Глава 1

Логика $\mathcal{ALC}$

Для того, чтобы задать какую-либо ДЛ, необходимо задать ее *синтаксис* и *семантику*. Синтаксис описывает, какие выражения (концепты, роли, аксиомы и т.п.) считаются правильно построенными в данной логике. Семантика указывает, как интерпретировать эти выражения, т.е. придает им формальный смысл.

Пусть $\mathsf{CN} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ и $\mathsf{RN} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ — конечные непустые множества *атомарных концептов* и *атомарных ролей* (называемых также *именами концептов* и *именами ролей*).

Определение 1.1 (Синтаксис логики $\mathcal{ALC}$)**.** Множество *концéптов* логики $\mathcal{ALC}$ задается следующим индуктивным определением:

- символы $\top$ и $\bot$ — концепты (называются *истина* и *ложь*);
- всякий атомарный концепт A является концептом;
- если C — концепт, то $\neg C$ — концепт (называется *дополнением* концепта C);
- если C и D — концепты, то $C \sqcap D$ и $C \sqcup D$ — концепты (*пересечение* и *объединение*);
- если C — концепт, а R — атомарная роль, то $\exists R.C$ и $\forall R.C$ — концепты;
- никакие другие выражения не являются концептами.

В дальнейшем для формулировки синтаксиса мы будем использовать более краткую запись. Так, синтаксис для концептов логики $\mathcal{ALC}$ в этой записи выглядит следующим образом:

$$\top \mid \bot \mid A \mid \neg C \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \exists R.C \mid \forall R.C,$$

где A — атомарный концепт, R — атомарная роль C, D — произвольные концепты.

Пример 1.1. Если атомарными концептами являются Animal, Cat, Human, Male, Female, а атомарными ролями являются $\mathsf{hasChild}$ и $\mathsf{hasParent}$, то концептами логики $\mathcal{ALC}$ будут выражения: $\mathsf{Human} \sqcap \mathsf{Female}$, $\mathsf{Male} \sqcap \mathsf{Cat}$, $\forall \mathsf{hasChild}.\neg\mathsf{Female}$, $\mathsf{Male} \sqcap \exists \mathsf{hasParent}.(\mathsf{Human} \sqcap \neg\mathsf{Male})$ и т.п.

Семантика логики $\mathcal{ALC}$ задается с помощью понятия интерпретации.

Определение 1.2 (Семантика логики $\mathcal{ALC}$)**.** *Интерпретация* есть пара $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$, состоящая из непустого множества Δ, называемого *областью* данной интерпретации, и интерпретирующей функции $\cdot^{\mathcal{I}}$, которая сопоставляет:

- каждому атомарному концепту $A \in \mathsf{CN}$ — произвольное подмножество $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta$;
- каждой атомарной роли $R \in \mathsf{RN}$ — произвольное подмножество $R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta \times \Delta$.

Интерпретирующая функция распространяется на множество всех концептов логики $\mathcal{ALC}$ однозначным образом — индукцией по построению концепта:

- $\top^{\mathcal{I}} = \Delta, \quad \bot^{\mathcal{I}} = \varnothing, \quad (\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta \setminus C^{\mathcal{I}}$;
- $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}, \quad (C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$;
- $(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{e \in \Delta \mid$ существует $d \in \Delta$ такой, что $\langle e, d\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ и $d \in C^{\mathcal{I}}\}$;
- $(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{e \in \Delta \mid$ для всех $d \in \Delta$ таких, что $\langle e, d\rangle \in R^{\mathcal{I}}$, выполнено $d \in C^{\mathcal{I}}\}$.

Пример 1.2. Рассмотрим следующую интерпретацию $\mathcal{I}$ языка из предыдущего примера. Областью Δ будет множество всех биологических особей. Атомарным концептам Animal, Cat, Human, Male, Female сопоставим множества всех животных, кошек, людей, особей мужского пола, особей женского пола. Атомарные роли $\mathsf{hasChild}$ и $\mathsf{hasParent}$ интерпретируем двуместными отношениями, связывающими всякую особь с ее ребенком и всякую особь с ее родителем, соответственно. Другими словами, пара $\langle e, d\rangle$ принадлежит отношению $\mathsf{hasChild}^{\mathcal{I}}$, если d является ребенком e, а отношение $\mathsf{hasParent}^{\mathcal{I}}$ является обратным к $\mathsf{hasChild}^{\mathcal{I}}$.

Тогда все перечисленные в предыдущем примере составные концепты приобретают следующий смысл: концепт $\mathsf{Human} \sqcap \mathsf{Female}$ при такой интерпретации обозначает множество людей женского пола (т.е. женщин), $\mathsf{Male} \sqcap \mathsf{Cat}$ — множество котов (мужских особей), $\forall \mathsf{hasChild}.\neg\mathsf{Female}$ — множество особей, все дети которых не женского пола, $\mathsf{Male} \sqcap \exists\mathsf{hasParent}.(\mathsf{Human} \sqcap \neg\mathsf{Male})$ — множество особей мужского пола, у которых есть родитель, являющийся человеком не мужского пола.

Упражнение 1.1. Пусть в языке имеются атомарные концепты A и B и атомарные роли R и S. Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{I}$ с областью $\Delta = \{a, b, c, d\}$, в которой задано: $A^{\mathcal{I}} = \{a, c\}$, $B^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$, $R^{\mathcal{I}} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$, $S^{\mathcal{I}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$.

Найти интерпретацию концептов: $A \sqcap B$, $\exists S.A$, $\forall R.B$, $\exists R.\bot$, $\exists R.\top$, $\forall R.\bot$, $\forall R.\top$, $\exists R.\forall S.\bot$.

Следующие определения являются важными в дескрипционной логике; они применимы не только к логике $\mathcal{ALC}$, но и к любой ДЛ.

Определение 1.3. Концепт C *выполним*, если существует такая интерпретация $\mathcal{I}$, что $C^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$. При этом $\mathcal{I}$ называется *моделью* концепта C.

Концепты C и D называются *эквивалентными* (обозначение: $C \equiv D$), если в любой интерпретации $\mathcal{I}$ имеем $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$. Концепт C *вложен в* концепт D (обозначение: $C \sqsubseteq D$), если в любой интерпретации $\mathcal{I}$ имеем $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$. Концепты C и D называются *непересекающимися*, если в любой интерпретации $\mathcal{I}$ имеем $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \varnothing$.

Пример 1.3. Очевидно, что справедливы эквивалентности и вложения концептов, являющиеся аналогами законов, выполняющихся для пересечения, объединения и дополнения множеств. Например, $A \sqcap B \sqsubseteq A$ и $A \sqcap B \equiv B \sqcap A$. Более интересны эквивалентности и вложения с участием кванторов.

Концепт $\exists R.\bot$ в любой интерпретации обозначает множество элементов, у которых существует R-последователь, принадлежащий пустому множеству $\bot^{\mathcal{I}}$. Так как пустому множеству никакой элемент принадлежать не может, то значит концепт $\exists R.\bot$ обозначает множество элементов, обладающих невыполнимым свойством, т.е. пустое множество. С другой стороны, $\bot$ тоже всегда интерпретируется как пустое множество. Отсюда следует, что имеет место эквивалентность: $\exists R.\bot \equiv \bot$. Аналогично: $\forall R.\top \equiv \top$.

Упражнение 1.2. **a)** Доказать следующие эквивалентности и вложения; показать, что обратные вложения неверны:

$$\begin{array}{ll} \exists R.(A \sqcup B) \equiv \exists R.A \sqcup \exists R.B & \qquad \forall R.(A \sqcap B) \equiv \forall R.A \sqcap \forall R.B \\ \exists R.(A \sqcap B) \sqsubseteq \exists R.A \sqcap \exists R.B & \qquad \forall R.(A \sqcup B) \sqsupseteq \forall R.A \sqcup \forall R.B \end{array}$$

b) Установить эквивалентности: $\neg\exists R.C \equiv \forall R.\neg C$, $\neg\forall R.C \equiv \exists R.\neg C$.
c) Охарактеризуйте множество, являющееся интерпретацией концепта $\forall R.\bot$, $\exists R.\top$.
d) Выполним ли концепт: $\exists R.A \sqcap \forall R.\neg A$?
e) Справедливо ли вложение: $\exists R.A \sqcap \exists R.(\neg A \sqcup B) \sqsubseteq \exists R.B$?

На практике обычно возникают задачи: по заданному концепту выяснить его выполнимость, а также по заданным двум концептам выяснить, имеет ли место их эквивалентность, вложение или непересекаемость. Однако нет необходимости создавать независимые алгоритмы для решения этих задач, так как все они сводятся друг к другу, что демонстрируют следующие легко доказываемые леммы.

Лемма 1.1 (Сводимость к вложению концептов)**.** *Для любых концептов C и D справедливо:*

(a) *C невыполним $\iff$ $C \sqsubseteq \bot$;*
(b) *$C \equiv D$ $\iff$ $C \sqsubseteq D$ и $D \sqsubseteq C$;*
(c) *C и D не пересекаются $\iff$ $C \sqcap D \sqsubseteq \bot$.*

Лемма 1.2 (Сводимость к невыполнимости концептов)**.** *Для любых концептов C и D справедливо:*

(a) *$C \sqsubseteq D$ $\iff$ концепт $C \sqcap \neg D$ невыполним;*
(b) *$C \equiv D$ $\iff$ концепты $C \sqcap \neg D$ и $D \sqcap \neg C$ оба невыполнимы;*
(c) *C и D не пересекаются $\iff$ концепт $C \sqcap D$ невыполним.*

Упражнение 1.3. Докажите эти леммы.

1.1 Вложение логики $\mathcal{ALC}$ в логику предикатов

Мы считаем, что читатель знаком с синтаксисом и семантикой логики предикатов (также известной как логика первого порядка). Многие ДЛ, включая $\mathcal{ALC}$, можно рассматривать как фрагменты логики предикатов при «естественном» переводе концептов в предикатные формулы. Собственно, о возможности такого перевода легко догадаться, посмотрев на семантику логики $\mathcal{ALC}$.

Пусть в языке логики $\mathcal{ALC}$ имеются атомарные концепты $A_1, \ldots, A_m$ и атомарные роли $R_1, \ldots, R_n$. Возьмем в языке логики предикатов одноместные предикатные символы $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ и двуместные предикатные символы $S_1(x, y), \ldots, S_n(x, y)$. Будем считать, что в языке логике предикатов есть также логические связки $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \to$ и кванторы $\forall$ и $\exists$. Перевод состоит в сопоставлении каждому концепту C логики $\mathcal{ALC}$ формулы $\Phi_C(x)$ от одной переменной; строится он индукцией по построению концепта:

- концептам $\bot$ и $\top$ сопоставляем формулы $\bot$ и $\top$ соответственно;
- атомарному концепту A_i сопоставляем формулу $P_i(x)$;
- концептам $\neg C$, $C \sqcap D$, $C \sqcup D$ сопоставляем формулы $\neg\Phi_C(x)$, $\Phi_C(x) \wedge \Phi_D(x)$, $\Phi_C(x) \vee \Phi_D(x)$ соответственно;
- концепту $\exists R_j.C$ сопоставляем формулу $\exists y(S_j(x, y) \wedge \Phi'_C(y))$, концепту $\forall R_j.C$ сопоставляем формулу $\forall y(S_j(x, y) \to \Phi'_C(y))$, где $\Phi'_C(y)$ получена из $\Phi_C(x)$ заменой всех вхождений x на y, а y на x.

Пример 1.4. Пусть имеется концепт $A_1 \sqcap \exists R_1.(A_2 \sqcup \forall R_2.\neg A_1)$. Сначала строим формулу, отвечающую концепту $A_2 \sqcup \forall R_2.\neg A_1$. Это будет $P_2(x) \vee \forall y(S_2(x, y) \to \neg P_1(y))$; обозначим ее через $\Phi(x)$. Поменяем в ней местами переменные x и y, тем самым получим формулу $\Phi'(y)$: $P_2(y) \vee \forall x(S_2(y, x) \to \neg P_1(x))$. Наконец, перевод исходного концепта будет следующим: $P_1(x) \wedge \exists y(S_1(x, y) \wedge \Phi'(y))$, то есть окончательно:

$$P_1(x) \wedge \exists y\Big(S_1(x, y) \wedge \big(P_2(y) \vee \forall x(S_2(y, x) \to \neg P_1(x))\big)\Big).$$

Не всякая формула логики предикатов может быть получена как перевод некоторого концепта. Например, формула $\forall x P_1(x)$ не может. Несложно видеть, при переводе могут получиться лишь формулы, в которых кванторы «ограничены» вторым аргументом какого-либо двуместного предиката.

Напомним, что семантика логики предикатов задается с помощью понятия интерпретации $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$. Полное определение мы приводить здесь не будем. В частности, определено понятие «формула $\Phi(x)$ от одной свободной переменной в интерпретации $\mathcal{I}$ истинна на элементе $e \in \Delta$», обозначаемое как $\mathcal{I} \models \Phi(e)$. Множество элементов модели $\mathcal{I}$, на которых формула $\Phi(x)$ истинна, обозначим $\Phi^{\mathcal{I}} = \{e \in \Delta \mid \mathcal{I} \models \Phi(e)\}$. Основной факт об описанном переводе состоит в том, что данный перевод согласуется с семантикой ДЛ и логики предикатов, что утверждает следующая легко доказываемая лемма.

Лемма 1.3. *Для любого концепта C и любой интерпретации $\mathcal{I}$ имеет место: $C^{\mathcal{I}} = (\Phi_C)^{\mathcal{I}}$, если атомарные концепты и роли (в ДЛ) и соответствующие им одно- и двуместные предикатные символы (в ЛП) интерпретированы в $\mathcal{I}$ одинаково.*

Тем самым проблема выполнимости концептов логики $\mathcal{ALC}$ сведена к проблеме выполнимости формул логики предикатов. В практическом плане это дает мало, поскольку логика предикатов неразрешима. Однако важное наблюдение состоит в том, что при переводе концептов в формулы мы смогли обойтись всего двумя переменными x и y. Таким образом, логика $\mathcal{ALC}$ погружена в логику предикатов с двумя переменными, обозначаемую как $\mathcal{L}^2$. Как было установлено в 1975 году (Mortimer), логика $\mathcal{L}^2$ разрешима. Как следствие, наш перевод автоматически даёт разрешимость логики $\mathcal{ALC}$. Стоит правда заметить, что вычислительная сложность логики $\mathcal{L}^2$ (класс NExpTime) гораздо выше, чем у логики $\mathcal{ALC}$ (класс PSpace). Об этих и других классах сложности мы будем говорить далее. Заметим, что перевод в логику $\mathcal{L}^2$ работает также и для других дескрипционных логик.

1.2 Вложение логики $\mathcal{ALC}$ в модальную логику

Данный параграф предназначен для читателей, знакомых с модальной логикой. На первый взгляд синтаксис ДЛ является непривычным для тех, кто имел дело с «традиционными» логиками (логикой высказываний, логикой предикатов, модальной логикой и др.). Однако уже в 1991 году (Klaus Schild) было обнаружено, что ДЛ $\mathcal{ALC}$ есть не что иное, как записанная в других обозначениях модальная логика $\mathbf{K}_n$, имеющая n независимых модальностей. Перевод из $\mathcal{ALC}$ в $\mathbf{K}_n$ осуществляется следующим образом.

Пусть в языке логики $\mathcal{ALC}$ имеются атомарные концепты $A_1, \ldots, A_m$ и атомарные роли $R_1, \ldots, R_n$. Возьмем модальный язык с пропозициональными переменными $p_1, \ldots, p_m$ и модальными операторами «необходимости» $\Box_1, \ldots, \Box_n$. Будем считать, что в языке есть и двойственные им модальные операторы «возможности» $\Diamond_1, \ldots, \Diamond_n$ (которые, впрочем, выражаются через операторы необходимости: $\Diamond_j\varphi \equiv \neg\Box_j\neg\varphi$), а также логические связки $\top, \bot, \neg, \wedge, \vee$. Напомним синтаксис модальной логики $\mathbf{K}_n$:

$$\top \mid \bot \mid p_i \mid \neg\varphi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond_j\varphi \mid \Box_j\varphi.$$

Перевод состоит в сопоставлении каждому концепту C логики $\mathcal{ALC}$ модальной формулы φ_C. Строится данный перевод индукцией по построению концепта:

- концептам $\bot$ и $\top$ сопоставляем формулы $\bot$ и $\top$ соответственно;
- атомарному концепту A_i сопоставляем переменную p_i;
- концептам $\neg C$, $C \sqcap D$, $C \sqcup D$ сопоставляем формулы $\neg\varphi_C$, $\varphi_C \wedge \varphi_D$, $\varphi_C \vee \varphi_D$ соответственно;
- концепту $\exists R_j.C$ сопоставляем формулу $\Diamond_j \varphi_C$, а концепту $\forall R_j.C$ — формулу $\Box_j \varphi_C$.

Пример 1.5. Концепт $A_1 \sqcap \exists R_1.(A_2 \sqcup \forall R_2.\neg A_1)$ при таком переводе перейдет в модальную формулу $p_1 \wedge \Diamond_1(p_2 \vee \Box_2 \neg p_1)$.

Легко видеть, что данный перевод является обратимым, т.е. всякая модальная формула является переводом какого-то концепта. Именно это (вместе с согласованностью семантик, о которой мы скажем ниже) позволяет говорить, что логика $\mathcal{ALC}$ есть записанная в других обозначениях модальная логика $\mathbf{K}_n$. Это существенное отличие данного перевода от перевода в логику предикатов.

Напомним, что семантика модальной логики задается с помощью так называемых *моделей Крипке*, которые по существу определяются точно так же, как и интерпретации для логики $\mathcal{ALC}$. Если модальная формула φ в модели Крипке $\mathcal{I}$ истинна в точке $e \in \Delta$, то этот факт записывают так: $\mathcal{I}, e \models \varphi$. Множество тех точек модели $\mathcal{I}$, в которых формула ψ истинна, мы обозначим как $\varphi^{\mathcal{I}} = \{e \in \Delta \mid \mathcal{I}, e \models \varphi\}$. Основное утверждение о построенном переводе заключается в том, что семантика логики $\mathcal{ALC}$ согласована с семантикой логики $\mathbf{K}_n$; говоря точнее, имеет место следующая легко доказываемая лемма.

Лемма 1.4. *Для любого концепта C и любой интерпретации $\mathcal{I}$ имеет место: $C^{\mathcal{I}} = (\varphi_C)^{\mathcal{I}}$, если атомарные концепты и роли (в ДЛ) и соответствующие им пропозициональные переменные и модальности (в МЛ) интерпретированы в $\mathcal{I}$ одинаково.*