$\mathrm{S4.3} \leftrightharpoons \mathrm{S4} + \textsc{Alin}.$$

Таким образом, формула $\textsc{Alin}$ общезначима в любом нестрогом линейном порядке. В частности, $(\mathbb{R}, \leq) \vDash \mathrm{S4.3}$. Позже мы покажем, что $\textsc{Log}(\mathbb{R}, \leq) = \mathrm{S4.3}$. Мы докажем этот факт аналогично предложению 9.1: мы докажем, что S4.3 полна относительно класса конечных нестрогих линейных порядков, и покажем, что каждый такой порядок является p-морфным образом $(\mathbb{R}, \leq)$.

Предложение 10.2. $\textsc{Alin}$ *каноническая.*

Доказательство. Положим $\mathsf{M} = \mathsf{M}^{\mathrm{K}+\textsc{Alin}}$, $R = R^{\mathrm{K}+\textsc{Alin}}$.

Пусть xRy, xRz и неверно, что zRy. Покажем, что в этом случае yRz. Рассмотрим множество $\Sigma = y \cup \Diamond z$ и покажем, что оно $\mathrm{K} + \textsc{Alin}$-непротиворечиво. Пусть Φ, Ψ — какие-то конечные множества формул, $\Phi \subseteq y, \Psi \subseteq z$. Тогда $\Phi \cup \Diamond\Psi$ — конечное подмножество Σ. Поскольку неверно, что zRy, то найдется формула φ такая, что $\varphi \in y$ и $\Diamond\varphi \notin z$. Пусть $\alpha = \wedge\Phi \wedge \varphi$, $\beta = \wedge\Psi \wedge \neg\Diamond\varphi$. Поскольку $\mathsf{M}, y \vDash \alpha$, $\mathsf{M}, z \vDash \beta$, то $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta$. Формула $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \to \Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta) \vee \Diamond(\beta \wedge \Diamond\alpha)$ является результатом подстановки в формулу $\textsc{Alin}$, и поэтому истинна в точке x модели M (теорема о канонической модели). Следовательно, $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta) \vee \Diamond(\beta \wedge \Diamond\alpha)$. Поскольку одним из конъюнктов β является формула $\neg\Diamond\varphi$, а одним из конъюнктов α — формула φ, то $\mathsf{M}, x \nvDash \Diamond(\beta \wedge \Diamond\alpha)$. Следовательно, $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond(\alpha \wedge \Diamond\beta)$, то есть существует точка канонической модели, в которой истинны все формулы из множества $\Phi \cup \Diamond\Psi$. Это означает, что всякое конечное подмножество Σ является $\mathrm{K} + \textsc{Alin}$-непротиворечивым. Следовательно, $\mathrm{K} + \textsc{Alin}$-непротиворечивым является и само множество Σ. Из максимальности y и непротиворечивости $y \cup \Diamond z$ следует, что $\Diamond z \subseteq y$, что и означает yRz. □

Следствие. S4.3 *полна.*

Если $\mathsf{F} \vDash L$, будем говорить, что F *L-шкала.* Класс всех L-шкал будем обозначать $\mathcal{V}(L)$, класс всех конечных L-шкал — $\mathcal{V}_{fin}(L)$. Очевидно, что L полна тогда и только тогда, когда $L = \textsc{Log}(\mathcal{V}(L))$, и финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $L = \textsc{Log}(\mathcal{V}_{fin}(L))$.

Теорема 10.3. *Логики* $\mathrm{K}, \mathrm{K4}, \mathrm{S4}, \mathrm{S4.2}, \mathrm{S4.3}, \mathrm{K}+p \to \Diamond p, \mathrm{K}+\Diamond p \to \Diamond\Diamond p, \mathrm{K}+\Diamond\top$ *финитно аппроксимируемы.*

Доказательство. Каждая из этих логик задаётся каноническими формулами, следовательно полна. Пусть L — одна из этих логик. Наша цель показать, что $L = \textsc{Log}(\mathcal{V}_{fin}(L))$. В силу предложения 7.9, достаточно показать, что всякая L-непротиворечивая формула является $\mathcal{V}_{fin}(L)$-выполнимой. В силу полноты L, формула φ является L-непротиворечивой тогда и только тогда, когда она $\mathcal{V}(L)$-выполнима. Таким образом, для доказательства финитной аппроксимируемости L нужно показать, что из $\mathcal{V}(L)$-выполнимости следует $\mathcal{V}_{fin}(L)$-выполнимость.

Пусть φ — $\mathcal{V}(L)$-выполнимая формула, то есть существуют $\mathsf{F} = (W, R)$, $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$, x такие, что $\mathsf{F} \vDash L$ и $\mathsf{M}, x \vDash \varphi$. Будем строить шкалу $\overline{\mathsf{F}}$, модель $\overline{\mathsf{M}}$ и точку этой модели так, чтобы были выполнены условия

$$\overline{\mathsf{M}}, \overline{x} \vDash \varphi; \tag{*}$$

$$\overline{\mathsf{F}} \vDash L. \tag{**}$$

То есть следует следить за двумя вещами: в новой модели формула φ должна по-прежнему быть истинна в одной из точек, а построенная шкала должна быть L-шкалой.

На точках шкалы F введём отношение $\sim_\varphi$:

$$x_1 \sim_\varphi x_2 \leftrightharpoons \forall \psi \in sf(\varphi)(\mathsf{M}, x_1 \vDash \psi \iff \mathsf{M}, x_2 \vDash \psi),$$

то есть $x_1 \sim_\varphi x_2$ означает, что в точках x_1 и x_2 в модели M истинны одни и те же подформулы формулы φ. Очевидно, что $\sim_\varphi$ является отношением эквивалентности на W. Положим

$$\overline{W} := W / \sim_\varphi,$$

то есть точками новой модели будут классы эквивалентности по отношению $\sim_\varphi$. Класс эквивалентности точки $y \in W$ будем обозначать $\overline{y}$. Легко увидеть, что

$$|\overline{W}| \leq 2^{|sf(\varphi)|}.$$

Оценку $\overline{\theta}$ на $\overline{W}$ определим так: для всякой переменной p

$$\overline{\theta(p)} := \{c \in \overline{W} \mid \exists y \in c\ \mathsf{M}, y \vDash p\}.$$

Заметим, что если переменная p встречается в формуле φ, то условие $\exists y \in c\ \mathsf{M}, y \vDash p$ равносильно условию $\forall y \in c\ \mathsf{M}, y \vDash p$.

Определим на $\overline{W}$ отношение $\overline{R}$:

$$c\overline{R}d \leftrightharpoons \exists y \in c\ \exists z \in d\ yRz.$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай I. L одна из логик $\mathrm{K}, \mathrm{K}+p \to \Diamond p, \mathrm{K}+\Diamond p \to \Diamond\Diamond p, \mathrm{K}+\Diamond\top$.

Положим $\overline{\mathsf{F}} = (\overline{W}, \overline{R})$, $\overline{M} = (\overline{\mathsf{F}}, \theta)$. Тогда индукцией по построению формулы несложно проверить, что для любой формулы $\psi \in sf(\varphi)$ и любого y из W

$$\mathsf{M}, y \vDash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\mathsf{M}}, \overline{y} \vDash \psi.$$

Рассмотрим лишь случай формулы, начинающейся с $\Diamond$. Если $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond\psi$, то $\mathsf{M}, z \vDash \psi$ для некоторого $z \in R(y)$. Это означает, что $\overline{y}\overline{R}\overline{z}$ и, по предположению индукции, $\overline{\mathsf{M}}, \overline{z} \vDash \psi$; следовательно, $\overline{\mathsf{M}}, \overline{y} \vDash \Diamond\psi$. Если же $\overline{\mathsf{M}}, \overline{y} \vDash \Diamond\psi$, то $\overline{\mathsf{M}}, c \vDash \psi$ для некоторого класса эквивалентности $c \in \overline{R}(\overline{y})$. Последнее означает, что существуют $y' \in \overline{y}$ и $z \in c$ такие, что $y'Rz$. По предположению индукции, $\mathsf{M}, z \vDash \psi$, следовательно $\mathsf{M}, y' \vDash \Diamond\psi$, и, поскольку $\Diamond\psi \in sf(\varphi)$ и $y' \sim_\varphi y$, то $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond\varphi$.

Тем самым, выполнено условие (*): поскольку $\mathsf{M}, x \vDash \varphi$, то $\overline{\mathsf{M}}, \overline{x} \vDash \varphi$. Остаётся проверить условие (**), то есть показать, что $\overline{\mathsf{F}} \vDash L$. Если $L = \mathrm{K}$, то проверять нечего: K общезначима на любой шкале. Если $L = \mathrm{K}{+}p \to \Diamond p$, то шкала F является рефлексивной. Тогда для всякого класса $\overline{y}$ имеем $\overline{y}\overline{R}\overline{y}$ (так как в шкале F мы имеем yRy), то есть построенная шкала также рефлексивна. Аналогично, используя предложение 1.5, легко проверить, что общезначимость формул $\Diamond\top$, $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$ также преносится с F на $\overline{\mathsf{F}}$. Таким образом, описанная конструкция сохраняет общезначимость логик $\mathrm{K}, \mathrm{K} + p \to \Diamond p, \mathrm{K} + \Diamond p \to \Diamond\Diamond p, \mathrm{K} + \Diamond\top$.

Финитную аппроксимируемость логик $\mathrm{K4}, \mathrm{S4}, \mathrm{S4.2}, \mathrm{S4.3}$ докажем в лекции 13. $\square$

Упражнение. Найти транзитивную шкалу $\mathsf{F} = (W, R)$, модель (F, θ) и формулу φ такие, чтобы определённое выше отношение $\overline{R}$ оказалась не транзитивным.

Лекции 11 и 12.

В этих лекциях речь идёт о знаменитой теореме Салквиста, дающей полноту по Крипке (более того, каноничность и элементарность) для целого класса формул.

Модальная формула φ называется *элементарной*, если класс всех шкал, в котором общезначима φ, задаётся некоторой формулой первого порядка. Например, формулы из предложения 1.5 являются элементарными, а формула Гёделя-Лёба — нет.

Определение 11.1. *Бокс-атомами* назовём формулы вида ∇p и $\nabla\neg p$, где ∇ — последовательность боксов (возможно, пустая).

n-модальная формула называется *формулой Салквиста*, если она имеет вид

$$\underbrace{\Box\ldots\Box}_{l\text{ раз},\ l\geq 0}(\psi\to\chi),$$

где χ строится из переменных с помощью $\vee,\wedge,\Box,\Diamond$, а формула ψ строится из бокс-атомов с помощью $\wedge$ и $\Diamond$.

Теорема 11.2. *Всякая формула Салквиста является канонической и элементарной.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книгах [P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema. “Modal Logic”, 2002], [A. Chagrov and M. Zakharyaschev. “Modal Logic”, 1997].

Пример 11.3. Все формулы из предложения 1.5 являются формулами Салквиста. Формулы $\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p$ и $\Diamond p\to\Diamond(p\wedge\neg\Diamond p)$ не является формулами Салквиста.

Лекция 13.

Вторая часть доказательства теоремы 10.3. Теперь разберём случай, когда логика содержит формулу транзитивности.

Случай II. L — одна из логик $\mathrm{K4}, \mathrm{S4}, \mathrm{S4.2}, \mathrm{S4.3}$. Положим $\widetilde{F} := (\overline{W}, \widetilde{R})$, $\widetilde{M} := (\widetilde{\mathsf{F}}, \overline{\theta})$, где

$$\overline{x}\widetilde{R}\overline{y} \leftrightharpoons \forall\psi(\Diamond\psi \in sf(\varphi) \ \&\ \mathsf{M}, y \vDash \psi \vee \Diamond\psi \ \Rightarrow\ \mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi)$$

(несложно увидеть, что это определение корректно). Изменилось лишь отношение в конечной модели, а носитель и оценка остались прежними — как в случае I.

Покажем, что

$$\overline{x}\overline{R}\overline{y} \ \Rightarrow\ \overline{x}\widetilde{R}\overline{y}. \tag{1}$$

По определению $\overline{R}$, найдутся x_0, y_0 такие, что $x_0 R y_0$, $x_0 \sim_\varphi x$, $y_0 \sim_\varphi y$. Пусть $\Diamond\psi \in sf(\varphi)$, $\mathsf{M}, y \vDash \psi \vee \Diamond\psi$. Нужно показать, что $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$. Если $\mathsf{M}, y \vDash \psi$, то $\mathsf{M}, y_0 \vDash \psi$, поскольку $\psi \in sf(\varphi)$; тогда $\mathsf{M}, x_0 \vDash \Diamond\psi$, и поскольку $\Diamond\psi \in sf(\varphi)$, то $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$. Если же $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond\psi$, то $\mathsf{M}, y_0 \vDash \Diamond\psi$ и $\mathsf{M}, z \vDash \psi$ для некоторого z такого, что $y_0 R z$. В силу транзитивности отношения R (напомним, что $\mathsf{F} \vDash L$ и мы рассматриваем случай $\mathrm{K4} \subseteq L$), $x_0 R z$; следовательно, $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$, что и требовалось.

Теперь покажем, что сохранилась истинность подформул φ:

$$\mathsf{M}, y \vDash \psi \quad\Longleftrightarrow\quad \widetilde{\mathsf{M}}, \overline{y} \vDash \psi \tag{2}$$

для любой $\psi \in sf(\varphi)$. Индукция по числу связок в формуле. Разберём случай, когда формула начинается с модальности. Если $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond\psi$, то $\mathsf{M}, z \vDash \psi$ для какого-то z такого, что yRz. По предположению индукции $\widetilde{\mathsf{M}}, \overline{z} \vDash \psi$. Кроме того, $\overline{y}\overline{R}\overline{z}$, и в силу (1), $\overline{y}\widetilde{R}\overline{z}$. Следовательно, $\widetilde{\mathsf{M}}, \overline{y} \vDash \Diamond\psi$. Если же $\widetilde{\mathsf{M}}, \overline{y} \vDash \Diamond\psi$, то из предположения индукции и определения $\widetilde{R}$ немедленно следует, что $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond\psi$.

Наконец, покажем, что

$$\widetilde{R} \text{ транзитивно.} \tag{3}$$

Пусть $\overline{x}\widetilde{R}\overline{y}\widetilde{R}z$, и пусть $\mathsf{M}, z \vDash \psi \vee \Diamond\psi$ для какой-то формулы ψ такой, что $\Diamond\psi \in sf(\varphi)$. Нужно показать, что $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$. В силу определения $\widetilde{R}$, $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond\psi$, следовательно $\mathsf{M}, y \vDash \psi \vee \Diamond\psi$, и опять же по определению $\widetilde{R}$ получаем $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond\psi$, что и требовалось.

Таким образом, мы получили модель, в одной из точек которой истинна формула φ в силу (2), и отношение в которой транзитивно. Это даёт финитную аппроксимируемость K4. Заметим еще, что если xRx, то $\overline{x}\overline{R}\overline{x}$, и $\widetilde{x}\overline{R}\widetilde{x}$ в силу (1); это означает, что если R рефлексивно, то и $\widetilde{R}$ рефлексивно. Иными словами, если $\mathsf{F} \vDash \mathrm{S4}$, то $\widetilde{F} \vDash \mathrm{S4}$, и финитная аппроксимируемость S4 тоже доказана.

Для логик S4.2 и S4.3 потребуется еще один шаг.

В силу леммы о порождённой подмодели мы можем считать, что $W = R(x)$: действительно, если φ выполнима в точке x шкалы G, то φ выполнима в любой шкале $\mathsf{G}\restriction V$, где V содержит x и R-замкнуто. В силу транзитивности R, множество $R(x)$ является R-замкнутым, и в силу рефлексивности R оно содержит x.

Пусть $\mathsf{F} \models \mathrm{S4.2}$ и $W = R(x)$. В силу предложения 1.5, F обладает свойством

$$\forall x, y_1, y_2 (xRy_1 \& xRy_2 \ \Rightarrow \ \exists z \ y_1Rz \& y_2Rz);$$

в силу того, что $W = R(x)$, мы получаем более сильное свойство шкалы F:

$$\forall y_1, y_2 \exists z (y_1Rz \ \& \ y_2Rz).$$

Несложно увидеть, что последнее свойство переносится на отношение $\overline{R}$ и на отношение $\widetilde{R}$; из этого следует, что $\widetilde{\mathsf{F}} \models \mathrm{S4.2}$.

Аналогично, если $\mathsf{F} \models \mathrm{S4.3}$ и $W = R(x)$, то F обладает свойством линейности

$$\forall y, z (yRz \vee zRy)$$

и $\widetilde{\mathsf{F}} \models \mathrm{S4.3}$ $\square$

Лекция 14.

Теперь мы вернёмся к описанию логики действительных чисел с естественным порядком $\leq$.

Напомним, что предпорядком называется транзитивное рефлексивное отношение (более точно — множество с таким отношением на нём). Соответственно, нестрогий частичный порядок — это предпорядок, обладающий свойством антисимметричности

$$\forall x, y(xRy \& yRx \Rightarrow x = y).$$

Определение 14.1. Пусть (W, R) — предпорядок. Определим следующее отношение на W:

$$w \sim_R v \iff wRv \text{ и } vRw.$$

Это отношение является отношением эквивалентности: оно симметрично по определению, а транзитивность и рефлексивность наследуются от отношения R. Классы эквивалентности по $\sim_R$ называются *сгустками*, а шкала $sk\mathsf{F} = (W/{\sim_R}, \leq_R)$, где

$$[x] \leq_R [y] \iff xRy,$$

называется *остовом шкалы* F (тут $W/{\sim_R}$ обозначает фактор-множество по $\sim_R$, $[z]$ обозначает класс эквивалентности z). Такое определение отношения $\leq_R$ корректно, так как если $x' \in [x]$ и $y' \in [y]$, то

$$xRy \iff x'Ry'.$$

Легко проверяется, что $\leq_R$ — частичный порядок.

В теореме 10.3 мы доказали, что логика S4.3 финитно аппроксимируема. Для этого мы для каждой выполнимой в S4.3-шкале формулы доказали существование конечной S4-шкалы, в которой

$$\forall y, z(yRz \vee zRy).$$

Последнее, как несложно увидеть, означает, что и остов шкалы обладает свойством линейности.

Следствие 14.2. S4.3 *полна относительно класса конечных предпорядков, остовы которых — линейные порядки.*

Теорема 14.3. $\mathrm{Log}(\mathbb{R}, \leq) = \mathrm{S4.3}$.

Доказательство. Пусть $L = \mathrm{Log}(\mathbb{R}, \leq)$. Включение $\mathrm{S4.3} \subseteq L$ очевидно — в $(\mathbb{R}, \leq)$ общезначимы аксиомы S4.3. Докажем обратное включение. Для этого докажем следующее: для всякого предпорядка F, остов которого — линейный порядок, существует p-морфизм $(\mathbb{R}, \leq) \twoheadrightarrow \mathsf{F}$. В силу леммы о p-морфизме, это будет означать следующее: если $\varphi \in L$, то φ общезначима на всех таких предпорядках, и в силу следствия 14.2, $\varphi \in \mathrm{S4.3}$.

Итак, пусть $\mathsf{F} = (W, R)$ — конечный предпорядок с линейным остовом. Строим $f : \mathbb{R} \to W$.

Сначала рассмотрим случай, когда $|W/\sim_R| = 1$ (это означает, как легко увидеть, что $R = W \times W$).

Пусть $|W| = k$, $W = \{w_0, \dots, w_{k-1}\}$. Положим

$$f(x) := \begin{cases} w_{(x \ mod \ k)} & x \in \mathbb{N} \\ w_0 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

где $(x \ mod \ k)$ — остаток от деления x на k. Сюръективность и монотонность f в данном случае очевидны. Проверим свойство поднятия. Пусть wRu (это верно для всех w, u в рассматриваемой шкале) и $f(x) = w$. Легко увидеть, то существует y такой, что $x \leq y$ и $f(y) = u$: для $u = w_i$ в качестве y возьмём какое-то натуральное число, большее x и сравнимое с i по модулю k.

Теперь рассмотрим случай, когда $|W/\sim_R| = 2$. Это означает, что W разбивается на два сгустка $c = \{w_0, \dots, w_{k-1}\}$, $d = \{u_0, \dots, u_{l-1}\}$. Рассмотрим две монотонно возрастающие последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, стремящиеся к 0 и к $+\infty$, соответственно (например, $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = n$). Определим f следующим образом. Если $x < 0$, и $x = a_n$ для какого-то n, полагаем $f(x) := w_{(n \ mod \ k)}$; если $x < 0$, и $x \neq a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) := a_0$. Аналогично поступаем для $x \geq 0$: если $x = b_n$ для какого-то n, то $f(x) := w_{(n \ mod \ l)}$, и $f(x) := b_0$ в противном случае. Несложно увидеть, что f является p-морфизмом.

Наконец, пусть $|W/\sim_R| \geq 2$:

$$W/\sim_R = \{d_0, \dots, d_{m+1}\}, \ |d_i| = k_i, \ d_i = \{w_0^i, \dots, w_{k_i-1}^i\}.$$

Разобьём $\mathbb{R}$ на множества $V_0, \dots, V_{m+1}$, положив $V_0 := (-\infty, 0)$, $V_i := [i-1, i)$ при $1 \leq i \leq m$, $V_{m+1} := [m+1, +\infty)$. В каждом из множеств V_i определим последовательность $\{a_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$: при $0 \leq i \leq m$, положим $a_n^{(i)} := i - \frac{1}{n}$, и $a_n^{(m+1)} := m + n$ (нам важно, чтобы в каждом V_i для всякого x был элемент i-й последовательности больший x; говорят, что такие последовательности *конфинальны*).

Для $x \in V_i$ положим

$$f(x) := \begin{cases} w_{(n \ mod \ k_i)}) & x = a_n^{(i)} \text{ для какого-то } n \\ w_0 & x \notin \{a_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

То, что f — p-морфизм, проверяется непосредственно. Упражнение. $\square$

Лекция 15.

До этого мы рассматривали случай, когда в языке имелась единственная пара двойственных модальных операторов — $\Diamond$ и $\Box$. Теперь рассмотрим полимодальный случай. Многие определения и утверждения переносятся на полимодальный случай непосредственно.

Определение. n-модальные формулы строятся из пропозициональных переменных с помощью булевых связок и одноместных связок $\Diamond_1, \ldots, \Diamond_n$; $\Box_i$ — сокращение для $\neg\Diamond_i\neg$. Множество всех n-модальных формул обозначаем Fm_n.

Определение. *n-шкалой Крипке* называется кортеж $\mathsf{F} = (W, R_1, \ldots, R_n)$, где W — непустое множество и R_i — бинарные отношения на W. Оценка на шкале определяется так же, как в одномодальном случае. n-модель — это n-шкала с оценкой.

Истинность формул в точках модели определяется так:

$$\mathsf{M}, w \vDash \Diamond_i\varphi \qquad\qquad \leftrightharpoons \qquad\qquad \exists v(wR_iv \ \&\ \mathsf{M}, v \vDash \varphi);$$

определение для остальных связок не меняется. Также не меняется понятие общезначимости в шкале и классе шкал.

Для класса n-шкал $\mathcal{F}$ множество всех общезначимых в $\mathcal{F}$ n-формул обозначается $\textsc{Log}(\mathcal{F})$ и называется *логикой класса $\mathcal{F}$*.

Определение. Множество n-модальных формул Σ называется *нормальной n-модальной логикой*, если Σ содержит все пропозициональные тавтологии и для всех i таких, что $1 \le i \le n$,

- Σ содержит формулы $\neg\Diamond_i\bot$
- Σ содержит формулу $\Diamond_i(p_1 \vee p_2) \to \Diamond_i p_1 \vee \Diamond_i p_2$
- Σ замкнуто относительно Modus Ponens, подстановки и *правил монотонности*:
$$\varphi \to \psi \in \Sigma \ \Rightarrow\ \Diamond_i\varphi \to \Diamond_i\psi \in \Sigma.$$

Наименьшая n-модальная логика обозначается K_n

Теорема (Теорема корректности)**.** *Если L — логика некоторого класса n-шкал, то L — нормальная n-модальная логика.*

Доказательство. Доказательство совершенно аналогично одномодальному случаю. $\Box$

Множество всех n-модальных формул Fm_n является n-модальной логикой. Легко увидеть, что если L — n-модальная логика, то

$$\bot \in L \iff L = Fm \iff \exists\varphi \in Fm_n(\varphi \in L \ \&\ \neg\varphi \in L).$$

Fm_n называется *противоречивой n-модальной логикой.*

Понятия L-непротиворечивого множества и L-максимального множества не меняются.

Определение. *Канонической шкалой* непротиворечивой n-модальной логики L называется шкала $\mathsf{F}^L \leftrightharpoons (W^L, R_1^L, \ldots, R_n^L)$, где W^L — множество всех L-максимальных множеств, а R_i^L определяется следующим образом:

$$\Gamma_1 R_i^L \Gamma_2 \leftrightharpoons \Diamond_i \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1.$$

Каноническая оценка $\theta^L(p)$ определяется так же, как в одномодальном случае:

$$\theta^L(p) \leftrightharpoons \{\Gamma \in W^L \mid p \in \Gamma\}.$$

Модель $\mathsf{M}^L \leftrightharpoons (\mathsf{F}^L, \theta^L)$ называется *канонической моделью* L.

В полной аналогии с одномодальным случаем доказывается теорема о канонической модели.

Следствие. *Если L — непритиворечивая n-модальная логика, то*

$$\textsc{Log}(\mathsf{F}^L) \subseteq L.$$

Следствие. K_n — *логика класса всех n-шкал.*

Определение. *Бокс-атомами* назовём формулы вида ∇p и $\nabla \neg p$, где ∇ — последовательность боксов (возможно, пустая).

n-модальная формула называется *формулой Салквиста*, если она имеет вид

$$\underbrace{\Box_{i_1} \ldots \Box_{i_l}}_{l \geq 0} (\psi \to \chi),$$

где χ строится из переменных с помощью $\vee, \wedge, \Box_i, \Diamond_i$, а формула ψ строится из бокс-атомов с помощью $\wedge$ и $\Diamond$.

Теорема. *Всякая формула Салквиста является канонической и элементарной.*

Пример. Формулы вида $p \to \Box_i \Diamond_j p$ являются формулами Салквиста.

Пусть

$$\mathrm{K}_t := \mathrm{K}_2 + \{p \to \Box_2 \Diamond_1 p,\ p \to \Box_1 \Diamond_2 p\}.$$

Предложение 15.1.

1. $(W, R_1, R_2) \vDash p \to \Box_1 \Diamond_2 p$ *и* $(W, R_1, R_2) \vDash p \to \Box_2 \Diamond_1 p \iff R_1 = R_2^{-1}$;
2. K_t — *логика класса всех шкал вида* (W, R, R^{-1}).

Доказательство. Первый пункт проверяется непосредственно. Второй следует из первого и из теоремы Салквиста. $\Box$

Все логики, которые встретились нам до сих пор, были полны по Крипке. Следующая наша цель — доказать существование неполных по Крипке логик. Рассмотрим бимодальную логику

$$\textsc{Linc} = \mathrm{K}_t + \{\Box_1\Diamond_1 p \to \Diamond_1\Box_1 p,\ \Diamond_2 p \to \Diamond_2(p \wedge \neg\Diamond_2 p)\}.$$

Заметим, что формула $\Diamond_2 p \to \Diamond_2(p \wedge \neg\Diamond_2 p)$ — не что иное, как формула Гёделя-Лёба, лишь записанная в новой модальности.

Теорема 15.2. Linc *не является полной по Крипке.*

Чтобы доказать эту теорему, нам понадобится установить несколько фактов.

Предложение 15.3. *Если в частичном порядке* $(W, <)$ *нет максимальных элементов, то его можно разбить на два конфинальных подмножества, то есть существуют множества* U, V *такие, что* $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = W$, *и*

$$\forall x \in W\ \exists u \in U\ \exists v \in V (x < u\ \&\ x < v).$$

Доказательство. Пусть S — множество всех таких пар (A, B), что

1. $A, B \subseteq W$, $A \cap B = \varnothing$;
2. $\forall x \in A\ \exists y \in B\ x < y$;
3. $\forall x \in B\ \exists y \in A\ x < y$.

S непусто: $(\varnothing, \varnothing) \in S$. На S введём бинарное отношение $\sqsubseteq$:

$$(A, B) \sqsubseteq (A', B') \leftrightharpoons A \subseteq A' \& B \subseteq B'.$$

Очевидно, что $\sqsubseteq$ — частичный порядок. Несложно увидеть, что всякая цепь в этом порядке имеет верхнюю грань, и по лемме Цорна в S есть максимальный элемент (U, V). Дальше несложно показать, что $U \cup V = W$, из чего будет следовать (почти сразу), что U и V — конфинальны. $\Box$

Упражнение. Восстановите детали в этом доказательстве.

Чтобы доказать неполноту Linc, мы докажем два утверждения: эта логика не общезначима ни в какой шкале Крипке, но при этом она непротиворечива; из этого немедленно следует её неполнота по Крипке.

Лемма 15.4. *Не существует* Linc*-шкал.*

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть $\mathsf{F} \vDash \textsc{Linc}$ для какой-то 2-шкалы $\mathsf{F} = (W, R, S)$. В силу предложения 15.1, $S = R^{-1}$. Кроме того, $(W, S) \vDash \mathrm{AGL}$, следовательно S — строгий частичный порядок (предложение 2.1). В частности, S иррефлексивно. Следовательно, и R обладает этими свойствами, поскольку $R = S^{-1}$.

Теперь рассмотрим два случая.

Сначала предположим, что в строгом частичном порядке (W, R) есть максимальный элемент x. Тогда не существует y таких, что xRy. Пусть M — какая-то модель над (W, R). Имеем: $\mathsf{M}, x \vDash \Box\Diamond p$, и $\mathsf{M}, x \vDash \neg\Diamond\Box p$ (на самом деле, в x истинны все формулы, начинающиеся с $\Box$ и ложны все, начинающиеся с $\Diamond$). Поэтому $(W, R) \nvDash \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$, из чего немедленно следует, что $\mathsf{F} \nvDash \Box_1\Diamond_1 p \to \Diamond_1\Box_1 p$, то есть $\mathsf{F} \nvDash$ Linc.

Теперь предположим, что максимальных элементов в (W, R) нет. Пусть U и V — множества, описанные в предложении 15.3. Рассмотрим оценку θ, в которой $\theta(p) = U$. В модели $\mathsf{M} = (W, R, \theta)$ имеем $\mathsf{M}, x \vDash p$ для всех x из U и $\mathsf{M}, x \vDash \neg p$ для всех x из V (напомним, что $V = W - U$). Выберем какую-то точку $x \in W$. Пусть y — произвольная точка такая, что xRy. В силу конфинальности U и V, yRu и yRv для каких-то $u \in U$, $v \in V$. Это означает, что $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond p$, $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond\neg p$. Следовательно, $\mathsf{M}, x \vDash \Box\Diamond p$ и $\mathsf{M}, x \vDash \Box\Diamond\neg p$. Последнее означает, что $\mathsf{M}, x \vDash \neg\Diamond\Box p$. Таким образом, $\mathsf{M}, x \nvDash \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$. Следовательно, $\mathsf{F} \nvDash$ Linc. $\Box$

Лекция 16.

Прежде чем продолжить доказательство теоремы 15.2, скажем пару слов о формуле

$$\mathrm{AM} \ \leftrightharpoons\ \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p;$$

она называется *формулой Макксинси.* Известно, что K+AM полна по Крипке, однако не является канонической, а формула AM не является элементарной (эти факты мы доказывать не будем). Оказывается, что если добавить эту формулу к K4, то получившаяся логика уже обладает всеми этими свойствами. Пусть

$$\mathrm{K4.1} \ \leftrightharpoons\ \mathrm{K4} + \mathrm{AM}.$$

Упражнение.

1. Для любых формул φ и ψ, $\Diamond\top \in \mathrm{K}{+}\Box\varphi \to \Diamond\psi$; в частности, $\Diamond\top \in \mathrm{K}{+}\mathrm{AM}$.

2. $(W, R) \vDash \mathrm{K4.1} \iff R$ транзитивно и

$$\forall x \exists y (xRy \ \&\ \forall z (yRz \ \Rightarrow\ y = z)).$$

(Воспользуйтесь предложением 15.3.)

3 (более сложное упражнение). K4.1 каноническая.

Упражнение.

1. $\mathrm{GL} + \Diamond\top$ — противоречивая логика.

2. $\mathrm{K}{+}\{\mathrm{AGL}, \mathrm{AM}\}$ — противоречивая логика.

Продолжим доказательство теоремы 15.2.

Определение 16.1. Пусть φ — n-модальная формула, $p_1, \ldots, p_k$ — входящие в неё переменные. *Схемой аксиом* формулы φ называется множество формул

$$S(\varphi) = \{[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]/[p_1, \ldots, p_k]\varphi \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in FM_n\},$$

где $[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]/[p_1, \ldots, p_k]\varphi$ обозначает результат одновременной замены в φ переменных p_i на формулы α_i.

Предложение 16.2. *Пусть $\Phi \subseteq Fm_n$, и пусть Σ — наименьшее множество n-модальных формул, содержащее K_n, $S(\varphi)$ для каждой формулы $\varphi \in \Phi$, и замкнутое относительно Modus Ponens и правил монотонности. Тогда $\Sigma = \mathrm{K}_n + \Phi$.*

Доказательство. С одной стороны, $\Sigma \subseteq \mathrm{K}_n + \Phi$, поскольку логики замкнуты относительно Modus Ponens, правил монотонности, и правила подстановки; последнее даёт нам то, что $S(\varphi) \subseteq \mathrm{K}_n + \Phi$ для всех $\varphi \in \Phi$.

С другой стороны, индукцией по длине вывода несложно показать, что если в логике существует вывод формулы φ, то существует и такой вывод, в котором правило подстановки не применяется после того, как впервые было применено правило MP или какое-то из правил монотонности. Поэтому если $\varphi \in \mathrm{K}_n + \Phi$, то $\varphi \in \Sigma$. $\Box$

Упражнение. Восстановите детали этого доказательства.

Следствие 16.3. *Пусть* M *—* n*-модель,* Φ *— множество* n*-модальных формул, и* $\mathsf{M} \vDash S(\varphi)$ *для всех* $\varphi \in \Phi$*. Тогда* $\mathsf{M} \vDash \mathrm{K}_n + \Phi$*.*

Доказательство. Нужно заметить, что множество формул, истинных во всех точках модели, замкнуто относительно Modus Ponens и правил монотонности, и воспользоваться предыдущим предложением. □

Предложение 16.4. *Логика* Linc *непротиворечива.*

Доказательство. Построим модель M такую, что $\mathsf{M} \vDash \text{Linc}$. Из последнего немедленно будет следовать непротиворечивость Linc.

Пусть $\mathsf{F} = (\mathbb{N}, <, >)$, и пусть $\theta(p) = \varnothing$ для всех $p \in PV$. Положим $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$. Поскольку $\mathsf{F} \vDash p \to \Box_2\Diamond_1 p$ и $\mathsf{F} \vDash p \to \Box_1\Diamond_2 p$ (предложение 15.1), то $\mathsf{M} \vDash \varphi \to \Box_2\Diamond_1\varphi$ и $\mathsf{M} \vDash \varphi \to \Box_1\Diamond_2\varphi$ для любой формулы $\varphi \in Fm_2$. Кроме того, $(\mathbb{N}, >)$ является GL-шкалой, поэтому для любой формулы $\varphi \in Fm_2$ имеем $\mathsf{M} \vDash \Diamond_2\varphi \to \Diamond_2(\varphi \wedge \neg\Diamond_2\varphi)$.

Покажем, что $\mathsf{M} \vDash S(\Box_1\Diamond_1 p \to \Diamond_1\Box_1 p)$, то есть что $\mathsf{M} \vDash \Box_1\Diamond_1\varphi \to \Diamond_1\Box_1\varphi$ для любой формулы $\varphi \in Fm_2$. Индукцией по числу связок φ несложно показать, что $\|\varphi\|_{\mathsf{M}}$ конечно или коконечно (множество $V \subseteq W$ называется *коконечным*, если конечным является его дополнение $W - V$). Упражнение.

Пусть $\mathsf{M}, x \vDash \Box_1\Diamond_1\varphi$. Это означает, что $\|\varphi\|_{\mathsf{M}}$ бесконечно (иначе $\mathsf{M}, y \vDash \neg\Diamond_1\varphi$ для достаточно больших y), следовательно $W - \|\varphi\|_{\mathsf{M}}$ конечно. Это означает, что существует z такое, что для любого $z' > z$ $\mathsf{M}, z' \vDash \varphi$, то есть $\mathsf{M}, z \vDash \Box_1\varphi$; не теряя общности можно считать, что $z > x$; из этого следует, что $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond_1\Box_1\varphi$.

В силу следствия 16.3, $\mathsf{M} \vDash \text{Linc}$. □

Таким образом, Linc — непротиворечивая логика, у которой нет шкал; из этого следует, что Linc не является полной по Крипке.

Приведём ещё один пример логики с “плохим” свойством — полную по Крипке логику, которая не является финитно аппроксимируемой.

Предложение 16.5. *Логика* $\text{Log}(\mathbb{N}, >, \mathbb{N}^2)$ *не является финитно аппроксимируемой; более того, у этой логики вообще нет конечных шкал.*

Доказательство. Пусть $\mathsf{F} = (\mathbb{N}, >, \mathbb{N}^2)$, $L = \text{Log}(\mathsf{F})$.

Рассуждаем от противного. Предположим, что $(W, R, S) \vDash L$ и W конечно. Поскольку $\text{Log}(\mathbb{N}, >) \vDash \text{AGL}$, то R — строгий частичный порядок. Пусть x — какой-то минимальный элемент в (W, R) (такой существует, потому что W конечно). Рассмотрим оценку θ такую, что $\theta(p) = \{x\}$, и положим $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$. Заметим, что $\mathsf{F} \vDash p \to \Diamond_2 p$, поэтому $p \to \Diamond_2 p \in L$. Имеем: $\mathsf{M}, x \vDash p$, следовательно $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond_2 p$. Теперь заметим, что формула $\Diamond_2 p \to \Diamond_2\Diamond_1 p$ общезначима в шкале F (это проверяется непосредственно), следовательно эта формула общезначима в шкале (W, R, S), и значит $\mathsf{M}, x \vDash \Diamond_2\Diamond_1 p$. Это означает, что для какой-то точки $y \in W$ имеем $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond_1 p$. Следовательно, yRz и $\mathsf{M}, z \vDash p$ для какого-то z. В силу определения θ, $z = x$. Тогда yRx, что противоречит минимальности x. □

Лекция 17.

Определение 17.1. $Id(W) \leftrightharpoons \{(x, x) \mid x \in W\}$ называется *диагональю множества* W.

Рассмотрим шкалу $\mathsf{F} = (W, R)$. Положим

$$R^0 = Id(W),$$
$$R^{n+1} = R \circ R^n.$$

Тут $\circ$ — композиция отношений:

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y(xRy \ \& \ ySz)\}.$$

Отношение

$$R^* := \bigcup_{n \geq 0} R^n$$

называется *транзитивным рефлексивным замыканием отношения* R.

Для $x \in W$ положим $\mathsf{F}\langle x \rangle := \mathsf{F} \upharpoonright R^*(x)$; эта шкала называется *конусом в* F *с вершиной* x. x называется *корнем* F, если $R^*(x) = W$.

Эти определения переносятся на случай n-шкалы $(W, R_1, \ldots, R_n)$ буквально, если положить $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$.

Для класса шкал $\mathcal{F}$ положим

$$cones(\mathcal{F}) := \{\mathsf{F}\langle x \rangle \mid \mathsf{F} \in \mathcal{F}, \ x \in dom(\mathsf{F})\},$$

где $dom(\mathsf{F})$ обозначает носитель шкалы F.

Предложение 17.2. *Пусть $\mathcal{F}$ — класс шкал. Тогда*

$$\textsc{Log}(\mathcal{F}) = \textsc{Log}(cones(\mathcal{F})).$$

Доказательство. Заметим, что для всякой шкалы F и точки $x \in dom(\mathsf{F})$ множество $R^*(x)$ является R-замкнутым, поэтому $\mathsf{F}\langle x \rangle$ является порождённой подшкалой.

Если $\mathcal{F} \models \varphi$, то $\forall \mathsf{F} \in \mathcal{F}\ \mathsf{F} \models \varphi$; в силу леммы 7.6, п.2, $\forall x \in dom(\mathsf{F})\ \mathsf{F}\langle x \rangle \models \varphi$; таким образом, $cones(\mathcal{F}) \models \varphi$.

Если же $\mathcal{F} \not\models \varphi$, то в какой-то точке x какой-то модели M над какой-то шкалой $\mathsf{F} \in \mathcal{F}$ имеем $\mathsf{M}, x \models \neg\varphi$. Рассмотрим сужение этой модели на множество $R^*(x)$: модель $\mathsf{M}_1 = \mathsf{M} \upharpoonright R^*(x)$ является порождённой подмоделью, и в силу леммы 7.6, п.1, $\mathsf{M}_1, x \models \neg\varphi$. Шкалой модели M_1 является шкала $\mathsf{F}\langle x \rangle$, следовательно $cones(\mathcal{F}) \not\models \varphi$. □

Упражнение 17.1. Докажите, что:

1. $\textsc{Log}(\mathbb{Z}, <) = \textsc{Log}(\mathbb{N}, <)$;

2. $\textsc{Log}(\mathbb{Z}, next) = \textsc{Log}(\mathbb{N}, next)$, где $n \ next \ m \ \leftrightharpoons \ m = n + 1$.

Определение 17.3. Шкала (W, R) называется *транзитивным деревом*, если (W, R) — частичный (строгий или нестрогий) порядок с корнем, и для любого $x \in W$ множество $R^{-1}(x)$ — конечная цепь.

Теорема 17.4. *Логика* GL *финитно аппроксимируема. Более того,* GL *полна относительно класса всех конечных транзитивных иррефлексивных деревьев.*

В теореме 8.8 мы доказали, что GL полна по Крипке. Более того, из доказательства этой теоремы следует, что GL полна относительно строгих порядков *конечной высоты*: скажем, что частичный порядок имеет *высоту* n, если в нём существует цепь мощности n и нет цепей большей мощности. В доказательстве этой теоремы мы показали, что всякая GL-непротиворечивая формула выполнима в строгом порядке, высота которого не превосходит числа связок в формуле.

Лемма 17.5. *Если* F *— строгий порядок конечной высоты с корнем, то существует транзитивное иррефлексивное дерево конечной высоты* T *такое, что* $\mathsf{T} \twoheadrightarrow \mathsf{F}$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{F} = (W, R)$, r — корень F. На W введём отношение $\overrightarrow{R}$:

$$x\overrightarrow{R}y \;\leftrightharpoons\; xRy \;\&\; \neg\exists z(xRzRy).$$

Положим

$$V := \{(r, x_1, \ldots, r_n) \mid n \geq 0, r\overrightarrow{R}x_1\overrightarrow{R}\ldots\overrightarrow{R}x_n\}$$

(как обычно, запись $(r, x_1, \ldots, x_n)$ при $n = 0$ означает (r)); таким образом, V — совокупность всех последовательностей идущих “подряд” из корня точек в шкале F. На множестве V введём отношение S: $\alpha S \beta \;\leftrightharpoons\; \alpha \neq \beta$ и α — начало β: $\alpha = (r, x_1, \ldots, x_n)$, $\beta = (r, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots)$. Несложно увидеть, что (V, S) — строгий частичный порядок, более того, (V, S) — дерево конечной высоты.[1]

Определим $f : V \to W$. Для $\alpha = (r, x_1, \ldots, x_n)$, положим $f(\alpha) := x_n$. f является p-морфизмом (V, S) на F: монотонность легко следует из транзитивности отношения R; чтобы доказать сюръективность и свойство поднятия, нужно воспользоваться следующим наблюдением: если xRy, то $x(\overrightarrow{R})^n y$ для некоторого $n \geq 1$ (это верно, так как F — шкала конечной высоты). $\square$

Доказательство теоремы 17.4. Пусть φ — GL-непротиворечивая формула. Тогда φ выполнима в некотором GL-конусе конечной высоты (теорема о полноте GL и предложение 17.2). В силу леммы 17.5, φ выполнима в некотором транзитивном иррефлексивном дереве конечной высоты T.

Пусть $\mathsf{T} = (W, R)$, $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$, $\mathsf{M}, x \vDash \varphi$. Рассмотрим множество

$$\Psi = \{\Diamond\psi \mid \Diamond\psi \text{ — подформула } \varphi\}.$$

---

[1] Шкала (V, S) называется *деревом путей шкалы* F; иногда используется термин *развёртка* (*unravelling*). В некоторых случаях рассматривают все пути, а не только последовательности точек, идущих подряд.

Пусть $\Psi = \{\Diamond\psi_1, \ldots, \Diamond\psi_l\}$. По индукции построим конечную селективную фильтрацию модели M. Положим $V_0 := \{x\}$. Множество V_{i+1} определим следующим образом. Пусть $y \in V_i$. Для каждой формулы $\Diamond\psi \in \Psi$ такой, что $\mathsf{M}, y \vDash \Diamond\psi$ выберем некоторую точку z такую, что $\mathsf{M}, z \vDash \psi$ и yRz; множество выбранных так точек обозначим V_y; заметим, что $|V_y| \leq l$. Положим

$$V_{i+1} := \bigcup_{y \in V_i} V_y.$$

Для $y \in W$ пусть $h(y)$ обозначает наибольшую из длин цепей, в которых y — наибольший элемент. Очевидно, что $h(y)$ не превышает высоту T.

Индукцией по i легко проверить, что построенные множества V_i — конечны, и

$$z \in V_i \;\Rightarrow\; h(z) \geq i.$$

Из последнего следует, что для некоторого n $V_{n+1} = \varnothing$ (напомним, что T имеет конечную высоту). Положим

$$V = \bigcup_{i \leq n} V_i.$$

Тогда $\mathsf{T}{\restriction}V$ — конечное иррефлексивное транзитивное дерево; кроме того, в силу построения, $\mathsf{M}{\restriction}V$ — селективная фильтрация M по $sf(\varphi)$. $\square$

Лекция 18.

В этой лекции мы рассматриваем семантику Крипке для *интуиционистской логики.*

Определение 18.1. Формулы интуиционистской логики строятся из пропозициональных переменных с помощью бинарных связок $\to$, $\vee$, $\wedge$ и константы $\bot$. $\neg\varphi$ является сокращением для $\varphi \to \bot$.

Определение 18.2. *Интуиционистская шкала* — нестрогий частичный порядок (W, R). Интуиционистская модель $\mathsf{M} = (\mathsf{F}, \theta)$ — шкала с оценкой $\theta : PV \to \mathcal{P}(W)$ такой, что для любой переменной p множество $\theta(p)$ является R-замкнутым:

$$x \in \theta(p) \ \&\ xRy \Rightarrow y \in \theta(p).$$

Истинность интуиционистской формулы в точке модели будем обозначать $\mathsf{M}, w \Vdash \varphi$ и определим так:

$\mathsf{M}, w \Vdash p$	$\leftrightharpoons$	$w \in \theta(p)$;
$\mathsf{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi$	$\leftrightharpoons$	$\mathsf{M}, w \Vdash \varphi$ или $\mathsf{M}, w \Vdash \psi$;
$\mathsf{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi$	$\leftrightharpoons$	$\mathsf{M}, w \Vdash \varphi$ и $\mathsf{M}, w \Vdash \psi$;
$\mathsf{M}, w \Vdash \varphi \to \psi$	$\leftrightharpoons$	в каждой точке v такой, что wRv и $\mathsf{M}, v \Vdash \varphi$, имеем $\mathsf{M}, v \Vdash \psi$.

Формула *общезначима в шкале*, если она истинна во всех точках всех интуиционистских моделей над этой шкалой; обозначение: $\mathsf{F} \Vdash \varphi$. Общезначимость в классе порядков $\mathcal{F}$ определяется так же, как и в модальном случае:

$$\mathcal{F} \Vdash \varphi \quad \leftrightharpoons \quad \forall \mathsf{F} \in \mathcal{F}\ \mathsf{F} \Vdash \varphi;$$

Положим еще

$$\mathrm{IL{\small OG}}(\mathcal{F}) \quad \leftrightharpoons \quad \{\varphi \mid \mathcal{F} \Vdash \varphi\}.$$

Пусть $\mathcal{PO}$ обозначает класс всех нестрогих частичных порядков.

Предложение 18.3. *Следующие (хорошо знакомые) формулы общезначимы в $\mathcal{PO}$:*

1. $p \to (q \to p)$;
2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$;
3. $p \wedge q \to p$;
4. $p \wedge q \to q$;
5. $(p \to (q \to p \wedge q))$;
6. $p \to q \vee p$;
7. $q \to q \vee p$;

8. $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \lor q \to r))$;

9. $\bot \to p$.

Доказательство. Упражнение. $\square$

Предложение 18.4. *$\mathcal{PO} \not\Vdash p \lor \neg p$.*

Доказательство. Контрмодель строится на порядке $(\{0,1\}, \leq)$: нужно положить $\theta(p) = \{1\}$. $\square$

Предложение 18.5. *Пусть F — частичный порядок, φ, ψ — формулы.*

1. *Если $\mathsf{F} \Vdash \varphi$ и $\mathsf{F} \Vdash \psi$, то $\mathsf{F} \Vdash \psi$;*
2. *Если $\mathsf{F} \Vdash \varphi$, то $\mathsf{F} \Vdash [\alpha/p]\varphi$ для любой формулы α и переменной p.*

Доказательство. Первый пункт очевидно следует из определений. Второй доказывается аналогично модальному случаю, нужно лишь дополнительно заметить, что множество точек в модели, где истинна данная формула, является R-замкнутым. $\square$

Определение 18.6. Наименьшее множество формул, содержащее формулы (1)–(9) из предложения 18.3 и замкнутое относительно Modus Ponens и подстановки, называется *пропозициональной интуиционистской логикой*; обозначение: $\textsc{Int}$.

Как хорошо известно, если добавить в качестве аксиомы еще закон исключенного третьего $p \lor \neg p$, то получится множество всех классических тавтологий CL.

Следствие 18.7 (Теорема корректности для $\textsc{Int}$.)**.** *$\mathcal{PO} \Vdash \textsc{Int}$.*

Доказательство. Из предложений 18.3 и 18.5. $\square$

Следствие 18.8. *$(p \lor \neg p) \notin \textsc{Int}$; $\textsc{Int} \subsetneq \mathrm{CL}$.*

Доказательство. Из предложения 18.4. $\square$

Предложение 18.9. *Пусть F — частичный порядок. Тогда:*

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{F} \Vdash \neg p \lor \neg\neg p & \iff & \forall x, y_1, y_2 (xRy_1 \& xRy_2 \Rightarrow \exists z\ y_1Rz \& y_2Rz); \\
\mathsf{F} \Vdash (p \to q) \lor (q \to p) & \iff & \forall x, y, z (xRy \& xRz \Rightarrow yRz \lor zRy); \\
\mathsf{F} \Vdash p \lor \neg p & \iff & \forall x, y (xRy \Rightarrow x = y).
\end{array}$$

Доказательство. Упражнение. $\square$

Теорема 18.10 (О полноте $\textsc{Int}$)**.** *$\textsc{Int} = \mathrm{ILog}(\mathcal{PO})$.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [Н. К. Верещагин, А. Шень. Языки и исчисления], саму книгу можно найти тут; любопытно отметить сходства и различия между этим доказательством и доказательством теоремы о канонической модели.

Определим перевод интуиционистских формул в модальные:

$$
\begin{array}{lll}
T(p) & := & \Box p \\
T(\bot) & := & \bot \\
T(\varphi \vee \psi) & := & T(\varphi) \vee T(\psi) \\
T(\varphi \wedge \psi) & := & T(\varphi) \wedge T(\psi) \\
T(\varphi \to \psi) & := & \Box(T(\varphi) \to T(\psi));
\end{array}
$$

T называется *переводом Гёделя-Тарского.*

Теорема 18.11. *Для любой интуиционистской формулы* φ

$$\varphi \in Int \iff T(\varphi) \in \mathrm{S4}.$$

Доказательство. Доказательство основывается на следующем утверждении: для всякого предпорядка F

$$sk\mathsf{F} \Vdash \varphi \iff \mathsf{F} \vDash T(\varphi) \tag{1}$$

(напомним, что $sk\mathsf{F}$ обозначает остов шкалы F); упражнение.

Если $\varphi \in \textsc{Int}$, то $\mathcal{PO} \Vdash \varphi$ в силу теоремы корректности для $\textsc{Int}$; в силу утверждения выше, $T(\varphi)$ общезначима в классе всех предпорядков; последнее означает, что $T(\varphi) \in \mathrm{S4}$ в силу теоремы о полноте для S4.

Если же $\varphi \notin \textsc{Int}$, то $\mathcal{PO} \nVdash \varphi$ в силу теоремы о полноте для $\textsc{Int}$. Тогда несложно увидеть, что $\mathcal{PO} \nvDash T(\varphi)$ (заметим тут, что частичный порядок изоморфен своему остову). Поскольку $\mathcal{PO} \vDash \mathrm{S4}$, то $T(\varphi) \notin \mathrm{S4}$. $\Box$

Для класса предпорядков $\mathcal{F}$ положим $sk\mathcal{F} := \{sk\mathsf{F} \mid \mathsf{F} \in \mathcal{F}\}$.

Следствие 18.12. *Пусть* $\mathcal{F}$ *— класс предпорядков такой, что* $\mathrm{S4} = \textsc{Log}(\mathcal{F})$*. Тогда* $\textsc{Int} = \mathrm{I}\textsc{Log}(sk\mathcal{F})$*.*

Доказательство. Если $\varphi \in \textsc{Int}$, то $sk\mathcal{F} \Vdash \varphi$ в силу теоремы корректности.

Если же $\varphi \notin \textsc{Int}$, то $T(\varphi) \notin \mathrm{S4}$ в силу доказанной выше теоремы, следовательно $\mathsf{F} \nvDash T(\varphi)$ для какого-то $\mathsf{F} \in \mathcal{F}$; в силу (1), $sk\mathsf{F} \nVdash \varphi$, то есть $sk\mathcal{F} \nVdash \varphi$. $\Box$

Теорема 18.13 (Дизъюнктивное свойство $\textsc{Int}$)**.**

$$\psi \vee \phi \in \textsc{Int} \iff \varphi \in \textsc{Int} \text{ или } \psi \in \textsc{Int}.$$

Доказательство. Достаточность очевидна.

Предположим, что $\varphi \notin \textsc{Int}$ и $\psi \notin \textsc{Int}$. Тогда найдутся две интуиционистские модели $\mathsf{M}_1 = (W_1, R_1, \theta_1)$ и $\mathsf{M}_2 = (W_2, R_2, \theta_2)$ и точки x_1 и x_2 такие, что $\mathsf{M}_1, x_1 \nVdash \varphi$ и $\mathsf{M}_2, x_2 \nVdash \psi$. Без потери общности можно считать, что эти модели не имеют общих точек.

Рассмотрим такую модель $\mathsf{M} = (W, R, \theta)$: “поместим” модели M_1 и M_2 над новой точкой r. Формально: носитель M состоит из объединения носителей этих моделей и еще одной точки r,

$$xRy \;\leftrightharpoons\; xR_1y \text{ или } xR_2y \text{ или } x = r,$$

$\theta(p) = \theta_1(p) \cup \theta_2(p)$ для каждой переменной p. Заметим, что M — интуиционистская модель (R является частичным порядком, θ — интуиционистской оценкой).

Используя те же рассуждения, что и в простом доказательстве леммы о порождённой подмодели для модального случая, получим: $\mathsf{M}, x_1 \not\Vdash \varphi$, $\mathsf{M}, x_2 \not\Vdash \psi$.

В силу определения истинности в интуиционистской модели, множество точек, в которых истинна данная формула, является R-замкнутым. Поскольку rRx_1 и rRx_2, получаем $\mathsf{M}, r \not\Vdash \varphi \vee \psi$, что и требовалось. $\square$

Теорема 18.14 (Теорема Гливенко)**.**

$$\varphi \in \mathrm{CL} \iff \neg\neg\varphi \in \textsc{Int}.$$

Доказательство. Если $\neg\neg\varphi \in \textsc{Int}$, то $\neg\neg\varphi \in \mathrm{CL}$ (любой вывод в $\textsc{Int}$ является выводом в CL), и следовательно $\varphi \in \mathrm{CL}$, поскольку в классической логике можно снять двойное отрицание.

Логика S4 финитно аппроксимируема, поэтому в силу следствия 18.12 $\textsc{Int}$ полна относительно конечных порядков. Покажем, что если $\varphi \in \mathrm{CL}$, то $\neg\neg\varphi$ общезначима в этом классе. Пусть M — какая-то конечная интуиционистская модель, x — точка этой модели. Проверим, что $\mathsf{M}, x \Vdash \neg\neg\varphi$. Пусть y — какая-то точка, достижимая из x; в силу того, что M — конечна, найдется максимальная в M точка z, достижимая из y. Легко увидеть, что любая тавтология истинна в любой максимальной точке любой интуиционистской модели, в частности $\mathsf{M}, z \Vdash \varphi$. Тогда $\mathsf{M}, y \not\Vdash \neg\varphi$, следовательно $\mathsf{M}, x \Vdash \neg\neg\varphi$. $\square$

Упражнение. Докажите, что для любой модальной формулы

$$\varphi \in \mathrm{S5} \iff \Diamond\Box\varphi \in \mathrm{S4}.$$

Обозначения некоторых формул и логик

Формулы

$\mathrm{A{\scriptsize TR}}$	$\leftrightharpoons$	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$;
$\mathrm{A{\scriptsize REF}}$	$\leftrightharpoons$	$p \to \Diamond p$;
$\mathrm{A{\scriptsize SYM}}$	$\leftrightharpoons$	$p \to \Box\Diamond p$;
ACR	$\leftrightharpoons$	$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$;
$\mathrm{A{\scriptsize LIN}}$	$\leftrightharpoons$	$\Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(q \wedge \Diamond p)$;
AGL	$\leftrightharpoons$	$\Diamond p \to \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$;
AM	$\leftrightharpoons$	$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$.

Логики

K	$\leftrightharpoons$	наименьшая логика;
K4	$\leftrightharpoons$	K+$\mathrm{A{\scriptsize TR}}$;
S4	$\leftrightharpoons$	K4 + $\mathrm{A{\scriptsize REF}}$;
S5	$\leftrightharpoons$	S4 + $\mathrm{A{\scriptsize SYM}}$;
S4.2	$\leftrightharpoons$	S4 + ACR;
S4.3	$\leftrightharpoons$	S4 + $\mathrm{A{\scriptsize LIN}}$;
GL	$\leftrightharpoons$	K + AGL;
K4.1	$\leftrightharpoons$	K4 + AM.