Глава 9

Логики с операциями над ролями

До сих пор единственной рассмотренной нами операцией над ролями было обращение роли R^-. Она чаще других используется на практике. Поскольку роли интерпретируются как двуместные отношения, то естественно рассмотреть и другие операции над ролями, такие как пересечение, объединение, композицию и т.д.. В этом разделе будут введены такие логики и рассмотрены свойства некоторых из них.

Пусть $\mathcal{L}$ — логика, для простоты, в интервале $\mathcal{ALC} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{ALCOIQ}$. Напомним, что RN обозначает множество атомарных ролей.

Определение 9.1 (Составные роли)**.** Множество *(составных) ролей* Roles определяется индуктивно:

- всякая атомарная роль $R \in \mathsf{RN}$ является ролью;
- если R есть роль, то ролями являются выражения: R^- (*обращение*), $\neg R$ (*дополнение* или *отрицание*), R^+ (*транзитивное замыкание*), R^* (*рефлексивно-транзитивное замыкание*) роли R;
- если R и S есть роли, то ролями являются выражения: $R \sqcap S$ (*пересечение* или *конъюнкция*), $R \sqcup S$ (*объединение* или *дизъюнкция*), $R \circ S$ (*композиция*) ролей R и S.

Всякая интерпретация $\mathcal{I}$ (которая, напомним, сопоставляет каждой атомарной роли $R \in \mathsf{RN}$ двуместное отношение $R^\mathcal{I} \subseteq \Delta \times \Delta$) единственным образом распространяется на все составные роли Roles индукцией по их построению:

- $(R^-)^\mathcal{I} = \{\langle e, d\rangle \in \Delta \times \Delta \mid \langle d, e\rangle \in R^\mathcal{I}\}$, $\quad(\neg R)^\mathcal{I} = \Delta \times \Delta \setminus R^\mathcal{I}$;
- $(R \sqcap S)^\mathcal{I} = R^\mathcal{I} \cap S^\mathcal{I}$, $\quad(R \sqcup S)^\mathcal{I} = R^\mathcal{I} \cup S^\mathcal{I}$;
- $(R \circ S)^\mathcal{I} = \{\langle e, d\rangle \in \Delta \times \Delta \mid$ существует $x \in \Delta$ такой, что $\langle e, x\rangle \in R^\mathcal{I}$ и $\langle x, d\rangle \in S^\mathcal{I}\}$;
- предварительно для произвольного двуместного отношения $r \subseteq \Delta \times \Delta$ обозначим:

$$\begin{aligned} &r^0 = \{\langle e, e\rangle \mid e \in \Delta\}, \quad r^1 = r, \quad r^2 = r \circ r, \quad r^3 = r \circ r \circ r, \quad \text{и так далее,}\\ &r^+ = \bigcup_{n \geqslant 1} r^n, \qquad\qquad r^* = \bigcup_{n \geqslant 0} r^n. \end{aligned}$$

  Таким образом, две точки связаны отношением r^+ (соответственно r^*), если они связаны цепочкой r-ребер длины не менее 1 (соответственно, не менее 0). Тогда роли R^+ и R^* интерпретирутся следующим образом: $(R^+)^\mathcal{I} = (R^\mathcal{I})^+$ и $(R^*)^\mathcal{I} = (R^\mathcal{I})^*$.

Замечание 9.1. Иногда рассматривают еще одну конструкцию: если C — произвольный концепт, то выражение $id(C)$ является ролью. Интерпретируется такое выражение следующим образом:

$$(id(C))^\mathcal{I} = \{\ \langle e, e\rangle \in \Delta \times \Delta \ \mid\ e \in C^\mathcal{I}\ \}.$$

Поскольку в концепте C могут фигурировать составные роли, а в выражении $id(C)$ — составные концепты, то для рассмотрения данной конструкции приходится давать совместное индуктивное определение для синтаксиса концептов и ролей.

Обычно рассматривают не все операции над ролями сразу, а некоторое их подмножество. Получающиеся логики именуют следующим образом: к названию логики $\mathcal{L}$ дописывают[1] в скобках перечисление операций над ролями, например, $\mathcal{ALC}(\sqcap, \circ)$ или $\mathcal{ALCIQ}(\sqcup, *, id)$. Для двух наборов операций над ролями введены специальные обозначения:[2]

[1] За исключением операции обращения ролей R^-, наличие которой указывают с помощью буквы $\mathcal{I}$ в имени логики.

[2] Однако нужно проверять по контексту, подразумевается ли при этом, что составные роли могут использоваться в численных ограничениях $(\leqslant n\, R.C)$.

- $\mathcal{L}_{trans}$ обозначает логику $\mathcal{L}(\sqcup, \circ, *)$;
- $\mathcal{L}_{reg}$ обозначает логику $\mathcal{L}(\sqcup, \circ, *, id)$.

Не все из рассмотренных операций над ролями являются независимыми. Например, имеют место следующие эквивалентности ролей и концептов (докажите их):

$$\begin{array}{rr} R^+ \equiv R \circ R^* & \exists R^+.C \equiv \exists R.\exists R^*.C \\ R^* \equiv id(\top) \sqcup R^+ & \exists R^*.C \equiv C \sqcup \exists R^+.C \\ \neg(R \sqcap S) \equiv \neg R \sqcup \neg S & \exists(id(C)).D \equiv C \sqcap D \\ \neg(R \sqcup S) \equiv \neg R \sqcap \neg S & \forall(id(C)).D \equiv \neg C \sqcup D \end{array}$$

Как видим, $\exists R^+$ и $\exists R^*$ выражаются друг через друга в логике $\mathcal{ALC}$, поэтому обычно рассматривают логики, имеющие лишь одну из этих двух операций.

В некоторых логиках добавление некоторых операций над ролями не увеличивает выразительных возможностей логики. Например, добавление композиции ролей к логике $\mathcal{ALC}$ ничего нового не дает ввиду следующей эквивалентности: $\exists(R \circ S).C \equiv \exists R.\exists S.C$, аналогично для $\forall$. В этом случае мы будем писать, что эти логики эквивалентны: $\mathcal{ALC}(\circ) \equiv \mathcal{ALC}$. Заметим, что эквивалентность логик не означает эквивалентности их расширений. Например, несмотря на то, что композиция ролей не увеличивает выразительных возможностей логики $\mathcal{ALC}$, это уже не верно для ее расширения иерархиями ролей (логика $\mathcal{ALCH}$), поскольку устранить композицию из аксиом, например, вида $R \circ S \sqsubseteq P$, уже невозможно. Аналогично, $\mathcal{ALCQ}(\circ) \not\equiv \mathcal{ALCQ}$. Поэтому для каждой логики необходимо отдельно проверять, является ли устранимой та или иная операция над ролями.

Упражнение 9.1. **a)** Докажите эквивалентность логик: $\mathcal{ALCI}(\circ) \equiv \mathcal{ALCI}$.

b) Докажите эквивалентность логик: $\mathcal{ALC}(\sqcup, \circ, id) \equiv \mathcal{ALC}$ и аналогично для $\mathcal{ALCI}$.

c) Увеличивает ли операция пересечение ролей $\sqcap$ выразительные возможности логики $\mathcal{ALC}$? Указание: можно ли для концепта $\exists(R \sqcap S).A$ найти эквивалентный концепт логики $\mathcal{ALC}$?

Упражнение 9.2. Выразите следующие утверждения (в виде аксиомы TBox или факта ABox):
а) Мэри любит всех кошек;
б) все люди любят всех кошек;
в) все кошки не любят всех собак.

9.1 Свойства логик с операциями над ролями

В последующих леммах мы будем формулировать и доказывать утверждения для некоторых логик с операцией R^*, но аналогичные утверждения справедливы и для соответствующих логик с операцией R^+, поскольку R^* и R^+ выражаются друг через друга даже в логике $\mathcal{ALC}$ (см. предыдущий раздел).

Лемма 9.1. *Логика $\mathcal{ALCIF}(*)$ не является ПОКМ.*

Доказательство. Покажем, что концепт $A \sqcap \forall R^*.(\exists R.\neg A \sqcap (\leqslant 1\, R^-))$ является выполнимым, но не имеет конечных моделей. Это доказываются также, как и в лемме 6.4, поскольку данный концепт означает: в первой точке e_0 должен быть верен концепт A; у каждой точки, достижимой из нее с помощью R-цепи (включая саму точку e_0), существует не более 1 входящего R-ребра и существует R-последователь, в котором верен концепт $\neg A$. ◀

Если сравнить доказательства лемм 9.1 и 6.4, то можно заметить, что по существу мы обеспечили выполнимость аксиом терминологии $\{\top \sqsubseteq \exists R.\neg A, \top \sqsubseteq (\leqslant 1\, R^-)\}$ во *всех* точках модели путем помещения заключений этих аксиом под квантор $\forall R^*$ и рассмотрев модель, в которой все точки достижимы из одной точки с помощью роли R^*. Этот трюк можно обобщить на случай более одной роли, только для этого помимо операции $*$ нам потребуется операция $\sqcup$ объединения ролей.

Теорема 9.2. *В логике $\mathcal{ALC}(\sqcup, *)$ TBox устранимы.*

Доказательство. Без ограничения общности терминология $\mathcal{T}$ состоит из единственной аксиомы $\top \sqsubseteq E$. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — все роли, встречающиеся в C и $\mathcal{T}$. Идея состоит в том, что с помощью операций $\sqcup$ и $*$ можно построить транзитивную роль, содержащую все R_i, и далее буквально повторить доказательство теоремы 7.1. Формально, мы докажем следующую эквивалентность:

$$\text{концепт } C \text{ выполним отн. } \{\top \sqsubseteq E\} \iff \text{концепт } C' := C \sqcap \forall(R_1 \sqcup \cdots \sqcup R_n)^*.E \text{ выполним.}$$

($\Rightarrow$) Если $C^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$ и $E^{\mathcal{I}} = \Delta$, то очевидно $(\forall(R_1 \sqcup \cdots \sqcup R_n)^*.E)^{\mathcal{I}} = \Delta$ и потому $(C')^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$) Пусть концепт C' выполним. Возьмем новую роль U. Тогда концепт $C'' := C \sqcap \forall U.E$ будет выполнимым относительно RBox $\mathcal{R}' := \{\mathsf{Tr}(U)\} \cup \{R_i \sqsubseteq U \mid i = 1, \ldots, n\}$. Действительно, модель $\mathcal{I}$ концепта C' легко превратить в модель концепта C'' относительно $\mathcal{R}'$, положив $U^{\mathcal{I}} := (R_1^{\mathcal{I}} \cup \ldots \cup R_n^{\mathcal{I}})^*$.

Если далее дословно повторить доказательство импликации '$\Leftarrow$' теоремы 7.1, то мы получим, что концепт C выполним относительно $(\mathcal{R}, \mathcal{T})$, где $\mathcal{R} = \varnothing$ и $\mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq E\}$, что нам и требуется. ◀

Упражнение 9.3. Докажите, что логика $\mathcal{ALCF}(\circ)$ не является ПОДМ. Указание: докажите, что следующий концепт не имеет древовидных моделей: $\exists R.A \ \sqcap \ \exists R.\neg A \ \sqcap \ \forall R.\exists S.\top \ \sqcap \ (\leqslant 1\, (R \circ S))$.

Логика $\mathcal{ALC}(\sqcap)$ не является ПОДМ, поскольку выполнимый концепт $\exists(R \sqcap S).A$ не имеет древовидных моделей. Действительно, из точки e, в которой этот концепт выполнен, обязательно ведут R-ребро и S-ребро в некоторую точку d, в которой верен концепт A.

Зачастую модели, являющейся деревом в чистом виде, не существует, как в приведенном примере. Однако можно слегка ослабить свойство древовидности — и обнаружить, что логика обладает соответствующим свойством полноты. Часто встречаются следующие модификации (напомним, что *дерево* — это связная структура, в которой в любую вершину x входит не более одного ребра):

дерево с мультирёбрами — связная структура, в которой у любой вершины x существует не более одного предка y (при этом не важно, сколько ребер ведет из y в x, главное, что их не меньше одного);

рефлексивное дерево — связная структура, в которой в любую вершину x входит не более одного ребра, выходящего из вершины, отличной от x (при этом наличие или отсутствие ребра из x в x не важно);

транзитивное дерево — связная структура, в которой у любой вершины x существует не более одного непосредственного предка, т.е. такого y, что yRx и нет таких z, что yRz и zRx.

Полезны также их комбинации (например, рефлексивные деревья с мультиребрами). Подобные ослабления свойства ПОДМ характерны при изучении дескрипционных логик. Например, для логики $\mathcal{ALCH}$ обычное понятие дерева не адекватно, так как если мы имеем аксиому $R \sqsubseteq S$, то в любой модели всюду, где есть R-ребро, будет и S-ребро. Деревья же с мультиребрами в этом случае являются подходящей альтернативой. Свойство полноты логики относительно древовидных (в любом смысле) моделей обычно является ключом к построению более простого разрешающего табло-алгоритма для этой логики, который по заданному концепту будет строить соответствующее дерево.

Лемма 9.3. *Логика $\mathcal{ALC}(\sqcap)$ полна относительно деревьев с мультиребрами.*

Доказательство. Пусть дан выполнимый концепт C логики $\mathcal{ALC}(\sqcap)$. Для каждого подмножества множества ролей $R_1, \ldots, R_n$, встречающихся в концепте C, введем атомарную роль для обозначения конъюнкции ролей из этого подмножества:

$$R_\sigma := \bigsqcap_{i \in \sigma} R_i \quad \text{для каждого } \sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Тогда подставив эти роли вместо соответствующих конъюнкций в концепт C, мы получим концепт C' логики $\mathcal{ALC}$, который тоже будет выполнимым. Так как логика $\mathcal{ALC}$ является ПОДМ, то C' имеет модель, являющуюся деревом. Несложно понять, как превратить ее в модель концепта C, являющуюся «деревом с мультиребрами»: каждое R_σ-ребро нужно заменить на семейство соответствующих R_i-ребер. ◀

9.1.1 Связь с пропозициональной динамической логикой

9.2 Неразрешимые логики с операциями над ролями

Численные ограничения на роли, то есть конструкции вида $\leqslant n\, R.C$, используемые вместе с операциями над ролями, представляют собой довольно большие выразительные возможности — настолько, что многие из этих логик оказываются неразрешимыми. Здесь мы приведем несколько результатов о неразрешимости. Если мы рассматриваем логику $\mathcal{L}$ с терминологиями (TBox), то мы будем указывать это как $\mathcal{L} + \mathsf{TBox}$. Представленные здесь результаты получены в [5].

Теорема 9.4. *Логика $\mathcal{ALCF}(\sqcap, \circ) + \mathsf{TBox}$ неразрешима.*

Доказательство. Сведём проблему домино к проблеме выполнимости концептов в данной логике, аналогично доказательству теоремы 7.2. В языке нашей логики мы будем выражать наличие структуры, подобной приведенной на рис. 7.1b, только теперь вместо ролей X_i, Y_j будут лишь две роли X и Y.

Аксиомы (5–8) остаются прежними (с заменой X_i, Y_j на X, Y) — они принадлежат $\mathcal{ALC}$. Аксиомы же (1–4) заменяются на более простые:

$$\begin{aligned}&\top \sqsubseteq \exists X.\top,\\ &\top \sqsubseteq \exists Y.\top,\\ &\top \sqsubseteq (=1\,(X \circ Y \sqcap Y \circ X)),\end{aligned}$$

где $(=1\,R)$ есть сокращение для $(\exists R.\top) \sqcap (\leqslant 1\,R)$. Первые две аксиомы утверждают, что из каждой точки ведет хотя бы одно горизонтальное и хотя бы одно вертикальное ребро. Последняя же аксиома утверждает, что для каждой точки e существует единственная точка d, в которую можно попасть из e двумя путями: пройдя сначала по X-ребру и затем Y-ребру, либо сначала по Y-ребру и затем X-ребру. Именно это условие гарантирует, что всякий «незавершенный квадрат» является квадратом (см. доказательство импликации '$\Leftarrow$' леммы 7.2.1), и тем самым позволяет строить ячейки сетки $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Остальные шаги аналогичны доказательству теоремы 7.2. ◀

Теорема 9.5. *Логика* $\mathcal{ALCF}(\sqcup, \circ) + \mathsf{TBox}$ *неразрешима.*

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы 9.4, но вместо последней аксиомы используется следующая: $\top \sqsubseteq (\leqslant 1\,(X \circ Y \sqcup Y \circ X))$. Заметим, что, в отличие от предыдущей теоремы, здесь даже не требуется утверждать существование: $\top \sqsubseteq \exists(X \circ Y \sqcup Y \circ X).\top$, поскольку оно автоматически вытекает из двух аксиом $\top \sqsubseteq \exists X.\top$ и $\top \sqsubseteq \exists Y.\top$. ◀

Теорема 9.6. *Логика* $\mathcal{ALCF}(\sqcup, \circ, *)$ *неразрешима.*

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы 9.5 ввиду того, что, согласно лемме 9.2, при наличии в логике операций $\sqcup$ и $*$ терминологии устранимы. ◀

Теорема 9.7. *Логика* $\mathcal{ALCIF}(\sqcup, \circ)$ *неразрешима.*

Доказательство. Как и ранее, будем сводить проблему домино к выполнимости концептов данной логики, по аналогии с доказательством теоремы 7.2. На этот раз мы будем выражать с помощью концепта существование не только «сетки» вида $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ с горизонтальными X-ребрами и вертикальными Y-ребрами, но также и одной точки s вне сетки, из которой через отношение R «видны» все точки сетки.

Для произвольной системы домино $\mathcal{D}$ составим аксиомы (5–8), заменив в них X_i, Y_j на X, Y, и затем соберем их в один концепт, перенеся все концепты из левых частей включений в правые и взяв их конъюнкцию. В результате получим следующий концепт $C_{\mathcal{D}}$ логики $\mathcal{ALC}$:

$$C_{\mathcal{D}} := (D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_n) \;\sqcap\; \bigsqcap_{k\neq\ell} \neg(D_k \sqcap D_\ell) \;\sqcap\; \bigsqcap_{k=1}^{n} \Big(\neg D_k \sqcup \forall X. \bigsqcup_{\ell:\langle d_k, d_\ell\rangle \in H} D_\ell\Big) \;\sqcap\; \bigsqcap_{k=1}^{n} \Big(\neg D_k \sqcup \forall Y. \bigsqcup_{\ell:\langle d_k, d_\ell\rangle \in V} D_\ell\Big).$$

Далее составим концепт C_{Cell}, который *локально* (для отдельной точки сетки) утверждает существование одной клетки сетки. Делается это так же, как в теореме 9.5:

$$C_{\mathsf{Cell}} \;:=\; (\exists X.\exists Y.\top) \;\sqcap\; (\exists Y.\exists X.\top) \;\sqcap\; (\leqslant 1\,(X \circ Y \sqcup Y \circ X)).$$

Интуитивно, данный концепт утверждает, что из текущей точки e ведет X-ребро и далее Y-ребро (в некоторую точку d), из e ведет Y-ребро и далее X-ребро (в некоторую точку d'), и наконец, что точки d и d' совпадают.

Далее (и в этом главный трюк) составим концепт, гарантирующий, что из некоторой выделенной точки s (вне сетки) «видны» все точки сетки с помощью отношения R. Это достигается следующим концептом:

$$C_{\mathsf{Grid}} \;:=\; \exists R.\top \;\sqcap\; \forall R.\big(\,\forall X.\exists R^-.\top \;\sqcap\; \forall Y.\exists R^-.\top \;\sqcap\; (\leqslant 1\,(R^- \sqcup X \circ R^- \sqcup Y \circ R^-))\,\big).$$

Интуитивно он утверждает следующее. Из точки s ведет R-ребро (в некоторую точку, которая будет началом сетки). Далее, про каждую точку e сетки, в которую из s ведет R-ребро, утверждается три факта. Во-первых, если из e пройти по X-ребру в некоторую точку d_1, то в d_1 входит R-ребро (пусть оно выходит из некоторой точки s_1). Во-вторых, аналогично, если из e пройти по Y-ребру в некоторую точку d_2, то в d_2 входит R-ребро (пусть оно выходит из некоторой точки s_2). Наконец, существует не более одной точки, достижимой из e по отношениям R^-, $X \circ R^-$ и $Y \circ R^-$. Значит, $s_1 = s_2 = s$.

Таким образом, если из точки s ведет R-ребро в какую-либо точку e сетки, то из s ведет R-ребро также в точки, достижимые из e по отношениям X и Y. По индукции можно доказать, что во все точки сетки $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ведут R-ребра из точки s, то есть мы достигли желаемого эффекта.

Наконец, нам остается потребовать, чтобы концепты $C_{\mathcal{D}}$ и C_{Grid} выполнялись не только локально, но во всех точках сетки. Для этого мы теперь можем воспользоваться отношением R, благодаря которому точка s «видит» всю сетку. Итоговый концепт получается следующим:

$$C(\mathcal{D}) \;:=\; C_{\mathsf{Grid}} \;\sqcap\; \forall R.(C_{\mathcal{D}} \sqcap C_{\mathsf{Cell}}).$$

Теперь мы утверждаем: существует покрытие $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ системой домино $\mathcal{D} \iff$ концепт $C(\mathcal{D})$ выполним. Доказательство проводится как в теореме 7.2. ◀

Далее мы усилим теорему 9.4, доказав неразрешимость даже без терминологий.

Теорема 9.8. *Логика* $\mathcal{ALCF}(\sqcap, \circ)$ *неразрешима.*

Доказательство. Конструкция похожа на ту, что построена в предыдущей теореме 9.7. Однако теперь обратных ролей в языке нет, поэтому помимо роли R мы введем роль T, которая будет вести себя почти как обратная к R. Концепт, который мы построим, будет утверждать, что из некоторой точки s доступно по R начало сетки $\langle 0,0\rangle$; из нее доступна по T некоторая точка s', а из s' доступны все точки сетки по отношению R. Тем самым, из исходной точки s все точки сетки будут доступно по отношению $R\circ T\circ R$.

Концепт $C_{\mathcal{D}}$ логики $\mathcal{ALC}$ составляем как в предыдущей теореме. Далее составим концепт C_{Cell}, утверждающий локально существование клетки сетки:

$$C_{\mathsf{Cell}} \;:=\; (=1\,X)\sqcap(=1\,Y)\sqcap(=1\,X\circ Y)\sqcap(=1\,Y\circ X)\sqcap(=1\,(X\circ Y\sqcap Y\circ X)).$$

Составим концепт C_{Grid}, гарантирующий, что все точки сетки доступны через $R\circ T\circ R$:

$$\begin{array}{lcl} C_{\mathsf{Grid}} & := & (\exists R.\top) \;\sqcap\; (=1\,(R\sqcap R\circ T\circ R)) \;\sqcap\; \forall R.\forall T.\forall R. \\ & & \big[(\leqslant 1\,T) \;\sqcap\; \forall X.(\leqslant 1\,T) \;\sqcap\; \forall Y.(\leqslant 1\,T) \;\sqcap\; (=1\,(T\sqcap X\circ T\sqcap Y\circ T))\sqcap \\ & & (=1\,(X\sqcap T\circ R)) \;\sqcap\; (=1\,(X\sqcap T\circ R))\big] \end{array}$$

Наконец, составим концепт $C(\mathcal{D})$, «строящий» сетку и распространяющий на нее условия $C_{\mathcal{D}}$ и C_{Cell}:

$$C(\mathcal{D}) \;:=\; C_{\mathsf{Grid}} \;\sqcap\; \forall R.\forall T.\forall R.(C_{\mathcal{D}} \sqcap C_{\mathsf{Cell}}).$$

Поясним конструкцию C_{Grid}. Выполнимость этого концепта в некоторой точке s означает следующее. В виду $\exists R.\top$, из s ведет R-ребро в некоторую точку (она будет началом сетки $\langle 0,0\rangle$). С помощью $=1\,(R\sqcap R\circ T\circ R)$ мы утверждаем, что из s через $R\circ T$ доступна некоторая точка s', из которой ведет R-ребро опять в точку $\langle 0,0\rangle$. Дальнейшие концепты обеспечат нам то, что из любой точки сетки ведет T-ребро в точку s', а из точки s' в любую точку сетки ведет R-ребро.

Действительно, рассмотрим произвольную точку e, доступную из s' по отношению R, а значит доступную из s по отношению $R\circ T\circ R$. В концепте $C(\mathcal{D})$, который выполнен в s, есть подвыражение $\forall R.\forall T.\forall R.C_{\mathsf{Cell}}$, значит, в точке e выполнен C_{Cell}. Тогда из e ведет X-ребро в некоторую точку e_x и Y-ребро в некоторую точку e_y. Концепты $(\leqslant 1\,T)$, $\forall X.(\leqslant 1\,T)$, $\forall Y.(\leqslant 1\,T)$, тоже выполненные в e, утверждают, что из каждой из точек e, e_x, e_y ведет не более одного T-ребра. Концепт $=1\,(T\sqcap X\circ T\sqcap Y\circ T)$ тогда утверждает, что из каждой из этих точек e, e_x, e_y на самом деле ведет ровно одно T-ребро, причем все эти три T-ребра ведут в одну и ту же точку. Более того, вспомним, что из точки $\langle 0,0\rangle$ ведет T-ребро в точку s'; тогда индукцией можно показать, что упомянутые три T-ребра ведут в ту же самую точку s'.

Наконец, концепт $=1\,(X\sqcap T\circ R)$ означает, что из e в e_x можно попасть не только по X-ребру, но и по $(T\circ R)$-цепи. Поскольку из e выходит единственное T-ребро (и оно ведет в точку s'), то это означает, что из s' в e_x ведет R-ребро. Аналогично, из s' в e_y тоже ведет R-ребро.

Теперь мы утверждаем: существует покрытие $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ системой домино $\mathcal{D} \iff$ концепт $C(\mathcal{D})$ выполним. Доказательство проводится как в теореме 7.2. ◀

Можно ли аналогичным образом усилить теорему 9.5, устранив терминологии — неизвестно:

Открытая проблема 9.1. Разрешима ли логика $\mathcal{ALCF}(\sqcup, \circ)$ без терминологий?