Глава 13

Свойство аддитивности логик

При доказательстве некоторых теорем о ДЛ иногда требуется из двух или нескольких моделей, имеющих непересекающиеся области, составить одну модель, взяв их объединение. Конечно, такую конструкцию можно рассматривать не для всех логик. Например, для логик с номиналами это невозможно, что, впрочем, неудивительно: номинал интерпретируется одноэлементным множеством; при объединении же моделей оно перестанет быть одноэлементным. Поэтому понятие объединения моделей для логик с номиналами не определяется вовсе.

Основное вопрос, который изучается в связи с этой конструкцией, заключается в следующем: верно ли, что объединение нескольких моделей какой-либо терминологии снова будет моделью этой терминологии? Оказывается, для большинства (но всё же не для всех) логик это верно. Перейдем к формальным определениям.

Определение 13.1. Пусть $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ и $\mathcal{J} = (\Delta^{\mathcal{J}}, \cdot^{\mathcal{J}})$ — интерпретации какого-либо языка ДЛ (без номиналов), области которых не пересекаются: $\Delta^{\mathcal{I}} \cap \Delta^{\mathcal{J}} = \varnothing$. Их *суммой* $\mathcal{K} = \mathcal{I} \uplus \mathcal{J}$ назовем интерпретацию $\mathcal{K} = (\Delta^{\mathcal{K}}, \cdot^{\mathcal{K}})$ с областью $\Delta^{\mathcal{K}} = \Delta^{\mathcal{I}} \uplus \mathcal{J}$, интерпретирующую всякий атомарный концепт или роль X как $X^{\mathcal{K}} := X^{\mathcal{I}} \uplus X^{\mathcal{J}}$. Аналогично определяется сумма произвольного семейства интерпретаций $\{\mathcal{I}_s\}_{s \in S}$.

Синтаксис всякой ДЛ задается набором *конструкторов* для построения концептов и ролей, а также видов терминологических *аксиом*, допустимых в данной ДЛ. Мы не даем точного определения ДЛ, конструктора и аксиомы; в каждом конкретном случае будет ясно, что это такое.

Определение 13.2. Конструктор E называется *аддитивным*, если его интерпретация в сумме моделей равна сумме интерпретаций: $E^{\mathcal{I} \uplus \mathcal{J}} = E^{\mathcal{I}} \uplus E^{\mathcal{J}}$ (и аналогично для сумм произвольных семейств интерпретаций) при условии, что то же верно для компонент, из которых построен E.

Аксиома α называется *аддитивной*, если сумма произвольного семейства ее моделей является ее моделью: из $\mathcal{I} \models \alpha$, $\mathcal{J} \models \alpha$ и $\mathcal{K} = \mathcal{I} \uplus \mathcal{J}$ следует $\mathcal{K} \models \alpha$, и аналогично для произвольных семейств моделей.

Логику $\mathcal{L}$ (без номиналов) назовем *аддитивной*, если для любой ее терминологии $\mathcal{T}$ сумма произвольного семейства моделей $\mathcal{T}$ является моделью $\mathcal{T}$.

Очевидно, что если все конструкторы, участвующие в построении аксиом, аддитивны, то и аксиомы аддитивны. В свою очередь, если все аксиомы в языке логики аддитивны, то логика аддитивна.

Многие ДЛ без номиналов можно рассматривать как фрагменты логики предикатов с равенством (без констант и функциональных символов). Поэтому вполне естественно задаться вопросом, не является ли последняя аддитивной. Легко видеть, что не является. Так, в языке с равенством формула $\forall x, y\,(x = y)$ имеет лишь одноэлементные модели (то есть не аддитивна). В языке без равенства тоже легко предъявить неаддитивные формулы, например, $\forall x, y\,(xRy)$ и $\exists x \forall y\,(xRy)$. Несмотря на это, ниже мы покажем, что многие ДЛ являются аддитивными.

Лемма 13.1. *Следующие конструкторы являются аддитивными:*

- *все конструкторы концептов логики $\mathcal{ALCQ}$;*
- *операции над ролями: конъюнкция $R \sqcap S$, дизъюнкция $R \sqcup S$, композиция $R \circ S$, разность $R \setminus S$, инверсия R^-, (рефлексивно-)транзитивное замыкание R^+ и R^*, диагональ концепта $id(C)$;*
- *операции над отношениями: конъюнкция $R \sqcap S$, дизъюнкция $R \sqcup S$, разность $R \setminus S$;*
- *все конструкторы концептов и отношений логики $\mathcal{DLR}$, включая «отрицание» n-местного отношения, являющееся на самом деле дополнением до отношения $\top_n$, то есть $\neg R \equiv \top_n \setminus R$;*
- *конструктор равенства (составных) атрибутов $(u = v)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{I} \uplus \mathcal{J}$ (для суммы семейства моделей доказательства аналогичны). Аддитивность булевых операций над концептами очевидна. Например, для отрицания концепта имеем:

$$(\neg C)^{\mathcal{K}} = \Delta^{\mathcal{K}} \setminus C^{\mathcal{K}} = (\Delta^{\mathcal{I}} \uplus \Delta^{\mathcal{J}}) \setminus (C^{\mathcal{I}} \uplus C^{\mathcal{J}}) = (\Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}) \uplus (\Delta^{\mathcal{J}} \setminus C^{\mathcal{J}}) = (\neg C)^{\mathcal{I}} \uplus (\neg C)^{\mathcal{J}}.$$

Докажем аддитивность конструктора $\geqslant n\, R.C$ (предполагая, что его компоненты R и C аддитивны):

$$(\geqslant n\, R.C)^{\mathcal{K}} = (\geqslant n\, R.C)^{\mathcal{I}} \ \uplus\ (\geqslant n\, R.C)^{\mathcal{J}}.$$

Включение $\supseteq$ очевидно. Для доказательства обратного включения $\subseteq$, возьмем произвольный элемент $e \in (\geqslant n\, R.C)^{\mathcal{K}}$. Тогда $\exists d_1, \ldots, d_n \in \Delta^{\mathcal{K}}$ такие, что $\langle e, d_i\rangle \in R^{\mathcal{K}}$ и $d_i \in C^{\mathcal{K}}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Элемент e лежит либо в $\Delta^{\mathcal{I}}$, либо в $\Delta^{\mathcal{J}}$. Если $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$, то $\langle e, d_i\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ для всех i, откуда следует $d_i \in \Delta^{\mathcal{I}}$ и $d_i \in C^{\mathcal{I}}$. Значит, $e \in (\geqslant n\, R.C)^{\mathcal{I}}$. Случай $e \in \Delta^{\mathcal{J}}$ рассматривается аналогично.

Так же просто доказывается аддитивность остальных конструкторов. Например, для разности ролей имеем: $\langle e, d\rangle \in (R \setminus S)^{\mathcal{K}} \iff \langle e, d\rangle \in R^{\mathcal{K}}$ и $\langle e, d\rangle \notin S^{\mathcal{K}}$, откуда по аддитивности R, S: $\iff \langle e, d\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ и $\langle e, d\rangle \notin S^{\mathcal{I}}$ или аналогично для $\mathcal{J} \iff \langle e, d\rangle \in (R \setminus S)^{\mathcal{I}} \uplus (R \setminus S)^{\mathcal{J}}$. ◀

Комбинации аддитивных конструкторов, очевидно, тоже являются аддитивными. Например, из того, что конструкторы $\exists R.C$ и $R \sqcap S$ являются аддитивными, следует, что $\exists (R \sqcap S).C$ тоже аддитивен.

Лемма 13.2. *Следующие виды аксиом являются аддитивными (если их компоненты аддитивны):*

- *вложения и эквивалентности концептов: $C \sqsubseteq D$, $C \equiv D$;*
- *вложения и эквивалентности ролей и n-местных отношений: $R \sqsubseteq S$, $R \equiv S$;*
- *составные аксиомы вложения ролей: $R_1 \circ \ldots \circ R_k \sqsubseteq S_1 \circ \ldots \circ S_\ell$;*
- *аксиомы рефлексивности, симметричности, транзитивности, евклидовости ролей;*
- *аксиомы иррефлексивности, асимметричности, антисимметричности ролей.*

Доказательство. Если $C^{\mathcal{I} \uplus \mathcal{J}} = C^{\mathcal{I}} \uplus C^{\mathcal{J}}$ и $D^{\mathcal{I} \uplus \mathcal{J}} = D^{\mathcal{I}} \uplus D^{\mathcal{J}}$, то из $\mathcal{I}, \mathcal{J} \models C \sqsubseteq D$ следует $\mathcal{I} \uplus \mathcal{J} \models C \sqsubseteq D$. Аналогично для вложения ролей. Для составных аксиом вложения ролей утверждение следует из аддитивности композиции ролей.

Следующие свойства ролей выразимы в виде составных аксиом вложения: рефлексивность: $id(\top) \sqsubseteq R$, симметричность: $R^- \sqsubseteq R$, транзитивность: $R \circ R \sqsubseteq R$, евклидовость: $R^- \circ R \sqsubseteq R$.

Для оставшихся свойств ролей очевидно, что если свойство было выполнено в моделях $\mathcal{I}, \mathcal{J}$, то оно будет выполнено и в их сумме $\mathcal{I} \uplus \mathcal{J}$. ◀

Теорема 13.3. *Следующие логики аддитивны: $\mathcal{ALCIQ}$, $\mathcal{ALC}f$, $\mathcal{SHIQ}$, их расширения терминологиями и операциями над ролями $(\sqcap, \sqcup, \circ, *, +, \setminus, id)$, а также логика $\mathcal{DLR}$.*

Лемма 13.4. *Следующие конструкторы и аксиомы не являются аддитивными:*

- *тотальное n-местное отношение U с интерпретацией $U^{\mathcal{I}} = \Delta^n$; в частности, тотальная роль;*
- *отрицание роли: $\neg R$, интерпретируемое как дополнение до тотальной роли $(\neg R)^{\mathcal{I}} = \Delta^2 \setminus R^{\mathcal{I}}$;*
- *отрицание n-местного отношения $\neg R$, интерпретируемое как $(\neg R)^{\mathcal{I}} = \Delta^n \setminus R^{\mathcal{I}}$;*
- *аксиомы мощности концептов $\geqslant n\, C$, интерпретируемые как $\mathcal{I} \models (\geqslant n\, C) \iff |C^{\mathcal{I}}| \geqslant n$.*

Логика $\mathcal{ALC}(\neg)$ не является аддитивной.

Доказательство. Очевидно, что объединение отношений, тотальных на множествах $\Delta^{\mathcal{I}}$ и $\Delta^{\mathcal{J}}$, не будет тотальным отношением на множестве $\Delta^{\mathcal{I}} \uplus \Delta^{\mathcal{J}}$. Также очевидна неаддитивность аксиомы $\geqslant n\, C$, поскольку при объединении моделей мощность множества $C^{\mathcal{I}}$ увеличивается. Отрицание роли не является аддитивным ввиду следующего равенства:

$$(\neg R)^{\mathcal{I} \uplus \mathcal{J}} \ = \ (\neg R)^{\mathcal{I}} \uplus (\neg R)^{\mathcal{J}} \uplus (\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{J}}) \uplus (\Delta^{\mathcal{J}} \times \Delta^{\mathcal{I}}).$$

Логика $\mathcal{ALC}(\neg)$ не аддитивна, поскольку аксиома $\top \sqsubseteq \forall \neg R.\bot$ выражает тотальность роли R. ◀