Глава 11

Логика с многоместными отношениями

Все рассмотренные до сих пор логики имели в своем языке лишь 1-местные и 2-местные предикаты — концепты и роли, соответственно. На практике иногда требуется язык для представления знаний о многоместных отношениях; примеры будут приведены ниже. С этой целью разными авторами было предложено несколько расширений ДЛ. Мы рассмотрим наиболее известное из них — логику $\mathcal{DLR}$, введенную в [9]. Также будет разобрана техника так называемой *реификации* (или материализации), то есть представления многоместных отношений через двуместные, с помощью которой логика $\mathcal{DLR}$ сводится к уже известной нам логике $\mathcal{ALCIQ}$.

Язык логики $\mathcal{DLR}$ содержит конечное множество атомарных *концептов* CN и атомарных n-местных *отношений* RN_n для каждого n в пределах $2 \leqslant n \leqslant N$. Обозначим $\mathsf{RN} = \mathsf{RN}_2 \cup \cdots \cup \mathsf{RN}_N$. Кроме того, имеются «выделенные» n-местные отношения $\top_n$ для $2 \leqslant n \leqslant N$ (они считаются «логическими символами» и не включаются в RN_n, аналогично тому, как символ $\top$ не включается в CN). Если P есть n-местное отношение, то будем также говорить, что P имеет *валентность* n.

Определение 11.1 (Синтаксис логики $\mathcal{DLR}$)**.** Составные концепты и отношения логики $\mathcal{DLR}$ строятся согласно следующему совместному индуктивному определению:

- символ $\top$ является концептом (он будет обозначаться также как $\top_1$);
- всякий атомарный концепт $A \in \mathsf{CN}$ является концептом;
- если C и D — концепты, то выражения $\neg C$, $C \sqcap D$, $C \sqcup D$ являются концептами;
- если R есть n-местное отношение, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $k \geqslant 0$, то $\exists[i]R$ и $\geqslant k\,[i]R$ являются концептами;
- символ $\top_n$ является n-местным отношением;
- всякое атомарное n-местное отношение $P \in \mathsf{RN}_n$ является n-местным отношением;
- если R и S есть n-местные отношения, то $\neg R$, $R \sqcap S$, $R \sqcup S$ являются n-местными отношениями;
- если C есть концепт и $1 \leqslant i \leqslant n$, то выражение $(i/n\colon C)$ является n-местным отношением.

Кратко синтаксис логики $\mathcal{DLR}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{lcl} C & ::= & \top_1 \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid (\exists[i]R) \mid (\geqslant k\,[i]R) \\ R & ::= & \top_n \mid P \mid \neg R \mid R \sqcap S \mid R \sqcup S \mid (i/n\colon C) \end{array}$$

В качестве сокращений можно принять: $\bot = \neg\top$, а также $(\leqslant k\,[i]R) = \neg(\geqslant(k{+}1)\,[i]R)$.

Определение 11.2 (Семантика логики $\mathcal{DLR}$)**.** *Интерпретация* — это пара $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$, состоящая из непустого множества Δ (*области* интерпретации) и интерпретирующей функции $\cdot^{\mathcal{I}}$, которая сопоставляет:

- каждому атомарному концепту $A \in \mathsf{CN}$ — произвольное подмножество $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta$;
- каждому символу $\top_n$ для $2 \leqslant n \leqslant N$ — произвольное подмножество $\top_n^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^n$;
- каждому атомарному n-местному отношению $P \in \mathsf{RN}_n$ — произвольное подмножество $P^{\mathcal{I}} \subseteq \top_n^{\mathcal{I}}$.

Интерпретирующая функция распространяется на все концепты и отношения логики $\mathcal{DLR}$ однозначным образом — индукцией по построению концепта (где R — произвольное n-местное отношение, $n \geqslant 2$):

$$\boxed{\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \top_1^{\mathcal{I}} & = & \Delta & (\neg C)^{\mathcal{I}} & = & \Delta \setminus C^{\mathcal{I}} \\ \top_n^{\mathcal{I}} & \subseteq & \Delta^n & (\neg R)^{\mathcal{I}} & = & \top_n^{\mathcal{I}} \setminus R^{\mathcal{I}} \\ (C \sqcap D)^{\mathcal{I}} & = & C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} & (C \sqcup D)^{\mathcal{I}} & = & C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}} \\ (R \sqcap S)^{\mathcal{I}} & = & R^{\mathcal{I}} \cap S^{\mathcal{I}} & (R \sqcup S)^{\mathcal{I}} & = & R^{\mathcal{I}} \cup S^{\mathcal{I}} \\ \big(\exists[i]R\big)^{\mathcal{I}} & = & \multicolumn{4}{l}{\big\{e \in \Delta \mid \exists\langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in R^{\mathcal{I}}\colon\ e_i = e\big\}} \\ \big(\geqslant k\,[i]R\big)^{\mathcal{I}} & = & \multicolumn{4}{l}{\big\{e \in \Delta \mid \sharp\{\langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in R^{\mathcal{I}} \mid e_i = e\} \geqslant k\big\}} \\ \big(i/n\colon C\big)^{\mathcal{I}} & = & \multicolumn{4}{l}{\big\{\langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in \top_n^{\mathcal{I}} \mid e_i \in C^{\mathcal{I}}\big\}} \end{array}}$$

Можно также ввести двойственный конструктор $\forall[i]R := \neg\exists[i]\neg R$ с семантикой:

$$\big(\forall[i]R\big)^{\mathcal{I}} \;=\; \big\{\, e\in\Delta \mid \forall\langle e_1,\dots,e_n\rangle \in \top_n^{\mathcal{I}}\ \big(e_i = e\ \Rightarrow \langle e_1,\dots,e_n\rangle\in R^{\mathcal{I}}\big)\,\big\}.$$

Обратите внимание, что $\top_1$ всегда интерпретируется как множество Δ, тогда как $\top_n$ для $n>1$ интерпретируется лишь как произвольное (даже возможно пустое) подмножество Δ^n, причем оно содержит $P^{\mathcal{I}}$ для всех атомарных n-местных отношений $P\in\mathsf{RN}_n$. При этом операция $\neg$ на n-местных отношениях интерпретируется не как отрицание, а как дополнение до отношения $\top_n$. Несмотря на это, операции $\sqcap,\sqcup,\neg$ на отношениях ведут себя как обычные логические связки конъюнкции, дизъюнкции, отрицания; в частности, для них справедливы законы де Моргана (см. упражнение ниже).

Определение 11.3. *Терминология* (или TBox) $\mathcal{T}$ — это произвольный конечный набор *аксиом* вида $C\sqsubseteq D$ и $R\sqsubseteq S$, где C,D — произвольные концепты, а R,S — произвольные отношения одинаковой валентности.

Аксиома $C\sqsubseteq D$ *верна* в интерпретации $\mathcal{I}$, если справедливо включение $C^{\mathcal{I}}\subseteq D^{\mathcal{I}}$; при этом пишем: $\mathcal{I}\models C\sqsubseteq D$. Аналогично для аксиом вида $R\sqsubseteq S$, а также для эквивалентностей $C\equiv D$, $R\equiv S$. Говорим, что $\mathcal{I}$ является *моделью* терминологии $\mathcal{T}$, если в $\mathcal{I}$ верны все аксиомы из $\mathcal{T}$. Терминология $\mathcal{T}$ *выполнима*, если у нее существует модель. Концепт C *выполним* (относительно терминологии $\mathcal{T}$), если существует интерпретация $\mathcal{I}$ (являющаяся моделью терминологии $\mathcal{T}$), в которой $C^{\mathcal{I}}\neq\varnothing$.

Пример 11.1. Отношение «дети–родители» можно описывать двуместными ролями $\mathsf{hasFather}$, $\mathsf{hasMother}$, их объединением $\mathsf{hasParent}$ и обратным к нему $\mathsf{hasChild}$. Однако его же можно описывать и одним трехместным отношением $\mathsf{ChildOf}$, которое (при «естественной» интерпретации) будет содержать тройки людей $\langle c,m,f\rangle$, такие что c является ребенком своих родителей — матери m и отца f. Тогда, имея также атомарные концепты Man, Woman, Human, можно записать следующие аксиомы:

$$\begin{array}{lcllcl}
\exists[1]\mathsf{ChildOf} & \sqsubseteq & \mathsf{Human} \qquad & \mathsf{ChildOf} & \sqsubseteq & (1/3\colon \mathsf{Human})\\
\exists[2]\mathsf{ChildOf} & \sqsubseteq & \mathsf{Woman} \qquad & \mathsf{ChildOf} & \sqsubseteq & (2/3\colon \mathsf{Woman})\\
\exists[3]\mathsf{ChildOf} & \sqsubseteq & \mathsf{Man} \qquad & \mathsf{ChildOf} & \sqsubseteq & (3/3\colon \mathsf{Man})
\end{array}$$
$$\mathsf{Human}\ \sqsubseteq\ (\exists[1]\mathsf{ChildOf})\sqcap(\leqslant 1\,[1]\mathsf{ChildOf})$$

Поясним их смысл:

- $\exists[1]\mathsf{ChildOf}\sqsubseteq\mathsf{Human}$ — всякий ребенок является человеком (т.е. в каждой тройке $\langle c,m,f\rangle$, принадлежащей интерпретации отношения $\mathsf{ChildOf}$, первый компонент — c — принадлежит интерпретации концепта Human);
- $\mathsf{ChildOf}\sqsubseteq(1/3\colon\mathsf{Human})$ — другая запись того же самого (т.к. интерпретация концепта $(1/3\colon\mathsf{Human})$ есть множество троек, у которых первый компонент принадлежит интерпретации концепта Human);
- аналогично для аксиом во второй и третьей строке;
- последняя аксиома утверждает, что всякий человек является ребенком единственных родителей.

В этом языке мы можем ввести определения $\mathsf{Mother}\equiv\exists[2]\mathsf{ChildOf}$ и $\mathsf{Father}\equiv\exists[3]\mathsf{ChildOf}$.

Лемма 11.1. *Логика $\mathcal{DLR}$ является расширением логики $\mathcal{ALCIQ}$.*

Доказательство. Чтобы убедиться, что конструкторы концептов логики $\mathcal{ALCIQ}$ выразимы в $\mathcal{DLR}$, достаточно доказать следующие эквивалентности, где C — концепт, $R\in\mathsf{RN}_2$ — двуместное отношение:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\exists R.C & \equiv & \exists[1](R\sqcap(2/2\colon C)), & \exists R^-.C & \equiv & \exists[2](R\sqcap(1/2\colon C)),\\
\geqslant k\,R.C & \equiv & \geqslant k\,[1](R\sqcap(2/2\colon C)), & \geqslant k\,R^-.C & \equiv & \geqslant k\,[2](R\sqcap(1/2\colon C)).
\end{array}$$

Докажем первую (остальные — аналогично). Для любой интерпретации $\mathcal{I}$ имеем:

$$\begin{array}{rcl}
\big(\exists[1](R\sqcap(2/2\colon C))\big)^{\mathcal{I}} & \overset{(1)}{=} & \big\{\ e\in\Delta \mid \exists d\in\Delta\colon\ \langle e,d\rangle\in R^{\mathcal{I}}\cap(2/2\colon C)^{\mathcal{I}}\ \big\}\\
& \overset{(2)}{=} & \big\{\ e\in\Delta \mid \exists d\in\Delta\colon\ \langle e,d\rangle\in R^{\mathcal{I}}\ \wedge\ \langle e,d\rangle\in\top_2^{\mathcal{I}}\ \wedge\ d\in C^{\mathcal{I}}\ \big\}\\
& \overset{(3)}{=} & \big\{\ e\in\Delta \mid \exists d\in\Delta\colon\ \langle e,d\rangle\in R^{\mathcal{I}}\ \wedge\ d\in C^{\mathcal{I}}\ \big\}\ \overset{(4)}{=}\ (\exists R.C)^{\mathcal{I}}
\end{array}$$

Здесь (1) по определению $\mathcal{DLR}$-семантики; (2) ввиду равенства $(2/2\colon C)^{\mathcal{I}}=\{\langle x,y\rangle\in\top_2^{\mathcal{I}}\mid y\in C^{\mathcal{I}}\}$; (3) в силу включения $R^{\mathcal{I}}\subseteq\top_2^{\mathcal{I}}$; и (4) по определению $\mathcal{ALCIQ}$-семантики. □

Следствие 11.2. *Логика $\mathcal{DLR}$ не является полной относительно конечных моделей (ПОКМ).*

Доказательство. Следует из предыдущей леммы и того, что логика $\mathcal{ALCIQ}$ с терминологиями не ПОКМ (лемма 6.4). Выпишем явно $\mathcal{DLR}$-терминологию, имеющую модели, но не имеющую конечных моделей:

$$\begin{array}{ll} \top \sqsubseteq \exists[1]\top_2 & \exists[2]\top_2 \sqsubseteq A \\ \top \sqsubseteq \exists[1](R \sqcap (2/2\colon \neg A)) & \top \sqsubseteq (\leqslant 1\,[2]R) \end{array}$$

Поясним смысл этих аксиом. Пусть $\mathcal{I}$ есть их модель. Тогда аксиома $\top \sqsubseteq \exists[1]\top_2$ означает, что первая компонента отношения $\top_2^{\mathcal{I}}$ пробегает всё множество Δ. В частности, $\top_2^{\mathcal{I}}$ не пусто. Значит, вторая компонента отношения $\top_2^{\mathcal{I}}$ тоже не пуста и содержится, согласно аксиоме $\exists[2]\top_2 \sqsubseteq A$, в множестве $A^{\mathcal{I}}$. Тем самым $\mathcal{I}$ есть модель концепта A. Остальные две аксиомы есть перевод аксиом $\mathcal{ALCIQ}$-терминологии $\{\top \sqsubseteq \exists R.\neg A$, $\top \sqsubseteq (\leqslant 1\, R^-)\}$, приведенной в лемме 6.4. ◀

Упражнение 11.1. 1) Докажите, что в любой интерпретации верны следующие аксиомы:

а) $R \sqsubseteq \top_n$ для любого (не только атомарного) n-местного отношения R;

б) $\neg(R \sqcap S) \equiv \neg R \sqcup \neg S$ и $\neg(R \sqcup S) \equiv \neg R \sqcap \neg S$, для любых отношений R, S одинаковой валентности;

д) $\top \sqsubseteq \forall[i]\top_n$, где $1 \leqslant i \leqslant n \leqslant N$;

е) Верно ли, что $\bot \equiv \neg\top_n$ для любого $2 \leqslant n \leqslant N$? Чему эквивалентно $\neg\bot$? $\neg\neg\top_n$?

2) Всякая терминология эквивалентна набору аксиом вида $\top_n \sqsubseteq C_n$ (по одной для каждого $n > 1$), где C_n есть концепт (при $n = 1$) или n-местное отношение (при $n > 1$).

3) Пусть C — концепт, R — n-местное отношение. Докажите, что включение $\exists[i]R \sqsubseteq C$ эквивалентно включению $R \sqsubseteq (i/n\colon C)$. Эквивалентны ли друг другу обратные включения?

4) Фиксируем числа $i \leqslant n$. Для всякого концепта C и n-местного отношения R обозначим: $\alpha C := (i/n\colon C)$ и $\beta R := \exists[i]R$. Таким образом, оператор α преобразует концепт в n-местное отношение, а β наоборот.

а) Докажите следующие включения (верны ли обратные включения?) и эквивалентности:

$$\begin{array}{lcllcl} C & \sqsupseteq & \beta\alpha C, & \alpha C & \equiv & \alpha\beta\alpha C, \\ R & \sqsubseteq & \alpha\beta R, & \beta R & \equiv & \beta\alpha\beta R. \end{array}$$

б) Докажите, что если интерпретация удовлетворяет аксиоме $\top \sqsubseteq \exists[i]\top_n$ для данных $i \leqslant n$ (то есть $\top \sqsubseteq \beta\top_n$), то в такой модели включения из предыдущего пункта превращаются в эквивалентности.

11.1 Понятие реификации

Под *реификацией* понимается представление многоместных отношений через 1- и 2-местные; ее идея заключается в следующем. Для всякого кортежа (т.е. упорядоченного набора) из n элементов $\vec{e} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ создается новый элемент $d_{\vec{e}}$, называемый *реификацией* кортежа $\vec{e}$. Далее вводятся специальные роли (являющиеся на самом деле функциями, быть может, не всюду определенными) $f_1, \ldots, f_n$, связывающие элемент $d_{\vec{e}}$ с компонентами e_i представляемого им кортежа, то есть $f_i(d_{\vec{e}}) = e_i$. Наконец, для представления какого-либо n-местного отношения R ему сопоставляют концепт A_R, содержащий в себе элементы $d_{\vec{e}}$, представляющие кортежи $\vec{e}$ из R. Чтобы конструкция работала правильно, необходимо наложить некоторые ограничения (аксиомы) на функции f_i; например, потребовать, чтобы на элементах d, представляющих кортежи длины n, были определены лишь функции $f_1, \ldots, f_n$, а остальные не определены.

Таким образом, после реификации нам более не приходится иметь дело с кортежами $\vec{e}$ и многоместными отношениями R; вместо них мы работаем с элементами $d_{\vec{e}}$, концептами A_R и ролями $f_1, \ldots, f_n$. Однако возникает следующая проблема. В некоторых моделях этого нового языка (даже подчиняющихся упомянутым выше аксиомам) может оказаться, что более одного элемента представляют один и тот же кортеж (с точки зрения функций f_i). Более точно, могут найтись два элемента $d \neq d'$, такие что $f_i(d) = e_i = f_i(d')$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, тем самым d и d' «представляют» кортеж $\vec{e} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ (возникает «конфликт»). К сожалению, невозможно написать ДЛ аксиому, которая бы исключала такую возможность. Однако решение проблемы все же имеется: можно показать, что если существует какая-либо модель, то существует и модель, в которой подобных «конфликтов» нет. Если мы имеем дело с задачей выполнимости (концептов, терминологий, баз знаний и т.п.), то этого достаточно. Перейдем к формулировке результатов.

11.2 Перевод терминологий $\mathcal{DLR}$ в терминологии $\mathcal{ALCIQ}$

Мы опишем перевод логики $\mathcal{DLR}$ в логику $\mathcal{ALCIQ}$, сохраняющий выполнимость терминологий. Впервые он был предложен в [10] для несколько другой логики (статья не содержит доказательств); относительно полные доказательства можно найти в работе других авторов [11].

Напомним кратко синтаксис логики $\mathcal{DLR}$:

$$\begin{array}{lcl} C & ::= & \top_1 \mid \mathbf{A} \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid (\exists[i]R) \mid (\geqslant k\,[i]R) \\ R & ::= & \top_n \mid \mathbf{P} \mid \neg R \mid R \sqcap S \mid R \sqcup S \mid (i/n\colon C) \end{array}$$

и синтаксис логики $\mathcal{ALCIQ}$:

$$
\begin{array}{lcl}
C & ::= & \top \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \exists R.C \mid ({\geqslant} k\, R.C) \\
R & ::= & P \mid P^{-}
\end{array}
$$

Атомарные концепты и отношения логики $\mathcal{DLR}$ будем обозначать жирным прямым шрифтом $(\mathbf{A}, \mathbf{P})$, а соответствующие им концепты логики $\mathcal{ALCIQ}$ — курсивным шрифтом (A, P), чтобы не вводить для них дополнительных букв.

Итак, пусть в языке логики $\mathcal{DLR}$ имеется множество атомарных концептов CN, множество атомарных n-местных отношений RN_n и n-местные отношения $\top_n$, где $1 \leqslant n \leqslant N$.

Язык логики $\mathcal{ALCIQ}$ будет состоять из следующих множеств атомарных концептов CN' и ролей RN':

- каждому атомарному концепту $\mathbf{A} \in \mathsf{CN}$ сопоставим атомарный концепт $A \in \mathsf{CN}'$;
- каждому атомарному n-местному отношению $\mathbf{P} \in \mathsf{RN}_n$ сопоставим атомарный концепт $P \in \mathsf{CN}'$;
- каждому n-местному отношению $\top_n$ сопоставим атомарный концепт $T_n \in \mathsf{CN}'$, для $1 \leqslant n \leqslant N$;
- множество RN' будет состоять из N ролей $f_1, \ldots, f_N$.

Перевод $\sigma(\cdot)$ концептов и отношений логики $\mathcal{DLR}$ в *концепты* логики $\mathcal{ALCIQ}$ будет следующим, где C и D есть $\mathcal{DLR}$-концепты, R и S есть n-местные отношения, $2 \leqslant n \leqslant N$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $k \geqslant 0$:

$$
\begin{array}{|lcl lcl|}
\hline
\sigma(\top_1) & = & T_1 & \sigma(\top_n) & = & T_n \\
\sigma(\mathbf{A}) & = & A & \sigma(\mathbf{P}) & = & P \\
\sigma(\neg C) & = & T_1 \sqcap \neg\sigma(C) & \sigma(\neg R) & = & T_n \sqcap \neg\sigma(R) \\
\sigma(C \sqcap D) & = & \sigma(C) \sqcap \sigma(D) & \sigma(R \sqcap S) & = & \sigma(R) \sqcap \sigma(S) \\
\sigma(C \sqcup D) & = & \sigma(C) \sqcup \sigma(D) & \sigma(R \sqcup S) & = & \sigma(R) \sqcup \sigma(S) \\
\sigma(\exists [i] R) & = & \exists f_i^{-}.\sigma(R) & \sigma(i/n\colon C) & = & T_n \sqcap \exists f_i.\sigma(C) \\
\sigma({\geqslant} k\, [i] R) & = & {\geqslant} k\, f_i^{-}.\sigma(R) & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Распространяем перевод $\sigma(\cdot)$ на терминологические аксиомы логики $\mathcal{DLR}$:

$$
\sigma(C \sqsubseteq D) \;=\; \sigma(C) \sqsubseteq \sigma(D), \qquad\qquad \sigma(R \sqsubseteq S) \;=\; \sigma(R) \sqsubseteq \sigma(S).
$$

Перевод терминологии $\mathcal{T}$ определяем как множество переводов ее аксиом: $\sigma(\mathcal{T}) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{T}\}$.

11.2.1 Аксиомы реификации и регулярные модели

Для корректной работы описанного перевода (в смысле доказываемой ниже теоремы 11.5) нам потребуются также следующие *аксиомы реификации*. Совокупность этих аксиом (являющуюся TBox-ом в логике $\mathcal{ALCIQ}$) обозначим как TRe:

(A1)	$A \sqsubseteq T_1$	для всех $\mathbf{A} \in \mathsf{CN}$
(A2)	$P \sqsubseteq T_n$	для всех $\mathbf{P} \in \mathsf{RN}_n$ и $2 \leqslant n \leqslant N$
(A3)	$\top \sqsubseteq \forall f_i.T_1$	для всех $1 \leqslant i \leqslant N$
(A4)	$\top \sqsubseteq ({\leqslant} 1\, f_i)$	для всех $1 \leqslant i \leqslant N$
(A5)	$T_n \;\equiv\; \exists f_1 \sqcap \ldots \sqcap \exists f_n \sqcap \neg\exists f_{n+1}$	для всех $1 \leqslant n < N$
(A6)	$T_N \;\equiv\; \exists f_1 \sqcap \ldots \sqcap \exists f_N$	

Посмотрим, что означают аксиомы реификации в конкретной модели.

Лемма 11.3. *Пусть $\mathcal{J} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{J}})$ является моделью аксиом* TRe. *Тогда:*

- *множества $T_n^{\mathcal{J}}$, где $1 \leqslant n \leqslant N$, попарно не пересекаются;*
- *имеются всюду определенные функции $f_i^{\mathcal{J}}\colon T_n^{\mathcal{J}} \to T_1^{\mathcal{J}}$ при $1 \leqslant i \leqslant n \leqslant N$;*
- *$\mathcal{J} \models \sigma(C) \sqsubseteq T_1$ и $\mathcal{J} \models \sigma(R) \sqsubseteq T_n$ для любого $\mathcal{DLR}$-концепта C и n-местного отношения R.*

Доказательство. Аксиома (A4) означает, что каждая $f_i^{\mathcal{J}}$ является частично определенной функцией со значениями в множестве $T_1^{\mathcal{J}}$ согласно (A3). Из аксиом (A5–A6) вытекает, что на множестве $T_n^{\mathcal{J}}$ определены функции $f_i^{\mathcal{J}}$ для всех $i \leqslant n$ и не определена функция $f_{n+1}^{\mathcal{J}}$. Множества $T_n^{\mathcal{J}}$ попарно не пересекаются, так как их элементы различаются тем, какие из функций $f_i^{\mathcal{J}}$ на них определены. Наконец, включения $\sigma(C) \sqsubseteq T_1$ и $\sigma(R) \sqsubseteq T_n$ легко доказываются индукцией по построению концепта C и отношения R, где база индукции вытекает из аксиом (A1–A2), а шаги следуют из построения перевода σ. □

Ввиду доказанной леммы, вместо записи $\langle x, y\rangle \in f_i^{\mathcal{J}}$ мы будем употреблять более привычную запись $f_i^{\mathcal{J}}(x) = y$. Кроме того, удобно также ввести обозначение для вектор-функций:

$$\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) := \langle f_1^{\mathcal{J}}(x), \ldots, f_n^{\mathcal{J}}(x)\rangle, \quad \text{для каждого } n \geqslant 2.$$

Аксиомы реификации описывают некоторые свойства функций проекции кортежа на свои компоненты. Исчерпывающий ли это список свойств? То есть всякая ли модель этих аксиом в некотором смысле «похожа» на модель, состоящую из кортежей и функций проекции? Оказывается, что нет; не хватает одного условия, гарантирующего, что по своим проекциям кортеж восстанавливается однозначно.

Назовем модель $\mathcal{J}$ *регулярной*, если для каждого $n \geqslant 2$ функция $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)$ является инъективной на множестве[1] $T_n^{\mathcal{J}}$, то есть выполняется следующее *условие регулярности*:

$$\forall n \geqslant 2\ \forall x, x' \in T_n^{\mathcal{J}}\colon\ \left[\ \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) = \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x')\ \Rightarrow\ x = x'\ \right].$$

Следующая лемма относится исключительно к логике $\mathcal{ALCIQ}$ и моделям аксиом реификации TRe (и не зависит от перевода $\mathcal{DLR}$ в $\mathcal{ALCIQ}$); она будет использована нами в доказательстве основной теоремы 11.5.

Лемма 11.4 (О регуляризации)**.** *Для любой модели $\mathcal{I} \models \mathsf{TRe}$ существует регулярная модель $\mathcal{J} \models \mathsf{TRe}$, в которой верны все $\mathcal{ALCIQ}$-аксиомы, верные в $\mathcal{I}$, то есть для любых $\mathcal{ALCIQ}$-концептов C, D, если $\mathcal{I} \models C \sqsubseteq D$, то $\mathcal{J} \models C \sqsubseteq D$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{J}})$ — нерегулярная модель аксиом TRe. Обозначим $\Delta_1 = T_1^{\mathcal{J}}$. Будем говорить, что элементы $x \neq y$ *конфликтуют в* $\mathcal{I}$, если $x, y \in T_n^{\mathcal{I}}$ и $\vec{f}_n^{\mathcal{I}}(x) = \vec{f}_n^{\mathcal{I}}(y)$ для некоторого $n \geqslant 2$. Наша цель — построить модель $\mathcal{J}$, в которой никакие элементы не конфликтуют.

Для каждого $n \geqslant 2$ и для каждого кортежа $\vec{e} \in \Delta_1^n$ рассмотрим множество всех его «реификаций» в $\mathcal{J}$:

$$D_{\vec{e}} = \{\ x \in T_n^{\mathcal{I}}\ \mid\ \vec{f}_n^{\mathcal{I}}(x) = \vec{e}\ \}.$$

Так как модель $\mathcal{I}$ не регулярна, то $|D_{\vec{e}}| > 1$ хотя бы для одного $\vec{e}$. Для каждого кортежа $\vec{e} \in \Delta_1^n$, такого что $|D_{\vec{e}}| > 1$, зафиксируем произвольный элемент $d_{\vec{e}} \in D_{\vec{e}}$; остальные же элементы множества $D_{\vec{e}}$ назовем *конфликтными*; объединим их (по всем $\vec{e}$ и всем $n \geqslant 2$) в множество:

$$\mathsf{Conf}_{\vec{e}} = D_{\vec{e}} \setminus \{d_{\vec{e}}\}, \qquad \mathsf{Conf} = \bigcup_{2 \leqslant n \leqslant N}\ \bigcup_{\vec{e} \in \Delta_1^n} \mathsf{Conf}_{\vec{e}}.$$

Идея: возьмем модель $\mathcal{I}'$, состоящую из $|2^{\mathsf{Conf}}|$ копий модели $\mathcal{I}$. Ясно, что число конфликтных элементов при этом возрастет: вместо каждого $x \in \mathsf{Conf}$ появятся $|2^{\mathsf{Conf}}|$ конфликтных элементов x_p (для каждого $p \subseteq \mathsf{Conf}$). Разобьем их на пары: x_p и $x_{p\setminus\{x\}}$, для всех таких p, что $x \in p \subseteq \mathsf{Conf}$ (ясно, что ими исчерпываются все копии элемента x в $\mathcal{I}'$). Теперь поменяем местами значения функции f_1 на точках x_p и $x_{p\setminus\{x\}}$ одновременно для всех x, p, таких что $x \in p \subseteq \mathsf{Conf}$. В результате получится модель $\mathcal{J}$. При этом все $|\mathsf{Conf} \times 2^{\mathsf{Conf}}|$ конфликтов из $\mathcal{I}'$ будут устранены, а новых не возникнет. Останется показать, что $\mathcal{J}$ есть модель любых $\mathcal{ALCIQ}$-аксиом, верных в $\mathcal{I}$.

Формально: построение выполняется в два шага.

Шаг 1. Пусть $\mathcal{I}' = (\Delta', \cdot^{\mathcal{I}'})$ есть объединение $|2^{\mathsf{Conf}}|$ попарно непересекающихся «копий» модели $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}'\ =\ \mathcal{I} \times 2^{\mathsf{Conf}}.$$

Введем обозначения: для каждого $p \subseteq \mathsf{Conf}$ обозначим p-ю копию модели $\mathcal{I}$ (то есть $\mathcal{I} \times \{p\}$) через $\mathcal{I}_p$ и будем называть ее p-й *галактикой*; а также p-ю копию элемента $x \in \Delta$ обозначим через x_p.

Факт 1. *$\mathcal{I}'$ является моделью всех $\mathcal{ALCIQ}$-аксиом, верных в $\mathcal{I}$; в частности, аксиом реификации* TRe.

Это следует из того, что логика $\mathcal{ALCIQ}$ является аддитивной (см. раздел 13).

Заметим, что модель $\mathcal{I}'$ не регулярна: множество конфликтных элементов в $\mathcal{I}'$ есть $\mathsf{Conf} \times 2^{\mathsf{Conf}}$, т.к. для любых $x \in \mathsf{Conf}$ и $p \subseteq \mathsf{Conf}$ элемент x_p конфликтует в галактике $\mathcal{I}_p$ со «своей» копией элемента $d_{\vec{e}}$.

Шаг 2. Модель $\mathcal{J}$ получим из $\mathcal{I}'$ следующим изменением интерпретации функции f_1: для каждых x, p, таких что $x \in p \subseteq \mathsf{Conf}$, поменяем местами значения функции f_1 на точках x_p и $x_{p\setminus\{x\}}$. Таким образом:

$$\forall x, p\colon\ x \in p \subseteq \mathsf{Conf},\ \text{ обозначив } q := p \setminus \{x\},\ \text{ положим: } \quad \begin{cases} f_1^{\mathcal{J}}(x_p) := f_1^{\mathcal{I}'}(x_q), \\ f_1^{\mathcal{J}}(x_q) := f_1^{\mathcal{I}'}(x_p). \end{cases}$$

[1] Ясно, что мы не должны требовать инъективности на всём множестве Δ, поскольку функции f_i служат проекциями одновременно для всех размерностей. Например, функции f_1, f_2, f_3 выдают одинаковый результат на кортежах $\langle 3,7,5\rangle$ и $\langle 3,7,5,4\rangle$, но это не означает, что данные кортежи равны.

Можно записать иначе: $\forall x \in \Delta\ \forall p \subseteq \mathsf{Conf}$: $f_1^{\mathcal{J}}(x_p) := f_1^{\mathcal{I}'}(x_q)$, где $q = p^x := \begin{cases} p \setminus \{x\}, & \text{если } x \in p, \\ p \cup \{x\}, & \text{если } x \notin p. \end{cases}$

Факт 2. *Функция $f_1^{\mathcal{J}}$ определена корректно и отличается от $f_1^{\mathcal{I}'}$ в каждой точке множества* $\mathsf{Conf}\times 2^{\mathsf{Conf}}$.

Это следует из того, что $\forall x \in \mathsf{Conf}$ семейства $\{p \mid x \in p \subseteq \mathsf{Conf}\}$ и $\{p \setminus \{x\} \mid x \in p \subseteq \mathsf{Conf}\}$ не пересекаются и в объединении дают всё множество 2^{Conf}.

Факт 3. *Модель $\mathcal{J}$ регулярна.*

Доказательство. Допустим противное — существуют точки $x_p \neq y_q$, которые конфликтуют в $\mathcal{J}$, то есть $x_p, y_q \in T_n^{\mathcal{J}}$ и $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x_p) = \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(y_q)$ для некоторого $n \geqslant 2$. В частности, $f_2^{\mathcal{J}}(x_p) = f_2^{\mathcal{J}}(y_q)$. Но при построении $\mathcal{J}$ из $\mathcal{I}'$ значения f_2 не менялись. Значит, $f_2^{\mathcal{I}'}(x_p) = f_2^{\mathcal{I}'}(y_q)$. Поскольку в $\mathcal{I}'$ разные галактики не пересекаются, то это возможно, только если x_p и y_q лежат в одной галактике, то есть $p = q$.

Итак, мы имеем $x \neq y$ и $f_i^{\mathcal{J}}(x_p) = f_i^{\mathcal{J}}(y_p)$ для всех $2 \leqslant i \leqslant n$. Мы докажем, что $f_1^{\mathcal{J}}(x_p) \neq f_1^{\mathcal{J}}(y_p)$, то есть что x_p и y_p на самом деле не конфликтуют в $\mathcal{J}$. По построению $f_1^{\mathcal{J}}$, для x (аналогично для y) и p имеем:

- если $x \in \mathsf{Conf}$, то значение $f_1^{\mathcal{J}}(x_p)$ лежит в галактике $p \setminus \{x\}$ (если $x \in p$) либо $p \cup \{x\}$ (если $x \notin p$);
- если $x \notin \mathsf{Conf}$, то значение $f_1^{\mathcal{J}}(x_p)$ равно $f_1^{\mathcal{I}'}(x_p)$, то есть лежит в p-й галактике.

Следовательно, возможны следующие случаи:

- если $x \in \mathsf{Conf}$ или $y \in \mathsf{Conf}$, то значения $f_1^{\mathcal{J}}(x_p)$ и $f_1^{\mathcal{J}}(y_p)$ не могут совпасть, так как они лежат в разных галактиках (перебор 4 случаев: $x \in p$? $y \in p$?);
- если $x, y \notin \mathsf{Conf}$, то, в частности, x и y не конфликтуют друг с другом в $\mathcal{I}$. Но «компоненты» вторая и выше у них совпадают в $\mathcal{I}$: $f_i^{\mathcal{I}}(x) = f_i^{\mathcal{I}}(y)$ для всех $2 \leqslant i \leqslant n$ (ибо это верно в $\mathcal{J}$ для x_p и y_p, а значит в $\mathcal{I}_p$ и в $\mathcal{I}$). Тогда они должны отличаться в первой компоненте в $\mathcal{I}$, а значит в $\mathcal{I}_p$ и в $\mathcal{J}$ (ибо значение f_1 на точках не из Conf не менялось): $f_1^{\mathcal{J}}(x_p) \neq f_1^{\mathcal{J}}(y_p)$.

В любом случае $f_1^{\mathcal{J}}(x_p) \neq f_1^{\mathcal{J}}(y_p)$, значит точки x_p и y_p не конфликтуют в $\mathcal{J}$. Факт 4 доказан. ◀

Факт 4. *$\mathcal{J}$ является моделью всех $\mathcal{ALCIQ}$-аксиом, верных в $\mathcal{I}$; в частности, аксиом реификации* TRe.

Доказательство. Так как это верно для $\mathcal{I}'$ (см. Факт 1), то достаточно доказать, что $C^{\mathcal{J}} = C^{\mathcal{I}'}$ для любого $\mathcal{ALCIQ}$-концепта C. Сначала установим несколько простых фактов о моделях $\mathcal{I}'$ и $\mathcal{J}$.

Для элементов $e, d \in \Delta'$ будем писать $e \sim d$, если e и d являются копиями одного и того же элемента из Δ, то есть $\exists x \in \Delta\ \exists p, q \subseteq \mathsf{Conf}$: $e = x_p$ и $d = x_q$. Так как $\mathcal{I}'$ есть объединение копий модели $\mathcal{I}$, то:

$$\forall x \in \Delta\ \forall p \subseteq \mathsf{Conf}\ \forall C \in \mathcal{ALCIQ}: \qquad x \in C^{\mathcal{I}} \iff x_p \in C^{\mathcal{I}'}.$$

Отсюда следует, что для любых x, p, q, C имеет место эквивалентность: $x_p \in C^{\mathcal{I}'} \iff x_q \in C^{\mathcal{I}'}$. Переформулируем это же, используя введенное выше обозначение:

$$\forall e, d \in \Delta'\ \forall C \in \mathcal{ALCIQ}: \qquad (e \sim d)\ \Rightarrow\ \big(e \in C^{\mathcal{I}'} \iff d \in C^{\mathcal{I}'}\big). \qquad (a)$$

Далее докажем следующее утверждение:

$$\forall e \in \Delta' \qquad f_1^{\mathcal{J}}(e) \sim f_1^{\mathcal{I}'}(e). \qquad (b)$$

Действительно, $e = x_p$ для некоторых $x \in \Delta$ и $p \subseteq \mathsf{Conf}$. Если $x \notin \mathsf{Conf}$, то $f_1^{\mathcal{J}}(x_p) = f_1^{\mathcal{I}'}(x_p)$ и утверждение очевидно. Если же $x \in \mathsf{Conf}$, то $f_1^{\mathcal{J}}(x_p) = f_1^{\mathcal{I}'}(x_q)$, где $q = p^x$. Тогда доказываемое утверждение следует из $f_1^{\mathcal{I}'}(x_p) \sim f_1^{\mathcal{I}'}(x_q)$, которое, в свою очередь, вытекает из того, что если обозначить $y := f_1^{\mathcal{I}}(x)$, то $f_1^{\mathcal{I}'}(x_p) = y_p$ и $f_1^{\mathcal{I}'}(x_q) = y_q$.

Введем вспомогательную функцию $h\colon \Delta' \to \Delta'$ следующим образом:

$$\forall x \in \Delta\ \forall p \subseteq \mathsf{Conf}: \qquad h(x_p) = \begin{cases} x_q, \text{где } q = p^x, & \text{если } x \in \mathsf{Conf}, \\ x_p, & \text{если } x \notin \mathsf{Conf}. \end{cases}$$

Очевидно, что h — биекция множества Δ' на себя, причем обратная к h есть сама же h, поскольку если $q = p^x$, то $p = q^x$. Легко видеть, что

$$\forall e \in \Delta' \qquad e \sim h(e). \qquad (c)$$

Теперь мы можем записать связь функций $f_1^{\mathcal{J}}$ и $f_1^{\mathcal{I}'}$ в виде простых соотношений:

$$\forall e \in \Delta': \qquad f_1^{\mathcal{J}}(e) = f_1^{\mathcal{I}'}(h(e)) \quad \text{и} \quad f_1^{\mathcal{J}}(h(e)) = f_1^{\mathcal{I}'}(e). \qquad (d)$$

На этом вспомогательные утверждения закончились.

Докажем равенство $C^{\mathcal{J}} = C^{\mathcal{I}'}$ индукцией по построению $\mathcal{ALCIQ}$-концепта C. Для атомарных концептов это очевидно, так как $\mathcal{J}$ отличается от $\mathcal{I}'$ лишь интерпретацией роли f_1. Шаги, отвечающие булевым операциям, тривиальны. Остается доказать утверждение для концептов вида $(\geqslant k\, f_i.C)$ и $(\geqslant k\, f_i^-.C)$, поскольку остальные конструкторы $(\exists, \forall, \leqslant k)$ выражаются через них. Более того, для $i \geqslant 2$ утверждение очевидно, так как роли $f_2, \ldots, f_N$ интерпретируются в $\mathcal{I}'$ и $\mathcal{J}$ одинаково.

- Для $(\geqslant k\, f_1.C)$ достаточно рассмотреть случай $k = 1$, поскольку f_1 является функцией в $\mathcal{I}'$ и $\mathcal{J}$. Итак, требуется доказать: $(\exists f_1.C)^{\mathcal{J}} = (\exists f_1.C)^{\mathcal{I}'}$. Для любого элемента $e \in \Delta'$ имеем:

$$e \in (\exists f_1.C)^{\mathcal{J}} \overset{(1)}{\iff} f_1^{\mathcal{J}}(e) \in C^{\mathcal{J}} \overset{(2)}{\iff} f_1^{\mathcal{J}}(e) \in C^{\mathcal{I}'} \overset{(3)}{\iff} f_1^{\mathcal{I}'}(e) \in C^{\mathcal{I}'} \overset{(4)}{\iff} e \in (\exists f_1.C)^{\mathcal{I}'}.$$

  Здесь (1) и (4) по определению семантики $\exists$ и пользуясь тем, что $f_1^{\mathcal{J}}$ и $f_1^{\mathcal{I}'}$ являются функциями; (2) ввиду равенства $C^{\mathcal{J}} = C^{\mathcal{I}'}$ по предположению индукции; (3) ввиду свойств (b) и (a).

- Для $(\geqslant k\, f_1^-.C)$ имеем для любого $y \in \Delta'$ (где $\exists^{\neq}$ означает «существуют различные элементы»):

$$\begin{aligned} y \in (\geqslant k\, f_1^-.C)^{\mathcal{J}} &\overset{(1)}{\iff} \exists^{\neq} e_1, \ldots, e_k \in \Delta'\ \forall i\colon\ f_1^{\mathcal{J}}(e_i) = y\ \wedge e_i \in C^{\mathcal{J}} \\ &\overset{(2)}{\iff} \exists^{\neq} d_1, \ldots, d_k \in \Delta'\ \forall i\colon\ f_1^{\mathcal{I}'}(d_i) = y \wedge d_i \in C^{\mathcal{I}'} \quad \overset{(3)}{\iff} \quad y \in (\geqslant k\, f_1^-.C)^{\mathcal{I}'} \end{aligned}$$

  Поясним импликацию $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$. Имея различные элементы $e_1, \ldots, e_k$, положим $d_i = h(e_i)$. Тогда все d_i различны (так как h — биекция), $d_i \sim e_i$ по свойству (c), $f_1^{\mathcal{I}'}(d_i) = f_1^{\mathcal{J}}(e_i) = y$ по свойству (d), $e_i \in C^{\mathcal{J}} = C^{\mathcal{I}'}$ по предположению индукции, $d_i \in C^{\mathcal{I}'}$ по свойству (a).

  Переход $\overset{(2)}{\Longleftarrow}$ доказывается аналогично, учитывая, что если $d_i = h(e_i)$, то $e_i = h(d_i)$.

Доказательство Факта 4 тем самым закончено. ◀

Итак, построена регулярная модель $\mathcal{J}$ всех $\mathcal{ALCIQ}$-аксиом, верных в $\mathcal{I}$. Теорема доказана. □

11.2.2 Теорема о реификации терминологий $\mathcal{DLR}$

Теперь обозначим $\pi(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}) \cup \mathsf{TRe}$. Очевидно, что $\pi(\mathcal{T})$ является $\mathcal{ALCIQ}$-терминологией для любой $\mathcal{DLR}$-терминологии $\mathcal{T}$. Мы готовы сформулировать основной результат.

Теорема 11.5 (О реификации терминологий $\mathcal{DLR}$)**.** *Для всякой $\mathcal{DLR}$-терминологии $\mathcal{T}$ справедливо:*

$$\mathcal{T} \text{ выполним} \iff \pi(\mathcal{T}) \text{ выполним.}$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{DLR}$-терминология $\mathcal{T}$ имеет модель $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$. Построим модель $\mathcal{J} = (\Delta', \cdot^{\mathcal{J}})$ для $\pi(\mathcal{T})$ следующим образом. В качестве области Δ' возьмем непересекающееся объединение[2] множеств $\top_n^{\mathcal{I}}$:

$$\Delta' \;=\; \top_1^{\mathcal{I}} \uplus \top_2^{\mathcal{I}} \uplus \ldots \uplus \top_N^{\mathcal{I}} \;\subseteq\; \Delta \uplus \Delta^2 \uplus \ldots \uplus \Delta^N.$$

Проинтерпретируем атомарные концепты A, P, T_n, $n \geqslant 1$, фигурирующие в $\pi(\mathcal{T})$, следующим образом:

$$A^{\mathcal{J}} := \mathbf{A}^{\mathcal{I}}, \quad P^{\mathcal{J}} := \mathbf{P}^{\mathcal{I}}, \quad T_n^{\mathcal{J}} := \top_n^{\mathcal{I}},$$

а каждую роль f_i — «естественным» образом, как проекцию кортежа длины $\geqslant i$ на i-ю компоненту:

$$f_i^{\mathcal{J}} \;:=\; \textstyle\bigcup_{i \leqslant n \leqslant N} \left\{ \langle \vec{e}, e_i \rangle \;\middle|\; \vec{e} = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \in \top_n^{\mathcal{I}} \right\}.$$

Лемма 11.5.1. *$\mathcal{J}$ является моделью аксиом реификации* TRe.

Доказательство. $\mathcal{J} \models (\mathsf{A1})$ и $\mathcal{J} \models (\mathsf{A2})$, так как по определению $\mathcal{DLR}$-интерпретации $\mathbf{A}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta$ и $\mathbf{P} \subseteq \top_n^{\mathcal{I}}$ для всякого атомарного концепта $\mathbf{A}$ и атомарного n-местного отношения $\mathbf{P}$, а значит $A^{\mathcal{J}} \subseteq T_1^{\mathcal{J}}$ и $P^{\mathcal{J}} \subseteq T_n^{\mathcal{J}}$.

$\mathcal{J} \models (\mathsf{A3})$, так как $\Delta' = T_1^{\mathcal{J}} \cup \ldots T_N^{\mathcal{J}}$ по построению Δ' и $T_n^{\mathcal{J}}$.

$\mathcal{J} \models (\mathsf{A4})$, так как $f_i^{\mathcal{J}}$ всякому элементу $x \in \Delta'$ либо ничего не сопоставляет (если x есть кортеж длины меньшей i), либо сопоставляет единственный элемент — i-ю компоненту (если x есть кортеж длины $\geqslant i$), то есть каждая f_i есть частичная функция.

$\mathcal{J} \models (\mathsf{A5})$, поскольку из того, что $x \in (\forall f_n.\bot)^{\mathcal{J}}$ следует, что $f_n^{\mathcal{J}}$ не определена на x; значит, x есть кортеж длины $< n$, а тогда $f_{n+1}^{\mathcal{J}}$ тем более не определена на x, то есть $x \in (\forall f_{n+1}.\bot)^{\mathcal{J}}$. Обратите внимание, что здесь мы пользовались тем, что множества $T_n^{\mathcal{J}}$ попарно не пересекаются (т.е. если x есть кортеж

[2] Без ограничения общности можно считать, что множества $\Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^N$ попарно не пересекаются. Этого легко достичь, например, следующим рассуждением. Терминология $\mathcal{T}$ является частным случаем теории первого порядка. Поскольку она выполнима, то по теореме Лёвенгейма-Сколема у нее существует не более чем счетная модель, а значит, можно считать, что $\Delta \subseteq \mathbb{N}$. Ясно, что в этом случае множества Δ^n не будут пересекаются.

элементов из Δ некоторой длины, то x не является одновременно кортежем каких-то других элементов из Δ некоторой другой длины).

$\mathcal{J} \models (\mathsf{A6})$ и $\mathcal{J} \models (\mathsf{A7})$, так как по построению каждая функция $f_i^{\mathcal{J}}$ определена на кортежах длины $\geqslant i$ и только на них, а ее значениями являются элементы множества $\Delta = T_1^{\mathcal{J}}$. □

Лемма 11.5.2. *Интерпретации $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ связаны друг с другом следующим образом:*

- $\sigma(C)^{\mathcal{J}} = C^{\mathcal{I}}$ *для любого $\mathcal{DLR}$-концепта C;*
- $\sigma(R)^{\mathcal{J}} = R^{\mathcal{I}}$ *для любого $\mathcal{DLR}$-отношения R.*

Доказательство. Совместная индукция по построению концептов и отношений логики $\mathcal{DLR}$.

- Для атомарных концептов $\mathbf{A}$ и отношений $\mathbf{P}$, $\top_n$ — по построению $\mathcal{J}$. Например: $\sigma(\mathbf{A})^{\mathcal{J}} = A^{\mathcal{J}} = \mathbf{A}^{\mathcal{I}}$.
- Для пересечения и объединения (как концептов, так и отношений) — тривиально.
- Для отрицания концепта (где третье равенство верно ввиду включения $T_1^{\mathcal{J}} \subseteq \Delta'$):

$$\sigma(\neg C)^{\mathcal{J}} \;=\; \big(T_1 \sqcap \neg\sigma(C)\big)^{\mathcal{J}} \;=\; T_1^{\mathcal{J}} \cap \big(\Delta' \setminus \sigma(C)^{\mathcal{J}}\big) \;=\; T_1^{\mathcal{J}} \setminus \sigma(C)^{\mathcal{J}} \;=\; \top_1^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}} \;=\; (\neg C)^{\mathcal{I}}.$$

- Для отрицания n-местного отношения $(\neg R)$ — аналогично, с заменой C и T_1 на R и T_n.
- Для n-местного отношения $(i/n\colon C)$, где $i \leqslant n$, имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
\sigma(i/n\colon C)^{\mathcal{J}} &\overset{(1)}{=} \big(T_n \sqcap \exists f_i.\sigma(C)\big)^{\mathcal{J}}\\
&\overset{(2)}{=} T_n^{\mathcal{J}} \cap \big\{x \in \Delta' \mid \exists y \in \Delta'\colon\ \langle x, y\rangle \in f_i^{\mathcal{J}} \ \wedge\ y \in \sigma(C)^{\mathcal{J}}\big\}\\
&\overset{(3)}{=} \top_n^{\mathcal{I}} \cap \big\{x \in \Delta' \mid \exists y \in \Delta'\colon\ f_i^{\mathcal{J}}(x) = y \ \wedge\ y \in C^{\mathcal{I}}\big\}\\
&\overset{(4)}{=} \big\{x \in \top_n^{\mathcal{I}} \mid f_i^{\mathcal{J}}(x) \in C^{\mathcal{I}}\big\}\\
&\overset{(5)}{=} \big\{\langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in \top_n^{\mathcal{I}} \mid e_i \in C^{\mathcal{I}}\big\} \overset{(6)}{=} (i/n\colon C)^{\mathcal{I}}.
\end{aligned}$$

Здесь равенство (1) по определению перевода σ; (2) по определению $\mathcal{ALCIQ}$-семантики; (3) по предположению индукции для $\top_n$ и C, а также ввиду того, что $f_i^{\mathcal{J}}$ есть функция; (4) очевидно; (6) по определению $\mathcal{DLR}$-семантики. Докажем равенство (5):

($\subseteq$) если $x \in \top_n^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^n$, то x есть кортеж $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ из n элементов множества Δ, при этом по построению функции $f_i^{\mathcal{J}}$ имеем: $e_i = f_i^{\mathcal{J}}(x) \in C^{\mathcal{I}}$;

($\supseteq$) если дан кортеж $\vec{e} = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in \top_n^{\mathcal{I}}$, то положим $x := \vec{e}$, тогда $f_i^{\mathcal{J}}(x) = e_i \in C^{\mathcal{I}}$.

- Для концепта вида $(\exists[i]R)$, где R есть n-местное отношение, имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
\sigma(\exists[i]R)^{\mathcal{J}} \overset{(1)}{=} \big(\exists f_i^{-}.\sigma(R)\big)^{\mathcal{J}} &\overset{(2)}{=} \big\{y \in \Delta' \mid \exists x \in \Delta'\colon\ \langle y, x\rangle \in (f_i^{-})^{\mathcal{J}} \ \wedge\ x \in \sigma(R)^{\mathcal{J}}\big\}\\
&\overset{(3)}{=} \big\{y \in \Delta' \mid \exists x \in \Delta'\colon\ f_i^{\mathcal{J}}(x) = y \ \wedge\ x \in R^{\mathcal{I}}\big\}\\
&\overset{(4)}{=} \big\{y \in \Delta' \mid \exists x \in R^{\mathcal{I}}\colon\ f_i^{\mathcal{J}}(x) = y\big\}\\
&\overset{(5)}{=} \big\{y \in \Delta \mid \exists\langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in R^{\mathcal{I}}\colon\ e_i = y\big\} \overset{(6)}{=} (\exists[i]R)^{\mathcal{I}}.
\end{aligned}$$

Здесь равенство (1) по определению перевода σ; (2) по определению $\mathcal{ALCIQ}$-семантики; (3) по предположению индукции для R, а также ввиду того, что $f_i^{\mathcal{J}}$ есть функция; (4) ввиду $R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^n \subseteq \Delta'$; (6) по определению $\mathcal{DLR}$-семантики. Докажем равенство (5):

($\subseteq$) если $y \in \Delta'$ и $f_i^{\mathcal{J}}(x) = y$, то $y \in T_1^{\mathcal{J}} = \Delta$ (так как область значений функции $f_i^{\mathcal{J}}$ содержится в Δ по лемме 11.3). Далее, так как $x \in R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^n$, то x есть кортеж $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$; при этом его i-я компонента есть $e_i = f_i^{\mathcal{J}}(x) = y$.

($\supseteq$) если дан кортеж $\vec{e} = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in R^{\mathcal{I}}$, то положим $x := \vec{e}$, тогда $f_i^{\mathcal{J}}(x) = e_i = y$.

- Для концепта вида $(\geqslant k\,[i]R)$ доказательство по существу повторяет предыдущее с заменой $\exists$ на $\geqslant k$ и с одним небольшим отличием. В равенстве (5) нам теперь требуется установить не просто эквивалентность $\exists x(\ldots) \Leftrightarrow \exists\vec{e}(\ldots)$, а нечто большее — что количество таких x равно количеству таких $\vec{e}$. Но в точности это и было установлено выше при доказательстве равенства (5), а именно, что для каждого $y \in \Delta'$ мы доказали, что следующие множества равны (а значит, и равномощны):

$$\begin{aligned}
M_1(y) &= \big\{\, x \in R^{\mathcal{I}}\colon\ f_i^{\mathcal{J}}(x) = y \,\big\},\\
M_2(y) &= \big\{\, \langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in R^{\mathcal{I}}\colon\ e_i = y \,\big\}.
\end{aligned}$$

Учитывая также, что для любого $y \in \Delta' \setminus \Delta$ оба эти множества пусты, мы окончательно получаем:

$$\sigma(\geqslant k\,[i]R)^{\mathcal{J}} \;=\; \big\{\, y \in \Delta' \mid \sharp M_1(y) \geqslant k \,\big\} \;=\; \big\{\, y \in \Delta \mid \sharp M_2(y) \geqslant k \,\big\} \;=\; (\geqslant k\,[i]R)^{\mathcal{I}}.$$

Лемма доказана. □

Поскольку в $\mathcal{I}$ были верны все аксиомы $C \sqsubseteq D$ и $R \sqsubseteq S$ из терминологии $\mathcal{T}$, то в силу леммы 11.5.2 в $\mathcal{J}$ верны их переводы $\sigma(C) \sqsubseteq \sigma(D)$ и $\sigma(R) \sqsubseteq \sigma(S)$, а значит $\mathcal{J}$ является моделью $\sigma(\mathcal{T})$. Кроме того, в $\mathcal{J}$ верны также аксиомы реификации TRe по лемме 11.5.1. Таким образом, $\mathcal{J} \models \pi(\mathcal{T})$, что и требовалось.

($\Leftarrow$) Пусть терминология $\pi(\mathcal{T})$ имеет модель $\mathcal{J} = (\Delta', \cdot^{\mathcal{J}})$. В частности, в $\mathcal{J}$ верны аксиомы реификации TRe. Тогда, пользуясь леммой о регуляризации 11.4, мы можем без ограничения общности считать, что $\mathcal{J}$ — регулярная модель терминологии $\pi(\mathcal{T})$.

Построим модель $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$ терминологии $\mathcal{T}$ следующим образом (где $2 \leqslant n \leqslant N$):

$$\begin{array}{llll} \Delta & := T_1^{\mathcal{J}}, & \qquad \top_n^{\mathcal{I}} & := \{\, \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in T_n^{\mathcal{J}} \,\}, \\ \mathbf{A}^{\mathcal{I}} & := A^{\mathcal{J}}, & \qquad \mathbf{P}^{\mathcal{I}} & := \{\, \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in P^{\mathcal{J}} \,\}. \end{array}$$

Поскольку $\mathcal{J} \models \mathsf{TRe}$, то все $f_i^{\mathcal{J}}$ — частичные функции, а вектор-функции $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(\cdot)$ определены на $T_n^{\mathcal{J}}$ и выдают значения из $(T_1^{\mathcal{J}})^n = \Delta^n$. Поэтому $\top_n^{\mathcal{I}}$ и $\mathbf{P}^{\mathcal{I}}$ определены корректно. Кроме того, из $\mathcal{J} \models A \sqsubseteq T_1$ и $\mathcal{J} \models P \sqsubseteq T_n$ следует, что $\mathbf{A}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta$ и $\mathbf{P}^{\mathcal{I}} \subseteq \top_n^{\mathcal{I}}$. Значит, $\mathcal{I}$ является $\mathcal{DLR}$-интерпретацией; в частности, имеет место $\mathcal{I} \models R \sqsubseteq \top_n$ для любого (не только атомарного) n-местного отношения R. Кроме того, легко доказать индукцией по построению n-местного отношения R, что $\mathcal{J} \models \sigma(R) \sqsubseteq T_n$; следовательно, вектор-функция $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(\cdot)$ определена на любом $x \in \sigma(R)^{\mathcal{J}}$ (это требуется во втором пункте нижеследующей леммы).

Лемма 11.6. *Интерпретации $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ связаны друг с другом следующим образом:*
- $C^{\mathcal{I}} = \sigma(C)^{\mathcal{J}}$ *для любого $\mathcal{DLR}$-концепта C;*
- $R^{\mathcal{I}} = \{\, \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in \sigma(R)^{\mathcal{J}} \,\}$ *для любого n-местного $\mathcal{DLR}$-отношения R.*

Доказательство. Совместная индукция по построению концептов и отношений логики $\mathcal{DLR}$.
- Для атомарных концептов $\mathbf{A}$ и отношений $\mathbf{P}, \top_n$ — по построению $\mathcal{J}$.
- Для пересечения и объединения (как концептов, так и отношений) — тривиально.
- Для отрицания концепта имеем (четвертое равенство верно ввиду включения $\Delta \subseteq \Delta'$):

$$\sigma(\neg C)^{\mathcal{J}} \;=\; \big(T_1 \sqcap \neg\sigma(C)\big)^{\mathcal{J}} \;=\; T_1^{\mathcal{J}} \cap \big(\Delta' \setminus \sigma(C)^{\mathcal{J}}\big) \;=\; \Delta \cap \big(\Delta' \setminus C^{\mathcal{I}}\big) \;=\; \Delta \setminus C^{\mathcal{I}} \;=\; (\neg C)^{\mathcal{I}}.$$

- Для отрицания n-местного отношения $(\neg R)$ имеем цепочку равенств (третье ввиду $T_n^{\mathcal{J}} \subseteq \Delta'$):

$$\sigma(\neg R)^{\mathcal{J}} \;=\; \big(T_n \sqcap \neg\sigma(R)\big)^{\mathcal{J}} \;=\; T_n^{\mathcal{J}} \cap \big(\Delta' \setminus \sigma(R)^{\mathcal{J}}\big) \;=\; T_n^{\mathcal{J}} \setminus \sigma(R)^{\mathcal{J}}.$$

Пользуясь ею, доказываем требуемое равенство $(\neg R)^{\mathcal{I}} = \{\, \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in \sigma(\neg R)^{\mathcal{J}} \,\}$ следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} \vec{e} \in (\neg R)^{\mathcal{I}} = \top_n^{\mathcal{I}} \setminus R^{\mathcal{I}} & \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} & \vec{e} \in \top_n^{\mathcal{I}} \;\wedge\; \vec{e} \notin R^{\mathcal{I}} \\ & \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} & \exists x \in T_n^{\mathcal{J}}\colon\ \vec{e} = \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \;\wedge\; \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \notin R^{\mathcal{I}} \\ & \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} & \exists x \in T_n^{\mathcal{J}}\colon\ \vec{e} = \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \;\wedge\; x \notin \sigma(R)^{\mathcal{J}} \\ & \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} & \exists x \in \sigma(\neg R)^{\mathcal{J}}\colon\ \vec{e} = \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \\ & \overset{(5)}{\Longleftrightarrow} & \vec{e} \in \big\{\, \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in \sigma(\neg R)^{\mathcal{J}} \,\big\} \end{array}$$

Здесь (1) и (5) очевидны; (2) по построению $\top_n^{\mathcal{I}}$; (3) по предположению индукции для R; (4) по доказанному выше равенству для $\sigma(\neg R)^{\mathcal{J}}$.
- Для n-местного отношения $(i/n\colon C)$, где $i \leqslant n$, имеем цепочку эквивалентностей:

$$\begin{array}{rcl} x \in \sigma(i/n\colon C)^{\mathcal{J}} = \big(T_n \sqcap \exists f_i.\sigma(C)\big)^{\mathcal{J}} & \Longleftrightarrow & x \in T_n^{\mathcal{J}} \;\wedge\; \exists y \in \Delta'\colon\ \langle x, y\rangle \in f_i^{\mathcal{J}} \;\wedge\; y \in \sigma(C)^{\mathcal{J}} \\ & \Longleftrightarrow & x \in T_n^{\mathcal{J}} \;\wedge\; \exists y \in \Delta'\colon\ f_i^{\mathcal{J}}(x) = y \;\wedge\; y \in \sigma(C)^{\mathcal{J}} \\ & \Longleftrightarrow & x \in T_n^{\mathcal{J}} \;\wedge\; f_i^{\mathcal{J}}(x) \in \sigma(C)^{\mathcal{J}}. \end{array}$$

Пользуясь ею, докажем требуемое равенство $(i/n\colon C)^{\mathcal{I}} = \big\{ \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in \sigma(i/n\colon C)^{\mathcal{J}} \big\}$ следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} (i/n\colon C)^{\mathcal{I}} & \overset{(1)}{=} & \big\{ \langle e_1, \ldots, e_n\rangle \in \top_n^{\mathcal{I}} \mid e_i \in C^{\mathcal{I}} \big\} \\ & \overset{(2)}{=} & \big\{ \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in T_n^{\mathcal{J}} \wedge f_i^{\mathcal{J}}(x) \in \sigma(C)^{\mathcal{J}} \big\} \\ & \overset{(3)}{=} & \big\{ \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in \sigma(i/n\colon C)^{\mathcal{J}} \big\} \end{array}$$

Здесь (1) по определению $\mathcal{DLR}$-семантики; (2) следует из равенств $\top_n^{\mathcal{I}} = \{\, \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x) \mid x \in T_n^{\mathcal{J}} \,\}$ (по построению $\top_n^{\mathcal{I}}$) и $C^{\mathcal{I}} = \sigma(C)^{\mathcal{J}}$ (по предположению индукции для C); (3) по доказанной выше эквивалентности.
- Для концепта вида $(\exists[i]R)$, где R есть n-местное отношение, имеем цепочку равенств:

$$\begin{array}{rcl}\sigma(\exists[i]R)^{\mathcal{J}} \overset{(1)}{=} \big(\exists f_i^-.\sigma(R)\big)^{\mathcal{J}} & \overset{(2)}{=} & \big\{y\in\Delta' \mid \exists x\in\Delta'\colon\ \langle y,x\rangle\in(f_i^-)^{\mathcal{J}}\ \wedge\ x\in\sigma(R)^{\mathcal{J}}\big\}\\ & \overset{(3)}{=} & \big\{y\in\Delta' \mid \exists x\in\sigma(R)^{\mathcal{J}}\colon\ f_i^{\mathcal{J}}(x)=y\big\}\\ & \overset{(4)}{=} & \big\{y\in\Delta \mid \exists\vec{e}=\langle e_1,\dots,e_n\rangle\in R^{\mathcal{I}}\colon\ e_i=y\big\} \overset{(5)}{=} (\exists[i]R)^{\mathcal{I}}.\end{array}$$

Здесь равенство (1) по определению перевода σ; (2) по определению $\mathcal{ALCIQ}$-семантики; (3) ввиду того, что $f_i^{\mathcal{J}}$ есть функция, а также $\sigma(R)^{\mathcal{J}}\subseteq\Delta'$; (5) по определению $\mathcal{DLR}$-семантики. Докажем равенство (4):

($\subseteq$) *Как по x построить $\vec{e}$?* Положим $\vec{e}:=\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)$. Тогда из того, что $x\in\sigma(R)^{\mathcal{J}}$, по предположению индукции вытекает, что $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)\in R^{\mathcal{I}}$, то есть $\vec{e}\in R^{\mathcal{I}}$. Кроме того, $e_i=f_i^{\mathcal{J}}(x)=y$.

($\supseteq$) *Как по $\vec{e}$ построить x?* Пусть $\vec{e}\in R^{\mathcal{I}}$. По предположению индукции $R^{\mathcal{I}}=\{\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)\mid x\in\sigma(R)^{\mathcal{J}}\}$. Значит, $\exists x\in\sigma(R)^{\mathcal{J}}\colon \vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)=\vec{e}$. В частности, $f_i^{\mathcal{J}}(x)=e_i=y$.

• Для концепта вида $(\geqslant k\,[i]R)$, где R есть n-местное отношение, нужно выписать цепочку равенств как в предыдущем пункте, с заменой $\exists$ на $\geqslant k$. Однако теперь в равенстве (4) требуется установить не просто эквивалентность $\exists x(\dots)\Leftrightarrow\exists\vec{e}(\dots)$, а нечто большее — что количество таких x равно количеству таких $\vec{e}$. Более точно, нужно доказать, что для каждого $y\in\Delta'$ следующие множества равномощны:

$$\begin{array}{rcl}M_1(y) & = & \big\{\,x\in\sigma(R)^{\mathcal{J}}\colon\ f_i^{\mathcal{J}}(x)=y\,\big\}\\ M_2(y) & = & \big\{\,\vec{e}=\langle e_1,\dots,e_n\rangle\in R^{\mathcal{I}}\colon\ e_i=y\,\big\}.\end{array}$$

Доказав это и учитывая, что для любого $y\in\Delta'\setminus\Delta$ оба эти множества пусты, мы окончательно получим:

$$\sigma(\geqslant k\,[i]R)^{\mathcal{J}} = \big\{\,y\in\Delta' \mid \sharp M_1(y)\geqslant k\,\big\} = \big\{\,y\in\Delta \mid \sharp M_2(y)\geqslant k\,\big\} = (\geqslant k\,[i]R)^{\mathcal{I}}.$$

Докажем, что функция $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}\colon M_1(y)\to M_2(y)$ является биекцией.

функциональность: следует из того, что в $\mathcal{J}$ верна аксиома (A4) $\top\sqsubseteq(\leqslant 1\,f_i)$.

тотальность: докажем, что $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}$ определена на любом $x\in M_1(y)$ и ее значение принадлежит $M_2(y)$.

Действительно, если $x\in M_1(y)$, то $x\in\sigma(R)^{\mathcal{J}}$. По замечанию перед леммой, $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)$ определено. По предположению индукции $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)\in R^{\mathcal{I}}$. Обозначив $\vec{e}=\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)$, мы получаем, что $\vec{e}\in R^{\mathcal{I}}$, а также $e_i=f_i^{\mathcal{J}}(x)=y$. Таким образом, $\vec{f}_n^{\mathcal{J}}(x)\in M_2(y)$.

инъективность: это есть *условие регулярности*[3] модели $\mathcal{J}$, ограниченное на множество $\sigma(R)^{\mathcal{J}}\subseteq T_n^{\mathcal{J}}$.

сюръективность: доказана в пункте «*Как по $\vec{e}$ построить x?*» выше.

Лемма доказана. ☐

Согласно лемме 11.6, из того, что $\mathcal{J}\models\sigma(\mathcal{T})$, вытекает $\mathcal{I}\models\mathcal{T}$. Теорема доказана. ☐

11.3 Базы знаний в логике $\mathcal{DLR}$

Пусть в языке логики $\mathcal{DLR}$ помимо множеств атомарных концептов CN и отношений RN имеется конечное множество имен индивидов IN.

Определение 11.4. *Системой фактов* или *ABox* называется конечное множество $\mathcal{A}$ *фактов* вида $a\colon C$ и $\vec{a}\colon R$, где $a\in\mathsf{IN}$ есть индивид, C есть $\mathcal{DLR}$-концепт, $\vec{a}$ есть кортеж из n индивидов, R есть n-местное $\mathcal{DLR}$-отношение, где $2\leqslant n\leqslant N$.

Семантика: интерпретация $\mathcal{I}=(\Delta,\cdot^{\mathcal{I}})$ каждому индивиду a сопоставляет элемент $a^{\mathcal{I}}\in\Delta$. Соответственно, всякому кортежу индивидов $\vec{a}=\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ интерпретация $\mathcal{I}$ сопоставляет кортеж элементов $\vec{a}^{\mathcal{I}}=\langle a_1^{\mathcal{I}},\dots,a_n^{\mathcal{I}}\rangle\in\Delta^n$.

Говорим, что факт $a\colon C$ или $\vec{a}\colon R$ *верен* в интерпретации $\mathcal{I}$, если $a^{\mathcal{I}}\in C^{\mathcal{I}}$ или $\vec{a}^{\mathcal{I}}\in R^{\mathcal{I}}$, соответственно. При этом $\mathcal{I}$ называется *моделью* этого факта, что записывается как $\mathcal{I}\models a\colon C$ и $\mathcal{I}\models\vec{a}\colon R$, соответственно.

Интерпретация $\mathcal{I}$ называется *моделью* ABox-а $\mathcal{A}$, если в $\mathcal{I}$ верны все факты из $\mathcal{A}$. ABox $\mathcal{A}$ называется *выполнимым* (относительно терминологии $\mathcal{T}$), если существует модель ABox-а $\mathcal{A}$ (являющаяся одновременно моделью терминологии $\mathcal{T}$).

Определение 11.5. *База знаний* в логике $\mathcal{DLR}$ — это пара $\mathcal{K}=(\mathcal{T},\mathcal{A})$, где $\mathcal{T}$ — терминология (TBox), а $\mathcal{A}$ — система фактов (ABox). Интерпретация $\mathcal{I}$ называется *моделью* базы знаний $\mathcal{K}$ (пишем: $\mathcal{I}\models\mathcal{K}$), если $\mathcal{I}$ является моделью $\mathcal{T}$ и $\mathcal{A}$. База знаний называется *выполнимой*, если у нее существует модель.

[3] Это единственное место, где требуется регулярность модели $\mathcal{J}$.

11.4 Перевод баз знаний $\mathcal{DLR}$ в базы знаний $\mathcal{ALCIQ}$

Мы покажем, что базы знаний $\mathcal{DLR}$ тоже сводятся к базам знаний $\mathcal{ALCIQ}$. Пусть $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ есть база знаний $\mathcal{DLR}$. Выше мы уже ввели перевод $\mathcal{DLR}$-концептов C и отношений R в $\mathcal{ALCIQ}$-концепты $\sigma(C)$ и $\sigma(R)$, а также перевод $\mathcal{DLR}$-терминологии $\mathcal{T}$ в $\mathcal{ALCIQ}$-терминологию $\sigma(\mathcal{T})$. Добавлением к последнему системы аксиом реификации TRe мы получили $\mathcal{ALCIQ}$-терминологию $\pi(\mathcal{T})$. Теперь рассмотрим ABox $\mathcal{A}$.

Каждому $\mathcal{DLR}$-индивиду $a \in \mathsf{IN}$ сопоставим его же в качестве $\mathcal{ALCIQ}$-индивида $a \in \mathsf{IN}'$. Для каждого кортежа индивидов $\vec{a}$ длины $|\vec{a}| \geqslant 2$, встречающегося в $\mathcal{A}$, вводим новый $\mathcal{ALCIQ}$-индивид $b_{\vec{a}} \in \mathsf{IN}'$. Итак,

$$\mathsf{IN}' = \mathsf{IN} \cup \{\, b_{\vec{a}} \mid \vec{a} \text{ встречается в } \mathcal{A}\,\}.$$

Факты вида $a\colon C$ и $\vec{a}\colon R$, где R есть n-местное отношение и $|\vec{a}| = n$, переводим в следующие $\mathcal{ALCIQ}$-факты:

$$\begin{array}{rcl} \sigma(a\colon C) & = & a\colon \sigma(C), \\ \sigma(\vec{a}\colon R) & = & b_{\vec{a}}\colon \sigma(R). \end{array}$$

Перевод ABox $\mathcal{A}$ получается объединением переводов всех его фактов:

$$\sigma(\mathcal{A}) \;=\; \{\, \sigma(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}\,\}.$$

11.4.1 ABox реификации и регулярные модели

Как и в случае терминологий, чтобы перевод корректно работал, нужно расширить $\sigma(\mathcal{A})$ дополнительными утверждениями; они тоже будут иметь вид фактов ABox логики $\mathcal{ALCIQ}$. Для каждого индивида $a \in \mathsf{IN}$ языка $\mathcal{DLR}$ вводим в языке $\mathcal{ALCIQ}$ атомарный концепт $B_a \in \mathsf{CN}'$. Далее полагаем (где запись $a \in \mathcal{A}$ и $\vec{a} \in \mathcal{A}$ означает, что индивид a и кортеж индивидов $\vec{a}$ встречается в $\mathcal{A}$):

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ARe} & = & \{\ \langle b_{\vec{a}}, a_i\rangle\colon f_i \ \mid\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ \vec{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathcal{A}\ \} \\ & \cup & \{\ a\colon B_a \ \mid\ a \in \mathcal{A}\ \} \ \cup\ \{\ b_{\vec{a}}\colon T_n \ \mid\ \vec{a} \in \mathcal{A}\ \} \\ & \cup & \{\ a_1\colon \leqslant 1\, f_1^-.(T_n \sqcap \exists f_2.B_{a_2} \sqcap \ldots \sqcap \exists f_n.B_{a_n}) \ \mid\ \vec{a} \in \mathcal{A}\ \}. \end{array}$$

Факт в последней строке на самом деле есть условие регулярности для кортежей индивидов: он утверждает, что для всякого кортежа $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ из $\mathcal{A}$ существует не более одного элемента в T_n, «представляющего» (в смысле функций f_i) данный кортеж.

Положим $\mathsf{KRe} = (\mathsf{TRe}, \mathsf{ARe})$. Это база знаний в логике $\mathcal{ALCIQ}$, и она «постоянна» — не зависит от базы знаний $\mathcal{K}$ логики $\mathcal{DLR}$. Следующая лемма относится исключительно к логике $\mathcal{ALCIQ}$ (и не зависит от перевода $\mathcal{DLR}$ в $\mathcal{ALCIQ}$); она будет использоваться в доказательстве основной теоремы 11.8.

Лемма 11.7. *(О регуляризации) Для любой модели $\mathcal{I} \models \mathsf{KRe}$ существует регулярная модель $\mathcal{J} \models \mathsf{KRe}$, в которой верны все аксиомы и факты в языке $\mathcal{ALCIQ}$, верные в $\mathcal{I}$.*

Доказательство. Следуем доказательству леммы о регуляризации 11.7 с небольшими изменениями.

Пусть $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{J}})$ — нерегулярная модель аксиом TRe. Строим $D_{\vec{c}}$ как и ранее. Далее мы хотим гарантировать, чтобы во множестве Conf не было элементов, являющихся интерпретациями какого-либо индивидов. В этом нам поможет следующее наблюдение.

Факт 0. *Пусть $\vec{a}, \vec{c} \in \mathcal{A}$, $|\vec{a}| = |\vec{c}| = n \geqslant 2$. Тогда элементы $b_{\vec{a}}$ и $b_{\vec{c}}$ не конфликтуют в $\mathcal{I}$.*

$\rhd$ Допустим противное: $b_{\vec{a}}^{\mathcal{I}} \neq b_{\vec{c}}^{\mathcal{I}}$, но $\vec{f}_n^{\mathcal{I}}(b_{\vec{a}}^{\mathcal{I}}) = \vec{f}_n^{\mathcal{I}}(b_{\vec{c}}^{\mathcal{I}})$. Согласно фактам из ARe, верным в $\mathcal{I}$, имеем $f_i^{\mathcal{I}}(b_{\vec{a}}^{\mathcal{I}}) = a_i^{\mathcal{I}}$ и $f_i^{\mathcal{I}}(b_{\vec{c}}^{\mathcal{I}}) = c_i^{\mathcal{I}}$. Значит, $a_i^{\mathcal{I}} = c_i^{\mathcal{I}}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

Обозначим концепт $B_{\vec{a}} = (T_n \sqcap \exists f_2.B_{a_2} \sqcap \ldots \sqcap \exists f_n.B_{a_n})$. В $\mathcal{I}$ верны факты: $a_i\colon B_{a_i}$, $b_{\vec{a}}\colon T_n$, $\langle b_{\vec{a}}, a_i\rangle\colon f_i$. Из них следует, что $b_{\vec{a}}^{\mathcal{I}} \in B_{\vec{a}}^{\mathcal{I}}$. Аналогичные факты для $\vec{c}$ вместе с доказанным равенством $a_i^{\mathcal{I}} = c_i^{\mathcal{I}}$ влекут: $b_{\vec{c}}^{\mathcal{I}} \in B_{\vec{a}}^{\mathcal{I}}$. Таким образом, элемент $a_1^{\mathcal{I}} = c_1^{\mathcal{I}}$ связан отношением $(f_1^-)^{\mathcal{I}}$ с двумя *различными* элементами $b_{\vec{a}}^{\mathcal{I}}$ и $b_{\vec{c}}^{\mathcal{I}}$, лежащими в $B_{\vec{a}}^{\mathcal{I}}$. Это противоречит факту $a_1\colon \leqslant 1\, f_1^-.B_{\vec{a}}$, верному в $\mathcal{I}$. $\lhd$

Итак, в каждом множестве $D_{\vec{c}}$ имеется не более одного элемента, являющегося интерпретацией какого-либо (быть может не одного) индивида из ARe. Если таковой имеется, то берем именно его в качестве $d_{\vec{c}}$; иначе в качестве $d_{\vec{c}}$ берем, как и ранее, любой элемент из $D_{\vec{c}}$. Далее строим Conf как и прежде, и замечаем, что для любого индивида $b \in \mathsf{CN}'$ имеем $b^{\mathcal{I}} \notin \mathsf{Conf}$.

Дальнейшую конструкцию (сначала $\mathcal{I}'$, затем $\mathcal{J}$) проводим дословно как в лемме 11.7 (забыв временно про интерпретацию индивидов) и доказываем факты 1–5. Теперь интерпретируем индивиды в $\mathcal{J}$, задавая им значения, например, из $\varnothing$-галактики: если $b^{\mathcal{I}} = x$, то $b^{\mathcal{J}} := x_{\varnothing}$, для любого индивида $b \in \mathsf{CN}'$.

Факт 6. *$\mathcal{J}$ является моделью всех $\mathcal{ALCIQ}$-фактов, верных в $\mathcal{I}$.*

$\rhd$ При доказательстве Факта 5 было, в частности, установлено: $\forall c \in \Delta\colon x \in C^{\mathcal{I}} \Rightarrow \forall p \subseteq \mathsf{Conf}\colon x_p \in C^{\mathcal{J}}$.

Для фактов вида $b\colon C$ имеем: если $\mathcal{I} \models b\colon C$, то обозначив $x = b^{\mathcal{I}}$, получим $b^{\mathcal{J}} = x_{\varnothing} \in C^{\mathcal{J}}$, т.е. $\mathcal{J} \models b\colon C$.

Для фактов же вида $\langle b, b' \rangle : f_i$ утверждение почти очевидно: пусть $\mathcal{I} \models \langle b, b' \rangle : f_i$. Тогда это же верно для $\mathcal{I}_\varnothing$. Если обозначить $x = b^\mathcal{I}$, то по построению имеем $x \notin \mathsf{Conf}$, значит, при построении модели $\mathcal{J}$ из $\mathcal{I}'$ значение f_1 (а тем более f_i для $i \geqslant 2$) в точке $x_\varnothing$ не менялось. Поэтому $\mathcal{J} \models \langle b, b' \rangle : f_i$. ◁

Итак, $\mathcal{J}$ — регулярная модель всех аксиом и фактов, верных в $\mathcal{I}$. Лемма доказана. ◀

Замечание 11.1. Факты $b_{\vec{a}} : T_n$ были помещены в ARe лишь для того, чтобы отдельно иметь набор фактов, не зависящий от перевода ABox $\mathcal{A}$. Вместе же с переводом $\sigma(\mathcal{A})$ они будут лишними, поскольку следуют из факта $b_{\vec{a}} : \sigma(R)$ и включения $\sigma(R) \sqsubseteq T_n$ (которое вытекает из аксиом реификации TRe). Не нужно ли добавить аксиомы $B_a \sqsubseteq T_1$? Либо хотя бы $a : T_1$?

11.4.2 Теорема о реификации баз знаний $\mathcal{DLR}$

Теперь полагаем $\pi(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \mathsf{ARe}$. Наконец, для базы знаний $\mathcal{K}$ полагаем $\pi(\mathcal{K}) = \langle \pi(\mathcal{T}), \pi(\mathcal{A}) \rangle$. В других обозначениях: $\pi(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{T}, \mathcal{A}) \cup \mathsf{KRe}$, откуда видно, что база знаний $\pi(\mathcal{K})$ состоит из «переменной» и «постоянной» части. Очевидно, что $\pi(\mathcal{K})$ является базой знаний в логике $\mathcal{ALCIQ}$. Мы готовы сформулировать основной результат.

Теорема 11.8 (О реификации баз знаний $\mathcal{DLR}$)**.** *Для всякой $\mathcal{DLR}$-базы знаний $\mathcal{K}$ справедливо:*

$$\mathcal{K} \text{ выполнима} \iff \pi(\mathcal{K}) \text{ выполнима.}$$

Доказательство. Следуем доказательству теоремы 11.5 с необходимыми дополнениями.

($\Rightarrow$) Имея модель $\mathcal{I}$ базы знаний $\mathcal{K}$, строим модель $\mathcal{J}$ как и раньше, и дополняем ее интерпретацией новых элементов: для каждого «старого» индивида $a \in \mathsf{IN}$ полагаем $a^\mathcal{J} := a^\mathcal{I}$ и $B_a^\mathcal{I} := \{a^\mathcal{I}\}$; для каждого «нового» индивида $b_{\vec{a}}$, где $\vec{a} \in \mathcal{A}$, полагаем $b_{\vec{a}}^\mathcal{J} := \vec{a}^\mathcal{I}$ (тем самым $b_{\vec{a}}^\mathcal{J} \in \Delta^n \subseteq \Delta'$).

Покажем, что $\mathcal{J} \models \pi(\mathcal{A})$, пользуясь леммой 11.5.2.

Для фактов вида $a : C$ из $\mathcal{A}$ имеем: так как $\mathcal{I} \models a : C$, то $a^\mathcal{J} = a^\mathcal{I} \in C^\mathcal{I} = \sigma(C)^\mathcal{J}$, то есть $\mathcal{J} \models \sigma(a : C)$.

Для фактов вида $\vec{a} : R$ из $\mathcal{A}$ имеем: так как $\mathcal{I} \models \vec{a} : R$, то $b_{\vec{a}}^\mathcal{J} = \vec{a}^\mathcal{I} \in R^\mathcal{I} = \sigma(R)^\mathcal{J}$, то есть $\mathcal{J} \models \sigma(\vec{a} : R)$.

В частности, $\mathcal{J} \models b_{\vec{a}} : T_n$, поскольку $\mathcal{J} \models \sigma(R) \sqsubseteq T_n$ по лемме 11.3.

Очевидно, что $\mathcal{J} \models a : B_a$ для любого индивида $a \in \mathsf{IN}$.

Кроме того, $\mathcal{J} \models \langle b_{\vec{a}}, a_i \rangle : f_i$, поскольку $f_i^\mathcal{J}(b_{\vec{a}}^\mathcal{J}) = f_i^\mathcal{J}(\vec{a}^\mathcal{I}) = a_i$ по построению функций $f_i^\mathcal{J}$.

Наконец, докажем, что $\mathcal{J} \models a_1 : \leqslant 1\, f_1^-.(T_n \sqcap \exists f_2.B_{a_2} \sqcap \ldots \sqcap \exists f_n.B_{a_n})$ для всякого кортежа $\vec{a} \in \mathcal{A}$. Возьмем произвольный $x \in \Delta'$ такой что $f_1^\mathcal{J}(x) = a_1^\mathcal{J}$, $x \in T_n^\mathcal{J}$ и $x \in (\exists f_i.B_{a_i})^\mathcal{J}$, то есть (ввиду одноэлементности множеств $B_{a_i}^\mathcal{J}$) $f_i^\mathcal{J}(x) = a_i^\mathcal{J}$, для всех $2 \leqslant i \leqslant n$. Требуется доказать, что элемент x с такими свойствами единственен. Это легко видеть: поскольку $x \in T_n^\mathcal{J} = \Delta^n$, то $x = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, где $e_i \in \Delta$. А ввиду соотношений $f_i^\mathcal{J}(x) = a_i^\mathcal{J}$ (для всех $1 \leqslant i \leqslant n$) элементы e_i определяются однозначно: $e_i = a_i^\mathcal{J}$, тем самым $x = \vec{a}^\mathcal{J}$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{J} \models \pi(\mathcal{K})$. Ввиду леммы о регуляризации 11.7 мы можем считать, без ограничения общности, что $\mathcal{J}$ — регулярная модель. Строим модель $\mathcal{I}$ как и раньше, и интерпретируем индивиды в ней: $a^\mathcal{I} := a^\mathcal{J}$ для всех $a \in \mathsf{IN}$. Прежде всего докажем, что интерпретация индивидов задана корректно, то есть $a^\mathcal{I} \in \Delta$. Напомним, что по построению $\Delta = T_1^\mathcal{J}$. Значит, требуется доказать, что $\mathcal{J} \models a : T_1$.

Это очевидно в случае, если в $\mathcal{A}$ имеется аксиома $a : C$. Действительно, из $\mathcal{J} \models \pi(\mathcal{K})$ вытекает, в частности, что $\mathcal{J} \models a : \sigma(C)$. Но по лемме 11.3 имеем $\mathcal{J} \models \sigma(C) \sqsubseteq T_1$, откуда и следует требуемое утверждение.

Если же индивид a встречается в $\mathcal{A}$ лишь в утверждении $\vec{a} : R$, скажем, $a = a_i$, то рассуждаем следующим образом. Из $\mathcal{J} \models \pi(\mathcal{K})$ вытекает, в частности, что $\mathcal{J} \models \langle b_{\vec{a}}, a_i \rangle : f_i$. Согласно лемме 11.3, $f_i^\mathcal{J}$ является функцией со значениями в $T_1^\mathcal{J}$. Значит, элемент $a_i^\mathcal{J}$, являясь значением этой функции (на элементе $b_{\vec{a}}^\mathcal{J}$), принадлежит множеству $T_1^\mathcal{J}$, что и требовалось.

Итак, $\mathcal{I}$ является $\mathcal{ALCIQ}$-интерпретацией. Остается доказать, что $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$, пользуясь леммой 11.6.

Для фактов вида $a : C$ из $\mathcal{A}$ имеем: $a^\mathcal{I} = a^\mathcal{J} \in \sigma(C)^\mathcal{J} = C^\mathcal{I}$.

Для фактов вида $\vec{a} : R$ из $\mathcal{A}$ имеем: $\mathcal{J} \models b_{\vec{a}} : \sigma(R)$. Обозначим $x := b_{\vec{a}}^\mathcal{J}$, тогда $x \in \sigma(R)^\mathcal{J}$, откуда $\vec{f}_n^\mathcal{J}(x) \in R^\mathcal{I}$. Так как $\mathcal{J} \models \langle b_{\vec{a}}, a_i \rangle : f_i$, то $f_i^\mathcal{J}(x) = a_i^\mathcal{J} = a_i^\mathcal{I}$. Тем самым $\vec{a}^\mathcal{I} = \vec{f}_n^\mathcal{J}(x) \in R^\mathcal{I}$, и значит, $\mathcal{I} \models \vec{a} : R$.

Теорема доказана. ◀

Из того, что в $\mathcal{ALCIQ}$ проблемы выполнимости терминологий и баз знаний ExpTime-полны, следует:

Следствие 11.9. *Проблема совместности терминологий в логике $\mathcal{DLR}$ является* ExpTime*-полной.*

Проблема совместности баз знаний в логике $\mathcal{DLR}$ является ExpTime*-полной.*

Упражнение 11.2. Что будет, если убрать из языка $\mathcal{DLR}$ отношения $\top_n$? Формально: интерпретацию $\mathcal{I}$ назовем *декартовой*, если $\top_n^\mathcal{I} = \Delta^n$ для всех $n \geqslant 2$. Терминологию назовем *декартово выполнимой*, если у нее существует декартова модель.

Верно ли, что если $\mathcal{DLR}$-терминология $\mathcal{T}$ выполнима, то она декартово выполнима? Если нет, сводится ли декартова выполнимость к обычной? Разрешима ли она?

Докажите, что если $\mathcal{T}$ декартово выполнима, то выполнима терминология $\mathcal{T} \cup \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ есть набор следующих аксиом (верно ли обратное?):

$$\top \sqsubseteq \exists[i]\top_n \qquad \text{для всех } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ и } 2 \leqslant n \leqslant N.$$

Упражнение 11.3. 1) Какие аксиомы реификации не были использованы?

2)* Верно ли, что $\mathcal{T}$ декартово выполнима $\Longleftrightarrow \pi(\mathcal{T})$ выполнима? Если нет, можно ли что-то добавить в $\pi(\mathcal{T})$, чтобы это стало верно?

3)* Что будет, если ввести в язык проекции n-местных отношений на m-местные ($m \leqslant n$)? Например, если R есть трехместное отношение, то добавим в язык конструктор $\exists[1,2]R$, семантика которого:

$$(\exists[1,2]R)^{\mathcal{I}} \;=\; \{\, \langle e_1, e_2\rangle \in \Delta^2 \mid \exists e_3 \in \Delta\colon\ \langle e_1, e_2, e_3\rangle \in R^{\mathcal{I}} \,\}.$$

Проекции $\exists[1,3]R$ и $\exists[2,3]R$, а также их обощение на произвольные m компонент ($m < n$) вводятся аналогично. Например, это позволило бы ввести определения $\mathsf{hasMother} \equiv \mathsf{ChildOf}[2,3]$ и $\mathsf{hasFather} \equiv \mathsf{ChildOf}[1,3]$.

Будет ли верна в любой интерпретации аксиома $\exists[1,2]R \sqsubseteq \top_2$? Сводится ли новый язык к $\mathcal{DLR}$? Сводится ли новый язык к $\mathcal{ALCIQ}$ с помощью реификации?