Глава 10

Логика с равенством атрибутов

В рассмотренных ранее логиках роли интерпретировались произвольными двуместными отношениями. Важным классом двуместных отношений являются частичные функции. Напомним, что двуместное отношение $f \subseteq \Delta \times \Delta$ называется *частичной функцией*, если для любых $x, y_1, y_2 \in \Delta$ из того, что $\langle x, y_1 \rangle \in f$ и $\langle x, y_2 \rangle \in f$, следует $y_1 = y_2$. Другими словами, для каждого $x \in \Delta$ если существует y, такой что $\langle x, y \rangle \in f$, то он единственен — и обозначается как $y = f(x)$; в этом случае мы говорим, что f определена в точке x и пишем: $!f(x)$.

Например, роли hasFather и hasMother (при естественной интерпретации) являются функциями, тогда как hasChild не является. Здесь мы рассмотрим логику $\mathcal{ALC}f$, в которой некоторые из ролей, называемые *атрибутами*, интерпретируются исключительно как частичные функции, а также можно строить концепты путем сравнения значений различных атрибутов.

Пусть заданы конечные множества символов: CN — атомарные концепты, RN — атомарные роли, и их подмножество AN $\subseteq$ RN — атомарные *атрибуты*. (Составным) *атрибутом* будем называть произвольную цепочку $f_1 \ldots f_n$ из атомарных атрибутов, где $n \geqslant 1$.

Определение 10.1 (Синтаксис логики $\mathcal{ALC}f$)**.** Концепты логики $\mathcal{ALC}f$ строятся согласно следующему индуктивному определению:

$$\top \mid \bot \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \exists R.C \mid \forall R.C \mid (u = v)$$

Здесь $A \in \mathsf{CN}$, $R \in \mathsf{RN}$, C, D — произвольные концепты, u, v — произвольные (составные) атрибуты.

Фактически, эта логика расширяет логику $\mathcal{ALC}$ единственным конструктором концептов $(u = v)$.

Определение 10.2 (Семантика логики $\mathcal{ALC}f$)**.** Интерпретация $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$ определяется как для логики $\mathcal{ALC}$, за исключением того, что всякому атомарному атрибуту $f \in \mathsf{AN}$ она сопоставляет произвольную частичную функцию $f^{\mathcal{I}} \colon \Delta \to \Delta$. Если $u = f_1 \ldots f_n$ есть составной атрибут, то он интерпретируется как композиция функций $f_i^{\mathcal{I}}$, а именно: $u^{\mathcal{I}}(x) = f_n^{\mathcal{I}}(\ldots f_1^{\mathcal{I}}(x) \ldots)$. Очевидно, что $u^{\mathcal{I}}$ есть частичная функция.

Концепт $(u = v)$ интерпретируется следующим образом:

$$(u = v)^{\mathcal{I}} \;=\; \big\{\, e \in \Delta \;\mid !u^{\mathcal{I}}(e) \wedge !v^{\mathcal{I}}(e) \;\wedge\; u^{\mathcal{I}}(e) = v^{\mathcal{I}}(e) \,\big\}.$$

Пример 10.1. Концепт «мужчина, окончивший тот же университет, что и его жена», записывается как:

$$\mathsf{Man} \sqcap \big(\mathsf{graduatedFrom} = \mathsf{hasWife\,graduatedFrom}\big).$$

Здесь graduatedFrom — атрибут, связывающий человека с университетом, который он окончил (если таковой есть). Множество людей, у которых оба родителя работают в одной компании, задается концептом:

$$\mathsf{Human} \sqcap \big(\mathsf{hasFather\,employedBy} = \mathsf{hasMother\,employedBy}\big).$$

10.1 Неразрешимость логики $\mathcal{ALCI}f$

Мы докажем, что в логике с равенством атрибутов и обратными ролями, т.е. $\mathcal{ALCI}f$, проблема выполнимости концептов (даже без TBox!) неразрешима.

Теорема 10.1. *Логика $\mathcal{ALCI}f$ неразрешима.*

Доказательство. Сведём проблему домино (см. раздел 14.2) к проблеме выполнимости концептов логики $\mathcal{ALCI}f$. Для этого по всякой системе домино $\mathcal{D}$ построим (эффективно) концепт $C_{\mathcal{D}}$ логики $\mathcal{ALCI}f$, такой что справедлива эквивалентность:

$$\text{существует покрытие системой } \mathcal{D} \text{ плоскости } \mathbb{N}\times\mathbb{N} \iff \text{концепт } C_{\mathcal{D}} \text{ выполним.}$$

Пусть дана система домино $\mathcal{D} = (D, H, V)$, где $D = \{d_1, \dots, d_n\}$. Введем язык, имеющий n атомарных концептов $\mathsf{CN} = \{D_1, \dots, D_n\}$ и три атомарных атрибута $\mathsf{AN} = \mathsf{RN} = \{F, X, Y\}$. Концепт $C_{\mathcal{D}}$ построим следующим образом (где импликация $A \Rightarrow B$ есть сокращение для $\neg A \sqcup B$):

$$\begin{array}{rcl}
C_{\mathcal{D}} & := & \mathsf{Grid} \sqcap \forall F^{-}.\mathsf{Tiling}, \quad \text{где:} \\
\mathsf{Grid} & := & \exists F^{-}.\top \ \sqcap \ \forall F^{-}.\big((F = XF) \ \sqcap \ (F = YF) \ \sqcap \ (XY = YX)\big), \\
\mathsf{Tiling} & := & \displaystyle\bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant n} D_i \ \sqcap \ \bigsqcap_{i\neq j} \neg(D_i \sqcap D_j) \ \ \sqcap \bigsqcap_{1\leqslant i\leqslant n} \Big(D_i \Rightarrow \forall X. \bigsqcap_{j:\langle d_i, d_j\rangle\in H} D_j\Big) \\
 & & \displaystyle\sqcap \bigsqcap_{1\leqslant i\leqslant n} \Big(D_i \Rightarrow \forall Y. \bigsqcap_{j:\langle d_i, d_j\rangle\in V} D_j\Big).
\end{array}$$

Как видим, в концепте $C_{\mathcal{D}}$ от $\mathcal{D}$ зависит только часть, обозначенная как Tiling. Поясним ее смысл. Если концепт Tiling верен в какой-то точке модели, то его первый конъюнктивный член означает, что в этой точке верен хотя бы один из концептов D_i, второй — что никакие два разных концепта D_i и D_j не могут быть верны в одной точке одновременно. Тем самым, в данной точке верен ровно один из концептов D_i. Третий конъюнктивный член означает, что если в данной точке верен некоторый D_i, то во всякой точке «правее» ее верен один из таких D_j, что $\langle d_i, d_j\rangle \in H$. Четвертый конъюнктивный член означает аналогичное для V.

Для завершения доказательства теоремы остается доказать следующее утверждение.

Лемма 10.1.1. *Существует покрытие системой $\mathcal{D}$ плоскости $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \iff$ концепт $C_{\mathcal{D}}$ выполним.*

$\triangleright$ ($\Rightarrow$) Пусть $t\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to D$ есть покрытие $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ системой домино $\mathcal{D}$. Построим модель $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$ концепта $C_{\mathcal{D}}$. Положим $\Delta = \{e\} \cup (\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, а концепты и атрибуты проинтерпретируем следующим образом:

$$\begin{array}{rcl}
D_k^{\mathcal{I}} & = & \{\, \langle i, j\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid t(i,j) = d_k \,\} = t^{-1}(d_k), \\
F^{\mathcal{I}} & = & \{\, \langle (i,j), e\rangle \mid i, j \in \mathbb{N} \,\}, \\
X^{\mathcal{I}} & = & \{\, \langle (i,j), (i{+}1, j)\rangle \mid i, j \in \mathbb{N} \,\}, \\
Y^{\mathcal{I}} & = & \{\, \langle (i,j), (i, j{+}1)\rangle \mid i, j \in \mathbb{N} \,\}.
\end{array}$$

Легко видеть, что $F^{\mathcal{I}}, X^{\mathcal{I}}, Y^{\mathcal{I}}$ являются частичными функциями из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ в Δ, а также в $\mathcal{I}$ справедливы равенства $F = XF$, $F = YF$, $XY = YX$ (как равенства частичных функций). Тем самым $e \in \mathsf{Grid}^{\mathcal{I}}$. Пользуясь тем, что t есть покрытие, несложно показать, что всякая точка $x \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ принадлежит $\mathsf{Tiling}^{\mathcal{I}}$. Тем самым $e \in (\forall F^{-}.\mathsf{Tiling})^{\mathcal{I}}$. В итоге $e \in C_{\mathcal{D}}^{\mathcal{I}}$, то есть концепт $C_{\mathcal{D}}$ выполним.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$ есть модель концепта $C_{\mathcal{D}}$. Тогда $\exists e \in C_{\mathcal{D}}^{\mathcal{I}}$, а также $\exists z \in \Delta$, такой что $F^{\mathcal{I}}(z) = e$; последнее следует из того, что $e \in (\exists F^{-}.\top)^{\mathcal{I}}$. Прежде чем строить покрытие t, построим вспомогательную функцию $\pi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \Delta$ по индукции:

- $\pi(0,0) := z$;
- если $\pi(i,j) = a$ и $X^{\mathcal{I}}(a) = b$, то положим $\pi(i{+}1, j) := b$;
- если $\pi(i,j) = a$ и $Y^{\mathcal{I}}(a) = b$, то положим $\pi(i, j{+}1) := b$.

Можно показать, что π корректно определена и являтся всюду определенной функцией. Для этого нужно по индукции доказать, что если $\pi(i,j) = a$, то $F^{\mathcal{I}}(a) = e$, откуда ввиду $F = XF$ и $F = YF$ следует, что функции $X^{\mathcal{I}}$ и $Y^{\mathcal{I}}$ определены в точке a, и значит π можно продолжить на $(i{+}1, j)$ и $(i, j{+}1)$. Далее π можно продолжить на $(i{+}1, j{+}1)$ двумя способами, но ввиду $XY = YX$ значение $\pi(i{+}1, j{+}1)$ определено однозначно.

Теперь строим покрытие $t\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to D$ следующим образом: для любых i, j, k положим

$$t(i,j) = d_k \iff \pi(i,j) \in D_k^{\mathcal{I}}.$$

Пользуясь тем, что $\mathcal{I}$ есть модель концепта $C_{\mathcal{D}}$, можно доказать, что для любых i, j найдётся единственный k, для которого верна правая часть этой эквивалентности. Значит, t является функцией, причем всюду определенной. Наконец, несложно показать, что для нее выполняются условия «склейки». Таким образом, построено покрытие t системой $\mathcal{D}$ плоскости $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Лемма доказана. $\triangleleft$

Проблема домино сведена к выполнимости концептов $\mathcal{ALCIf}$. Теорема доказана. ◀

Заметим, что в доказательстве неразрешимости мы существенно использовали то, что в концептах вида $(u = v)$ разрешается в качестве u, v использовать цепочки атрибутов произвольной длины.

Упражнение 10.1. Докажите, что если ограничиться лишь концептами вида $(f = g)$, где f, g — атомарные атрибуты, то получающийся фрагмент логики $\mathcal{ALCI}f$ является разрешимым.

Указание: для каждой пары атрибутов f, g введем «надроль» R, то есть добавим аксиомы вложения ролей $f \sqsubseteq R$ и $g \sqsubseteq R$; зададим аксиомы функциональности $\top \sqsubseteq\ \leqslant 1\, f$ и $\top \sqsubseteq\ \leqslant 1\, g$. Наконец, всякий концепт вида $(f = g)$ заменим на эквивалентный: $(\exists f) \sqcap (\exists g) \sqcap (\leqslant 1\, R)$. Тем самым получим вложение рассматриваемого фрагмента в логику $\mathcal{ALCHIF}$+TBox, разрешимость которой известна (она является фрагментом логики $\mathcal{SHIQ}$, в которой терминологии устранимы по теореме 7.1 и которая разрешима по теореме 7.3).