Глава 2

Терминологии

Концепты ДЛ интересны не столько сами по себе, сколько как инструмент для записи *знаний* об описываемой *предметной области*. Эти знания подразделяются на общие знания о понятиях и их взаимосвязях (так называемые *интенсиональные* знания) и знания об индивидуальных объектах, их свойствах и связях с другими объектами (так называемые *экстенсиональные* знания). Первые более стабильны и постоянны, тогда как вторые более подвержены модификациям. В соответствии с этим делением, знания, записываемые с помощью языка ДЛ, подразделяются на:

- набор терминологических аксиом или TBox $\mathcal{T}$ и
- набор утверждений (фактов) об индивидах или ABox $\mathcal{A}$.

Вместе они составляют так называемую базу знаний $\mathcal{K} = \mathcal{T} \cup \mathcal{A}$. Далее мы по отдельности рассмотрим виды аксиом и утвеждений, из которых может состоять TBox и ABox. В настоящем разделе изложение ведется для логики $\mathcal{ALC}$; однако все вводимые ниже понятия легко переносятся на другие ДЛ.

Определение 2.1. (*Терминологической*) *аксиомой* называется выражение вида $C \sqsubseteq D$ или $C \equiv D$, где C и D — произвольные концепты. *Терминологией* (или *TBox*, от англ. terminological box) называется произвольный конечный набор аксиом данного вида.

Обратим внимание, что ранее у нас уже встречались символы $\sqsubseteq$ и $\equiv$, но лишь как сокращения для слов «вложен» и «эквивалентен». Теперь же эти символы введены непосредственно в язык ДЛ (но не в синтаксис концептов, а в синтаксис аксиом).

Пример 2.1. Следующая совокупность аксиом является примером терминологии:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{Human} & \equiv & \mathsf{Man} \sqcup \mathsf{Woman} \\ \mathsf{Human} & \sqsubseteq & \forall \mathsf{hasChild}.\mathsf{Human} \\ \mathsf{Parent} & \equiv & \mathsf{Human} \sqcap \exists \mathsf{hasChild}.\top \end{array}$$

Интуитивно (т.е. при так называемой «естественной» интерпретации, когда концепту Human соответствует множество всех людей, роли $\mathsf{hasChild}$ — отношение «имеет ребенка» и т.д.) эти аксиомы говорят, что всякий человек является мужчиной или женщиной; у всякого человека всякий ребенок есть тоже человек; быть родителем означает в точности быть человеком и иметь ребенка.

Определение 2.2 (Семантика)**.** Аксиома $C \sqsubseteq D$ *истинна* в интерпретации $\mathcal{I}$, если $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$; при этом $\mathcal{I}$ называют *моделью* данной аксиомы и пишут $\mathcal{I} \models C \sqsubseteq D$. Аналогично, $\mathcal{I} \models C \equiv D$ означает, что $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$. Интерпретацию $\mathcal{I}$ называют *моделью* терминологии $\mathcal{T}$ и пишут $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$, если $\mathcal{I}$ является моделью всех аксиом из $\mathcal{T}$. Терминология $\mathcal{T}$ называется *выполнимой* (или *совместной*), если она имеет модель.

Пусть $\mathcal{T}$ — произвольная терминология, C и D — произвольные концепты. Введем аналоги понятий из определения 1.3, «релятивизованные» по отношению к заданной терминологии.

Определение 2.3. Концепт C *выполним* в терминологии $\mathcal{T}$ (или относительно терминологии $\mathcal{T}$), если существует модель $\mathcal{I}$ терминологии $\mathcal{T}$, такая что $C^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$.

Концепты C и D *эквивалентны в* $\mathcal{T}$ (обозначение: $\mathcal{T} \models C \equiv D$), если в любой модели $\mathcal{I}$ терминологии $\mathcal{T}$ имеем $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$. Концепт C *вложен в* D *в терминологии* $\mathcal{T}$ (обозначение: $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$), если в любой модели $\mathcal{I}$ терминологии $\mathcal{T}$ имеем $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$. Концепты C и D называются *непересекающимися в* $\mathcal{T}$, если в любой модели $\mathcal{I}$ терминологии $\mathcal{T}$ имеем $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \varnothing$.

Аксиома α *следует из* $\mathcal{T}$ (пишем: $\mathcal{T} \models \alpha$), если α истинна в любой модели терминологии $\mathcal{T}$. Две терминологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ называются *эквивалентными* (пишем: $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{T}_2$), если у них одни и те же модели, т.е. для любой интерпретации $\mathcal{I}$ она является моделью $\mathcal{T}_1$ тогда и только тогда, когда она является моделью $\mathcal{T}_2$.

Пример 2.2. Пусть $\mathcal{T}$ — терминология из предыдущего примера. Тогда концепт $\mathsf{Woman} \sqcap \neg\mathsf{Human}$ невыполним в $\mathcal{T}$, т.к. ввиду первой аксиомы мы имеем: $\mathcal{T} \models \mathsf{Woman} \sqsubseteq \mathsf{Human}$. В то же время концепт $\mathsf{Man} \sqcap \mathsf{Woman}$ выполним в $\mathcal{T}$, т.к. несложно построить модель терминологии $\mathcal{T}$, в которой этот концепт будет интерпретирован непустым множеством. Чтобы этот концепт стал невыполнимым в $\mathcal{T}$ (а этого было бы естественно ожидать), нужно добавить в $\mathcal{T}$ дополнительные аксиомы.

Упражнение 2.1. **a)** Две терминологии эквивалентны тогда и только тогда, когда аксиомы одной следуют из другой и наоборот. **b)** Любая терминология эквивалентна терминологии, состоящей из одной аксиомы вида $\top \sqsubseteq C$. **c)** Рассмотрение терминологий не выводит нас за рамки логики предикатов, более того, они включены также и в логику предикатов с двумя переменными $\mathcal{L}^2$ (см. раздел 1.1).

На практике эксперты в какой-либо предметной области (например, генетике, биологии, медицине и т.п.) создают терминологию, в которой в виде аксиом фиксируют взаимосвязи основных понятий (концептов и ролей), имеющихся в данной области знаний. После того, как такая система аксиом сформулирована, возникают задачи вывода новых (или, как говорят, неявных) знаний из знаний, заданных явно в терминологии. Одной из первых задач является проверка того, что терминология вообще имеет хотя бы одну модель (т.е. совместна). Далее проверяют, что все атомарные концепты являются выполнимыми в данной терминологи. Если какой-то атомарный концепт оказывается невыполнимым, это обычно является признаком того, что в аксиомах терминологии допущены ошибки. В дальнейшем терминология используется для вывода новых включений и эквивалентностей концептов из уже имеющихся.

Легко показать, что соответствующие проблемы сводимы друг к другу:

Лемма 2.1 (Сводимость к вложению концептов)**.** *Для любых концептов C и D и терминологии $\mathcal{T}$ справедливы следующие эквивалентности:*

(a) *C невыполним в $\mathcal{T}$ $\iff$ $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq \bot$;*
(b) *$\mathcal{T} \models C \equiv D$ $\iff$ $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ и $\mathcal{T} \models D \sqsubseteq C$;*
(c) *C и D не пересекаются в $\mathcal{T}$ $\iff$ $\mathcal{T} \models (C \sqcap D) \sqsubseteq \bot$.*

Лемма 2.2 (Сводимость к невыполнимости концептов)**.** *Для любых концептов C и D и терминологии $\mathcal{T}$ справедливы следующие эквивалентности:*

(a) *$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ $\iff$ концепт $C \sqcap \neg D$ невыполним в $\mathcal{T}$;*
(b) *$\mathcal{T} \models C \equiv D$ $\iff$ концепты $C \sqcap \neg D$ и $D \sqcap \neg C$ оба невыполнимы в $\mathcal{T}$;*
(c) *C и D не пересекаются в $\mathcal{T}$ $\iff$ концепт $C \sqcap D$ невыполним в $\mathcal{T}$.*

Упражнение 2.2. Проведите доказательство этих лемм.

2.1 Ацикличные терминологии

Данный вид терминологий произошел из желания иметь возможность вводить в онтологии обозначения для часто используемых концептов с тем, чтобы формулировки аксиом были более краткими и понятными. Допустим, в терминологии часто встречается выражение $\mathsf{Human} \sqcap \mathsf{Female}$, а также $\mathsf{Human} \sqcap \mathsf{Female} \sqcap \exists\mathsf{hasChild}.\top$. Тогда естественно дать им обозначения, например, ввести атомарные концепты Woman и Mother и добавить в терминологию следующие «определения», т.е. аксиомы эквивалентности:

$$\begin{aligned}\mathsf{Woman} &\equiv \mathsf{Human} \sqcap \mathsf{Female}\\ \mathsf{Mother} &\equiv \mathsf{Woman} \sqcap \exists\mathsf{hasChild}.\top\end{aligned}$$

Естественным условием должно быть то, что в нашей онтологии атомарные концепты Woman и Mother не использованы уже для обозначения каких-либо других концетов. Но это не единственное условие — было бы также разумно потребовать, чтобы подобная система определений задавала смысл *определяемых* концептов (стоящих в левых частях определений) однозначным образом через смысл *определяющих* концептов (встречающихся только в правых частях определений). Точной формулировке этого требования и посвящен данный раздел. Но прежде мы приведем пример системы определений, которая не удовлетворяет этому условию.

Пример 2.3. Рассмотрим следующую систему аксиом эквивалентности:

$$\begin{aligned}\mathsf{Mother} &\equiv \mathsf{Parent} \sqcap \mathsf{Woman}\\ \mathsf{Parent} &\equiv \mathsf{Mother} \sqcup \mathsf{Father}\end{aligned}$$

Здесь определяющие концепты есть Father и Woman, а определяемые — Mother и Parent. Смысл первых зададим следующим образом: концепт Father интерпретируем как множество отцов (т.е. мужчин, имеющих детей), а концепт Woman — как множество женщин (будем считать, что область интерпретации Δ есть множество всех людей). Тогда определяемые концепты могут быть проинтерпретированы несколькими существенно разными способами — и при этом удовлетворять приведенным аксиомам. Вот некоторые из таких интерпретаций (убедитесь, что все они являются моделями данных аксиом):

a) Mother — множество матерей (женщин, имеющих детей), Parent — множество родителей (людей, имеющих детей);
b) Mother — множество всех женщин, Parent — объединение множества отцов и женщин;
c) Mother — пустое множество, Parent — множество отцов.

Причина этого явления понятна: в данных аксиомах концепты Mother и Parent определялись друг через друга, т.е. порождали замкнутый цикл определений. Ацикличные терминологии, вводимые ниже, определяются как терминологии, в которых подобные циклы отсутствуют. Приведем еще пример, показывающий, что тот же эффект замкнутого цикла будет наблюдаться даже в случае, когда концепт, участвующий в цикле, находится под квантором.

Пример 2.4. Рассмотрим аксиому: $\mathsf{Human} \equiv \mathsf{Animal} \sqcap \forall \mathsf{hasParent}.\mathsf{Human}$. Этой эквивалентностью мы пытаемся выделить людей как животных, у которых родители тоже являются людьми. Однако своей цели мы не достигаем: данной аксиоме будут удовлетворять, наравне с множеством всех людей, также и множество всех животных, и какой-либо биологический вид, и вообще любое множество животных, содержащее вместе с каждым элементов и всех его предков.

Определение 2.4. Терминология $\mathcal{T}$ называется *системой определений*, если все ее аксиомы имеют вид $A \equiv C$, где A — атомарный, а C — произвольный концепт, причем в $\mathcal{T}$ нет двух разных аксиом с одинаковой левой частью. Сами аксиомы вида $A \equiv C$ будем называть *определениями.*

Пусть $\mathcal{T}$ — система определений. Разобьем атомарные концепты, встречающиеся в $\mathcal{T}$, на две категории:

- *производные* (или определяемые) — входящие в левую часть хотя бы одной аксиомы $\mathcal{T}$;
- *базовые* (или определяющие) — не входящие в левую часть ни одной из аксиом $\mathcal{T}$.

Формализуем понятие «смысл производных концептов задается однозначно через смысл базовых».

Определение 2.5 (Корректная терминология)**.** *Базовой* будем называть интерпретацию $\mathcal{J}$, которая интерпретирует лишь базовые концепты.

Пусть $\mathcal{J}$ — базовая, а $\mathcal{I}$ — произвольная интерпретация. Будем говорить, что $\mathcal{I}$ является *расширением* интерпретации $\mathcal{J}$, если их области совпадают ($\Delta^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{J}}$) и они одинаково интерпретируют базовые концепты, т.е. для каждого базового концепта B имеем $B^{\mathcal{I}} = B^{\mathcal{J}}$.

Систему определений $\mathcal{T}$ назовем *корректной* терминологией, если для любой базовой интерпретации существует единственное расширение, являющееся моделью терминологии $\mathcal{T}$.

Свойство корректности не меняется при переходе к эквивалентной терминологии.

Лемма 2.3. *Пусть системы определений $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ имеют одни и те же множества базовых и производных символов. Тогда если $\mathcal{T}_1$ корректна и $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{T}_2$, то и $\mathcal{T}_2$ корректна.*

Доказательство. Возьмем любую базовую интерпретацию $\mathcal{J}$. Тогда для любого ее расширения $\mathcal{I}$ имеем: $\mathcal{I} \models \mathcal{T}_1 \iff \mathcal{I} \models \mathcal{T}_2$, поскольку это верно вообще для любой интерпретации $\mathcal{I}$ по определению эквивалентности терминологий. Поэтому среди таких $\mathcal{I}$ (то есть расширений $\mathcal{J}$) существует единственная модель $\mathcal{T}_1$ тогда и только тогда, когда существует единственная модель $\mathcal{T}_2$, что и требовалось. ◀

Возникает вопрос: как узнать, что терминология является корректной? Мы сформулируем синтаксический признак — ацикличность.

Пусть $\mathcal{T}$ — система определений. *Граф зависимостей концептов* $\Gamma(\mathcal{T})$ — это ориентированный граф, вершинами которого являются атомарные концепты, встречающиеся в $\mathcal{T}$, а ребра задаются следущим образом: из A в B ведет ребро, если в $\mathcal{T}$ есть аксиома $A \equiv C$, где B входит в C.

Очевидно, что в $\Gamma(\mathcal{T})$ из каждой вершины выходит не более одного ребра. С точки зрения графа $\Gamma(\mathcal{T})$ базовые концепты — это вершины, не имеющие исходящих ребер, а производные концепты — это вершины, имеющие (причем единственное) исходящее ребро.

Определение 2.6. Терминология $\mathcal{T}$ называется *ацикличной*, если в ее графе $\Gamma(\mathcal{T})$ нет ориентированных циклов.

Наша задача — показать, что ацикличые терминологии являются корректными.

Определение 2.7 (Развертка концепта)**.** Пусть $\mathcal{T}$ — ацикличная терминология, C — концепт. Если в C входят производные концепты, то выбираем любой из них A, находим в $\mathcal{T}$ соответствующую (единственную) аксиому: $A \equiv D$ и заменяем в C все символы A на выражение D; полученный концепт $C[A/D]$ обозначим через C_1. Будем повторять эту процедуру (получая концепты $C_2, \ldots, C_n$) до тех пор, пока не окажется, что в очередном концепте C_n не встречается ни один производный концепт. Этот концепт C_n назовем *разверткой* концепта C относительно $\mathcal{T}$ и обозначим $C_\mathcal{T}$.

Докажем корректость этого определения.

Лемма 2.4. *Если $\mathcal{T}$ — ацикличная терминология, то описанный выше процесс построения $C_0, C_1, \ldots$ не может быть бесконечным.*

Доказательство. Индукция по числу n аксиом в $\mathcal{T}$, то есть по числу производных концептов в $\mathcal{T}$.

База индукции: $n = 1$, то есть $\mathcal{T}$ состоит из единственной аксиомы $A \equiv D$. Ацикличность $\mathcal{T}$ означает, что A не входит в D. Тогда описанный процесс действительно конечен: исходя из концепта C, процесс либо останавливается сразу, если в C не входит символ A, либо совершается единственный шаг — подстановка в C концепта D вместо A.

Шаг индукции: $n > 1$. Возьмем в графе $\Gamma(\mathcal{T})$ вершину A, не имеющую ни одного входящего ребра. Такая вершина существует, иначе если бы в каждую вершину входило ребро, то в силу конечности графа в нем нашелся бы ориентированный цикл.

В $\mathcal{T}$ есть аксиома вида $A \equiv D$. Возможны два случая:

а) в процессе подстановок $C_0, C_1, \ldots$ мы никогда не подставляли D вместо A. Тогда этот процесс можно считать процессом над ацикличной терминологией $\mathcal{T} \setminus \{A \equiv D\}$, в которой число аксиом на одну меньше, а значит, по предположению индукции, такой процесс конечен;

б) в процессе подстановок $C_0, C_1, \ldots$ некоторый шаг заключается в подстановке D вместо A. Тогда такой шаг в этом процессе единственен, поскольку при дальнейших подстановках не может возникнуть концепта A (ввиду того, что в A не входит ребер, то есть A не встречается в правой части ни одной аксиомы из $\mathcal{T}$). Значит, начиная с этого шага мы имеем процесс над терминологией $\mathcal{T} \setminus \{A \equiv D\}$, который, по предположению индукции конечен. ◀

Лемма 2.5. *Развертка концепта относительно $\mathcal{T}$ эквивалентна исходному концепту в терминологии $\mathcal{T}$, то есть $\mathcal{T} \models C \equiv C_\mathcal{T}$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{T} \models A \equiv D$, то индукцией по построению концепта C легко показать, что $\mathcal{T} \models C \equiv C[A/D]$, то есть $\mathcal{T} \models C \equiv C_1$. Отсюда по индукции можно вывести $\mathcal{T} \models C \equiv C_n$. ◀

Пример 2.5. Развертка концепта может быть экспоненциально длиннее исходного концепта и терминологии. В качестве примера рассмотрим терминологию, состоящую из следующих n определений:

$$B_i \equiv \exists R.B_{i-1} \sqcap \exists R.\neg B_{i-1}, \text{ где } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Очевидно, что длина данной терминологии (число символов, использованых для ее записи) зависит линейно от n. Однако развертка концепта B_n будет иметь длину, экспоненциальную от n (докажите это).

Определение 2.8 (Развертка терминологии)**.** Пусть $\mathcal{T}$ — ацикличная терминология. Заменим каждую ее аксиому $A \equiv C$ на аксиому $A \equiv C_\mathcal{T}$, где $C_\mathcal{T}$ — развертка концепта C. Получающаяся в результате терминология $\mathcal{T}'$ называется *разверткой* терминологии $\mathcal{T}$.

Лемма 2.6 (О свойствах развертки)**.** *Пусть $\mathcal{T}$ — ацикличная терминология, $\mathcal{T}'$ — ее развертка. Тогда:*

(a) *$\mathcal{T}'$ — ацикличная терминология;*
(b) *$\mathcal{T}'$ — корректная терминология;*
(c) *$\mathcal{T}'$ эквивалентна $\mathcal{T}$;*
(d) *терминологии $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ имеют одни и те же базовые и производные концепты.*

Доказательство. (a) В терминологии $\mathcal{T}'$ в левых частях аксиом стоят только производные концепты, а в правых — только базовые, следовательно, циклов быть не может.

(b) Пусть $\mathcal{J}$ — произвольная базовая интерпретация. Покажем, что ее можно единственным образом расширить до модели $\mathcal{I}$ терминологии $\mathcal{T}'$. Для каждого базового концепта B полагаем $B^\mathcal{I} := B^\mathcal{J}$, тем самым гарантировав, что $\mathcal{I}$ есть расширение $\mathcal{J}$. Далее для каждого производного концепта A находим в $\mathcal{T}'$ соответствующую аксиому $A \equiv D$. Так как концепт D состоит лишь из базовых концептов, то $D^\mathcal{I}$ уже определено. Поэтому полагаем $A^\mathcal{I} := D^\mathcal{I}$. Очевидно, что при таком определении аксиома $A \equiv D$ будет выполнена в $\mathcal{I}$, и более того, это единственный способ задать $A^\mathcal{I}$ с тем, чтобы выполнялась данная аксиома. Таким образом, единственная модель терминологии $\mathcal{T}'$ построена.

(c) Рассмотрим в $\mathcal{T}$ две аксиомы $A \equiv C$ и $B \equiv D$, такие что B входит в C. Обозначим $C_1 := C[B/D]$ и рассмотрим терминологию $\mathcal{T}_1$, полученную из $\mathcal{T}$ заменой аксиомы $A \equiv C$ на $A \equiv C_1$. Так как терминология $\mathcal{T}'$ получается из $\mathcal{T}$ цепочкой аналогичных шагов, то достаточно доказать эквивалентность $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_1$. Но она очевидна, т.к. $\mathcal{T} \models A \equiv C_1$ и $\mathcal{T}_1 \models A \equiv C$, значит все аксиомы $\mathcal{T}_1$ следуют из $\mathcal{T}$ и наоборот.

(d) Очевидно, что в предыдущем рассуждении терминологии $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_1$ имеют одни и те же базовые и производные концепты. Следовательно, по индукции это же справедливо для пары $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$. ◀

Теорема 2.7. *Всякая ацикличная терминология является корректной.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ — ацикличная терминология. Строим ее развертку $\mathcal{T}'$. По лемме 2.6 она корректна, эквивалентна $\mathcal{T}$ и имеет те же базовые и производные символы, что и $\mathcal{T}$. Тогда по лемме 2.3 терминология $\mathcal{T}$ тоже корректна. ◀

Возникает вопрос: только ли ацикличные терминологии обладают свойством корректности? В буквальном смысле — нет. Например, терминология, состоящая из единственной аксиомы

$$A \;\equiv\; \forall R.B \sqcup \exists R.(A \sqcap \neg A)$$

очевидно, является цикличной, т.к. A зависит от A. Однако эта цикличность «фиктивна», так как концепт $\exists R.(A \sqcap \neg A)$ эквивалентен $\bot$, а значит аксиому можно переписать в эквивалентном виде: $A \equiv \forall R.B$, что уже является ацикличной, а следовательно, и корректной терминологией. Этот пример типичен, а именно справедлив следующий общий факт.

Теорема 2.8. *Всякая корректная терминология эквивалентна некоторой ацикличной.*

Мы не будем приводить здесь доказательство этой теоремы. Скажем лишь, что она является переформулировкой для ДЛ следующей известной Теоремы Бета (E.W. Beth) об определимости для модальной логики $\mathbf{K}_n$, которая, как мы видели выше, есть по сути ДЛ $\mathcal{ALC}$.

Пусть $p, q, \vec{r}$ — список различных переменных, $A(p,\vec{r})$ — модальная формула с переменными p и $\vec{r}$, $A(q,\vec{r})$ — результат подстановки q вместо p в формулу A. Говорят, что формула A *неявно определяет переменную* p, если формула $(A(p,\vec{r}) \wedge A(q,\vec{r})) \to (p \leftrightarrow q)$ общезначима (то есть истинна во всех моделях). Говорят, что формула A *явно определяет переменную* p, если существует формула $B(\vec{r})$, такая что формула $A(p,\vec{r}) \to (p \leftrightarrow B(\vec{r}))$ общезначима. Очевидно, что явная определимость влечет неявную.

Теорема 2.9 (Теорема Бета об определимости, [3])**.** *Неявная определимость влечет явную: для любой формулы $A(p,\vec{r})$, если A неявно определяет переменную p, то A явно определяет переменную p.*

Важнейшее свойство ацикличных терминологий — их устранимость: проблема выполнимости концептов относительно ацикличной терминологии сводится к проблеме выполнимости концептов без терминологий вовсе. Докажем это свойство.

Теорема 2.10 (Устранимость ацикличных терминологий)**.** *Если терминология $\mathcal{T}$ ациклична, то для произвольного концепта C имеет место эквивалентность:*

$$\textit{концепт } C \textit{ выполним отн. } \mathcal{T} \iff \textit{концепт } C_{\mathcal{T}} \textit{ выполним.}$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{I}$ — модель $\mathcal{T}$, в которой $C^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$. По лемме 2.5 имеем $\mathcal{T} \models C \equiv C_{\mathcal{T}}$, значит $(C_{\mathcal{T}})^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$, т.е. концепт $C_{\mathcal{T}}$ выполним.

$(\Leftarrow)$ Если $C_{\mathcal{T}}$ выполним, то пусть $\mathcal{J}$ — такая интерпретация, что $(C_{\mathcal{T}})^{\mathcal{J}} \neq \varnothing$, при этом можно считать, что $\mathcal{J}$ — базовая интерпретация, т.к. в $C_{\mathcal{T}}$ встречаются лишь базовые концепты. Поскольку $\mathcal{T}$ ациклична, то она корректна, значит существует (и даже единственное) расширение $\mathcal{I}$ интерпретации $\mathcal{J}$, являющееся моделью $\mathcal{T}$. Так как $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ совпадают на базовых концептах, то $(C_{\mathcal{T}})^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$. Но по лемме 2.5 имеем $\mathcal{T} \models C \equiv C_{\mathcal{T}}$, значит $C^{\mathcal{I}} = (C_{\mathcal{T}})^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$. Тем самым концепт C выполним относительно $\mathcal{T}$. ◀

Этот факт позволяет из разрешимости какой-либо ДЛ автоматически получать разрешимость этой же ДЛ с ацикличными терминологиями. Однако если изучается вопрос вычислительной сложности ДЛ, то данный факт зачастую уже менее полезен. Действительно, как мы видели выше, развертка концепта может быть экспоненциально длиннее исходного концепта, поэтому если в качестве первого шага алгоритма, проверяющего выполнимость концепта C относительно ацикличной терминологии $\mathcal{T}$, будет строиться развертка $C_{\mathcal{T}}$, то это приведет к экспоненциальному возрастанию времени работы алгоритма. Оказывается тем не менее, для многих (но не для всех) логик вычислительная сложность в присутствии ацикличных терминологий — такая же, как и без них, но разрешающий алгоритм для них более замысловатый.

2.2 Связь терминологий с модальной логикой

Отношение $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ в ДЛ соответствует в модальной логике отношению *глобального логического следования*.

Расписать подробнее.

Почему в ДЛ нужно именно глобальное следование, а не локальное? Пример: возьмем две аксиомы:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{Human} & \equiv & \mathsf{Man} \sqcup \mathsf{Woman} \\ \mathsf{Human} & \sqsubseteq & \forall \mathsf{hasChild}.\mathsf{Human} \end{array}$$

Они говорят, что всякий человек является мужчиной или женщиной, а также у всякого человека любой ребенок является человеком. Следует ли отсюда следующее включение?

$$\mathsf{Human} \sqsubseteq \forall \mathsf{hasChild}.(\mathsf{Man} \sqcup \mathsf{Woman})$$

Оно означает, что у всякого человека любой ребенок является мужчиной или женщиной. Интуитивно, да, следует. И действительно, оно является глобальным логическим следствием из наших двух аксиом. Однако, локально оно не следует; чтобы убедиться в этом, предъявим интерпретацию, в которой исходные две аксиомы верны в некоторой *точке*, но вышенаписанное включение *в этой точке* не верно.

$\Delta = \{a, b\}$, $R^{\mathcal{I}} = \{\langle a, b\rangle\}$, $\mathsf{Human}^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $\mathsf{Man}^{\mathcal{I}} = \{a\}$, $\mathsf{Woman} = \varnothing$.

Можно немного упростить пример, а также переписать на модальном языке. Тогда получим, что из $H \to A$ и $H \to \Box A$ следует $H \to \Box A$ глобально, но не локально.

Таким образом, локальное следование слишком сильно для отражения реальных рассуждений с понятиями. Перейдем от рассмотрения следования к выполнимости. Тогда глобальная выполнимость сильнее локальной. И то, что для терминологии $\mathcal{T}$ мы всегда требуем, чтобы она была *глобально выполнима*, является более сильным условием «непротиворечивости», чем если бы мы требовали лишь локальной выполнимости.