Задачи к экзамену «Логические проблемы в ДЛ» (весна 2010)

1. ($\mathcal{ALC}$) Сведите проблему выполнимости концептов относительно терминологий к проблеме выполнимости терминологий.

2. ($\mathcal{ALC}$) Сведите проблему выполнимости ABox вида $\mathcal{A} = \{a{:}\,C, aRb, b{:}\,D\}$ к выполнимости концептов.

3. ($\mathcal{ALCIF}$) Существует ли конечная модель концепта A относительно следующей терминологии: $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists R.\neg A,\ \top \sqsubseteq (\leqslant 1\, R^-)\}$? Ответ обосновать.

4. ($\mathcal{ALC}$) Имеет ли концепт A относительно терминологии $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists R.\neg A\}$ конечную *древовидную* модель (то есть в которой в каждую точку входит не более одного ребра)? Ответ обосновать.

5. ($\mathcal{ALCIO}$) Выразите ABox $\mathcal{A}$ в виде эквивалентного ему факта $a{:}\,E$, где E есть $\mathcal{ALCIO}$-концепт: $\mathcal{A} = \big\{aRb,\ aRc,\ dRa,\ dRb,\ dRc;\quad a{:}\,A,\ b{:}\,B,\ c{:}\,C,\ d{:}\,D\big\}$.

6. ($\mathcal{DLR}$) Докажите, что в любой интерпретации верны аксиомы:
   а) $R \sqsubseteq \top_n$ для любого (составного) n-местного отношения R, где $n \geqslant 2$;
   б) $\top \sqsubseteq \forall[i]\top_n$ для любых $1 \leqslant i \leqslant n \leqslant N$, где $\forall[i]R := \neg\exists[i]\neg R$;
   в) $\top_n \equiv (i/n{:}\,\top)$ для любых $1 \leqslant i \leqslant n$.

7. ($\mathcal{DLR}$) Докажите, что в логике $\mathcal{DLR}$ (несмотря на то, что $\neg R$ является не отрицанием, а дополнением до $\top_n$) выполняются законы де Моргана для отношений: $\neg(R \sqcap S) \equiv \neg R \sqcup \neg S$ и двойственный к нему. Чему эквивалентно $\neg\top_n$? Верно ли, что $\neg\top_n \equiv \bot$ при любом n? Чему эквивалентно $\neg\neg\top_n$?

8. ($\mathcal{DLR}$) Докажите, что всякая терминология логики $\mathcal{DLR}$ эквивалентна набору аксиом вида $\top_n \sqsubseteq C_n$ (по одной для каждого $n \geqslant 1$), где C_n есть концепт при $n = 1$ и n-местное отношение при $n \geqslant 2$.

9. ($\mathcal{DLR}$) Верны ли эквивалентности: $C \overset{?}{\equiv} \exists[i](i/n{:}\,C)$, $R \overset{?}{\equiv} (i/n{:}\,\exists[i]R)$. Какие включения верны? Верна ли последняя эквивалентность, если вместо R взять $\top_n$?

10. ($\mathcal{ALCI}f$) Докажите, что неразрешимая логика $\mathcal{ALCI}f$ станет разрешимой, если конструктор $(u = v)$ позволить использовать лишь для атомарных атрибутов u, v.

    Указание: выразите концепт $(f = g)$, где f, g — атомарные атрибуты, в виде концепта логики $\mathcal{ALCIF}$ с дополнительными аксиомами включения концептов (вида $C \sqsubseteq D$) и ролей (вида $R \sqsubseteq S$). Тем самым логика $\mathcal{ALCI}f$ окажется сведена к логике $\mathcal{ALCHIF}$+TBox, разрешимость которой считать известной.

11. ($\mathcal{ALCP}(\mathcal{D})$) Выразить концепты: «мужчина, возраст которого вместе с возрастом его жены в сумме дает возраст его тестя»; «мужчина, возраст которого равен сумме возрастов двух его сыновей».

В следующих задачах *суммой* двух моделей $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ (имеющих непересекающиеся области $\Delta^{\mathcal{I}}$ и $\Delta^{\mathcal{J}}$) называется модель $\mathcal{K} = (\Delta^{\mathcal{K}}, \cdot^{\mathcal{K}})$, где $\Delta^{\mathcal{K}} = \Delta^{\mathcal{I}} \uplus \Delta^{\mathcal{J}}$, а для каждого атомарного концепта или роли X положено $X^{\mathcal{K}} := X^{\mathcal{I}} \cup X^{\mathcal{J}}$. Данное определение применимо к логикам $\mathcal{ALC}$, $\mathcal{DLR}$ и многим другим.

12. ($\mathcal{ALC}$) Верно ли, что если $\mathcal{K}$ есть сумма моделей $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$, то $(\neg C)^{\mathcal{K}} = (\neg C)^{\mathcal{I}} \cup (\neg C)^{\mathcal{J}}$? Верно ли аналогичное утверждение для $\exists R.C$, $\forall R.C$?

13. ($\mathcal{ALCIQ}$) Верно ли аналогичное утверждение для выражений $\exists R^-.C$, $\forall R^-.C$, $\geqslant n\, R.C$, $\leqslant n\, R.C$?

14. ($\mathcal{DLR}$) Верно ли аналогичное утверждение для конструкторов логики $\mathcal{DLR}$? Например, для $\neg R$?