

# Глава 0

## Две семантики логики высказываний

Рассмотрим следующую задачу, часто встречающуюся в той или иной форме на практике. Пусть заданы некоторые соотношения между какими-то множествами; при формулировке этих соотношений разрешено использовать операции пересечения ( $\cap$ ), объединения ( $\cup$ ), дополнения ( $-$ ), знак пустого множества ( $\emptyset$ ), а также символы включения ( $\subseteq$ ) и равенства ( $=$ ) между множествами. Требуется выяснить, следует ли из заданных соотношений некоторое другое соотношение.

**Пример 0.0.1.** Даны следующие соотношения (будем называть их аксиомами):

- |  |  |
|--|--|
| (1) $\text{Animal} = \text{Male} \cup \text{Female}$ , | (5) $\text{Woman} = \text{Human} \cap \text{Female}$ ,   |
| (2) $\text{Male} \cap \text{Female} = \emptyset$ ,     | (6) $\text{Father} \subseteq \text{Man}$ ,               |
| (3) $\text{Human} \subseteq \text{Animal}$ ,           | (7) $\text{Mother} \subseteq \text{Woman}$ ,             |
| (4) $\text{Man} = \text{Human} \cap \text{Male}$ ,     | (8) $\text{Parent} = \text{Father} \cup \text{Mother}$ . |

Интуитивно, эти утверждения читаются так: животные состоят из особей мужского и женского пола, причем последние не пересекаются; люди являются животными; мужчина — это человек мужского пола; женщина — человек женского пола; отцы являются мужчинами, матери — женщинами; родитель — это отец или мать.

Требуется выяснить, следуют ли из данных аксиом следующие соотношения:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\text{Human} = \text{Man} \cup \text{Woman}$ ,       | (e) $\text{Parent} \subseteq \text{Human}$ , |
| (b) $\text{Woman} = \text{Human} \cap \neg \text{Male}$ , | (f) $\text{Mother} \subseteq \text{Male}$ ,  |
| (c) $\text{Father} \subseteq \text{Male}$ ,               | (g) $\text{Mother} = \text{Woman}$ .         |
| (d) $\text{Father} \cap \text{Mother} = \emptyset$ ,      |  |

Интуитивно кажется, что утверждения (a–e) следуют, а утверждения (f) и (g) не следуют из наших аксиом.

Чтобы установить, что некоторое утверждение  $\varphi$  *следует* из набора утверждений  $T$ , достаточно привести рассуждение (или «вывод») утверждения  $\varphi$  из  $T$ . Например, утверждение (c) следует из (4) и (6) (и некоторых общеизвестных свойств знаков  $\cap$ ,  $\subseteq$ ). Напротив, чтобы доказать, что некоторое утверждение  $\varphi$  *не следует* из набора аксиом  $T$ , нужен другой метод. Наиболее типичный подход — нужно придумать некоторый «инвариант», то есть свойство, которым обладают все утверждения из  $T$  и все утверждения, «логически следующие» из них, но не обладает утверждение  $\varphi$ . Этот инвариант можно предъявить, например, посредством задания *семантики*, то есть точного математического смысла понятия логического следования. В приведенном выше примере если именам  $\text{Human}$ ,  $\text{Man}$ ,  $\text{Woman}$  и т.д. приписать множества ныне живущих людей, мужчин, женщин и т.д., то все аксиомы будут истинными, и все утверждения, логически следующие из них, тоже будут истинными, тогда как утверждения (f) и (g) окажутся ложными.

Все утверждения из примера выше легко переписать в виде формул логики высказываний, сопоставив знакам  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $-$ ,  $\subseteq$ ,  $=$  логические связки  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ . В логике высказываний же есть понятие логического следования, обозначаемое как  $T \models \varphi$  и означающее следующее: для любого приписывания переменным значений «истина» и «ложь», если все формулы из  $T$  превращаются в истину, то и формула  $\varphi$  — тоже. Однако, интуитивно кажется, что такая «двузначная» семантика для нашей задачи неуместна, так как здесь мы имеем дело не с высказываниями (и логическими операциями над ними), а с множествами и операциями (и включениями) над ними. Поэтому нам нужна другая семантика, приписывающая именам  $\text{Human}$ ,  $\text{Man}$ ,  $\text{Woman}$  какие-то множества.

Ниже мы рассмотрим такую семантику и сравним ее с «двузначной». Как мы выясним, эти две семантики равнозначны: понятие логического следования в них совпадает!

## 0.1 Синтаксис логики высказываний

Формулы строятся из счетного числа переменных  $\text{Var} = \{p_0, p_1, \dots\}$  и логических констант  $\perp, \top$  с помощью логических связок  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$  согласно следующему синтаксису (где  $p \in \text{Var}$ ):

$$\varphi ::= \perp \mid \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \mid (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

Пример формулы:  $((p \vee q) \rightarrow p) \wedge \neg r$ . Множество всех формул обозначим  $\text{Fm}$ .

Теория (пропозициональная) — это произвольное множество формул  $\mathcal{T} \subseteq \text{Fm}$ . Формулы, составляющие теорию, называются ее *аксиомами*. Мы дадим два определения понятия «формула логически следует из теории».

## 0.2 Булева (или двузначная) семантика

**Определение 0.2.1.** Оценка переменных — это функция  $i: \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ . Вместо  $i(p)$  будем писать  $p^i$ .

Оценку  $i$  можно распространить на всё множество формул  $\text{Fm}$ , то есть построить функцию  $i: \text{Fm} \rightarrow \{0, 1\}$ , индукцией по построению формул, согласно известным читателю таблицам истинности для логических связок. Таким образом, каждой формуле  $\varphi$  оценка  $i$  сопоставляет значение  $i(\varphi)$ , или мы будем писать  $\varphi^i$ , из множества  $\{0, 1\}$ . Напомним, что всегда  $\perp^i = 0$  и  $\top^i = 1$ .

Факт  $\varphi^i = 1$  будем читать «формула  $\varphi$  истинна при оценке  $i$ » и записывать  $i \models \varphi$ .

**Определение 0.2.2** (Общезначимость и выполнимость формул).

- Формула  $\varphi$  называется *общезначимой*,<sup>1</sup> если она истинна при всех оценках:  $\forall i \ i \models \varphi$ .
- Формула  $\varphi$  называется *выполнимой*, если она истинна при некоторой оценке:  $\exists i \ i \models \varphi$ .

Эти два понятия очевидным образом связаны: *формула  $\varphi$  общезначима*  $\iff$  *формула  $\neg\varphi$  не выполнима*. Напомним также два дополнительных понятия.

- Формула  $\varphi$  называется *опровержимой*, если она ложна при некоторой оценке:  $\exists i \ i \not\models \varphi$ .
- Формула  $\varphi$  называется *противоречивой*, если она ложна при всех оценках:  $\forall i \ i \not\models \varphi$ .

**Задача.** Как связаны друг с другом эти четыре понятия?

Говорят, что теория  $\mathcal{T}$  истинна при оценке  $i$ , обозначение:  $i \models \mathcal{T}$ , если все ее аксиомы истинны при оценке  $i$ .

**Определение 0.2.3** (Логическое следование). Из теории  $\mathcal{T}$  *следует* формула  $\varphi$ , обозначение:<sup>2</sup>  $\mathcal{T} \models \varphi$ , если для любой оценки  $i$  из того, что  $\mathcal{T}$  истинна при  $i$ , следует, что  $\varphi$  истинна при  $i$ :

$$\forall i \ (i \models \mathcal{T} \implies i \models \varphi).$$

Ясно, что при  $\mathcal{T} = \emptyset$  получается определение общезначимости формулы  $\varphi$  из определения 0.2.2.

**Определение 0.2.4.** Формула  $\varphi$  называется *выполнимой относительно теории  $\mathcal{T}$* , если  $\varphi$  истинна при некоторой оценке, при которой истинна и теория  $\mathcal{T}$ :

$$\exists i \ (i \models \mathcal{T} \text{ и } i \models \varphi).$$

Опять при  $\mathcal{T} = \emptyset$  получаем обычное определение выполнимости формулы  $\varphi$  из определения 0.2.2.

Очевидна связь: *формула  $\varphi$  следует из теории  $\mathcal{T}$*   $\iff$  *формула  $\neg\varphi$  не выполнима относительно  $\mathcal{T}$* .

Следующая задача показывает, что в случае конечных теорий (а нас в основном будет интересовать именно такой случай) достаточно изучать следование одной формулы из другой.

**Задача.** Пусть  $\mathcal{T}$  — конечная теория:  $\mathcal{T} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  и пусть  $\psi = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  — конъюнкция ее аксиом. Тогда для любой формулы  $\varphi$  верна эквивалентность:  $\mathcal{T} \models \varphi \iff \psi \models \varphi$ .

**Задача.** Докажите, что  $\psi \models \varphi \iff \models (\psi \rightarrow \varphi)$ .

Таким образом, логическое следование сводится к его частному случаю — общезначимости формул.

**Задача.** Докажите, что существует алгоритм, распознающий общезначимость формул.

<sup>1</sup>Или *тавтологией*, и этот факт записывается как  $\models \varphi$ .

<sup>2</sup>Как всегда в логике, мы используем тот же значок  $\models$ , но в ином смысле, нежели в  $i \models \varphi$ .

### 0.3 Предикатная семантика (семантика множеств)

Идея состоит в том, что теперь высказываниям будут приписываться не значения «истина» и «ложь» (обозначавшиеся нами 1 и 0), а множества, точнее, подмножества некоторого множества.

**Определение 0.3.1** (Интерпретация). *Интерпретация* — это пара  $\mathcal{I} = (\Delta, f)$ , где  $\Delta$  — произвольное непустое множество, называемое *областью* или *носителем* данной интерпретации,  $f$  — так называемая *интерпретирующая функция*, сопоставляющая каждой переменной  $p \in \text{Var}$  какое-нибудь подмножество  $f(p) \subseteq \Delta$ .

Договоримся вместо  $f(p)$  писать  $p^{\mathcal{I}}$ , а саму интерпретацию записывать как<sup>3</sup>  $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$ .

Интерпретирующая функция распространяется с переменных на все формулы по индукции (пункты определения для связок  $\rightarrow$  и  $\leftrightarrow$  мы не приводим, так как эти связки выражаются через остальные известным образом):

$$\perp^{\mathcal{I}} = \emptyset; \quad \top^{\mathcal{I}} = \Delta; \quad (\neg\varphi)^{\mathcal{I}} = \Delta \setminus \varphi^{\mathcal{I}}; \quad (\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{I}} = \varphi^{\mathcal{I}} \cap \psi^{\mathcal{I}}; \quad (\varphi \vee \psi)^{\mathcal{I}} = \varphi^{\mathcal{I}} \cup \psi^{\mathcal{I}}.$$

**Пример.** Пусть  $\Delta = \{a, b, c, d\}$ , интерпретирующая функция задана так:  $p^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$  и  $q^{\mathcal{I}} = \{b, c\}$ . Тогда  $(\neg p)^{\mathcal{I}} = \{c, d\}$  и  $(p \rightarrow q)^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\}$ .

Факт  $\varphi^{\mathcal{I}} = \Delta$  будем читать «формула  $\varphi$  истинна при интерпретации  $\mathcal{I}$ » или « $\mathcal{I}$  является моделью формулы  $\varphi$ » и записывать это так:  $\mathcal{I} \models \varphi$ . Факт  $e \in \varphi^{\mathcal{I}}$  будем читать «формула  $\varphi$  истинна в точке  $e$  интерпретации  $\mathcal{I}$ » и записывать это так:  $\mathcal{I}, e \models \varphi$ .

**Определение 0.3.2** (Общезначимость и выполнимость формул).

- Формула  $\varphi$  называется *общезначимой*, если она истинна при всех интерпретациях:  $\forall \mathcal{I} \mathcal{I} \models \varphi$ .
- Формула  $\varphi$  называется *выполнимой*, если она истинна в некоторой точке некоторой интерпретации:  $\exists \mathcal{I} \exists e \in \Delta \mathcal{I}, e \models \varphi$ . Это можно записать короче:  $\exists \mathcal{I} \varphi^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ .

Связь между этими понятиями та же: *формула  $\varphi$  общезначима*  $\iff$  *формула  $\neg\varphi$  не выполнима*.

Истинность теории в точке  $(\mathcal{I}, e \models \mathcal{T})$  и в интерпретации  $(\mathcal{I} \models \mathcal{T})$  определяется очевидным образом; в последнем случае мы будем говорить, что  $\mathcal{I}$  является *моделью* теории  $\mathcal{T}$ .

**Определение 0.3.3** (Выполнимость относительно теории). Говорят, что формула  $\varphi$  *выполнима относительно теории  $\mathcal{T}$* , если  $\varphi$  истинна в некоторой точке некоторой модели теории  $\mathcal{T}$ :

$$\exists \mathcal{I} (\mathcal{I} \models \mathcal{T} \text{ и } \varphi^{\mathcal{I}} \neq \emptyset).$$

Очевидно, что при  $\mathcal{T} = \emptyset$  получаем обычное определение выполнимости формулы  $\varphi$  из определения 0.3.2.

Следующее определение вводит два понятия логического следования (в предикатной семантике).

**Определение 0.3.4** (Локальное и глобальное логическое следование).

- Говорят, что из теории  $\mathcal{T}$  *локально следует* формула  $\varphi$ , обозначение:  $\mathcal{T} \models^{loc} \varphi$ , если для любой точки любой интерпретации из истинности в ней теории  $\mathcal{T}$  следует истинность в ней формулы  $\varphi$ :

$$\forall \mathcal{I} \forall e \in \Delta (\mathcal{I}, e \models \mathcal{T} \implies \mathcal{I}, e \models \varphi).$$

- Говорят, что из теории  $\mathcal{T}$  *глобально следует* формула  $\varphi$ , обозначение:  $\mathcal{T} \models^{glob} \varphi$ , если  $\varphi$  истинна в любой модели теории  $\mathcal{T}$ :

$$\forall \mathcal{I} (\mathcal{I} \models \mathcal{T} \implies \mathcal{I} \models \varphi).$$

При  $\mathcal{T} = \emptyset$  в обоих случаях получается определение общезначимости формулы  $\varphi$  согласно определению 0.3.3.

**Задача.** Установите следующую связь: *формула  $\varphi$  глобально следует из теории  $\mathcal{T}$*   $\iff$  *формула  $\neg\varphi$  не выполнима относительно  $\mathcal{T}$* .

**Задача.** Докажите, что в случае конечных теорий (локальное и глобальное) логическое следование формулы из теории сводится к частному случаю — следованию формулы из формулы.

Для полноты картины введем еще одно важное для практики понятие.

**Определение 0.3.5.** Теория  $\mathcal{T}$  называется *совместной*, если она имеет хотя бы одну модель:  $\exists \mathcal{I} \mathcal{I} \models \mathcal{T}$ .

Очевидно,  $\mathcal{T}$  совместна  $\iff$  формула  $\top$  выполнима относительно теории  $\mathcal{T}$ .

<sup>3</sup>Это не какая-то рекуррентная формула, как может показаться, а лишь способ ввести два обозначения одновременно.

## 0.4 Эквивалентность двух семантик

К названиям понятий «общезначимость» и «выполнимость» мы будем добавлять «в БС» и «в ПС», ссылаясь на «булеву семантику» и «предикатную семантику», соответственно. Мы докажем следующие теоремы, из которых первая является частным случаем второй (при пустой теории).

**Теорема 0.4.1.** *Формула  $\varphi$  общезначима в БС  $\iff$  формула  $\varphi$  общезначима в ПС.*

**Теорема 0.4.2.** *Для любой теории  $\mathcal{T}$  и любой формулы  $\varphi$  эквивалентны следующие утверждения:*

- (a) *формула  $\varphi$  следует из теории  $\mathcal{T}$  в БС;*
- (b) *формула  $\varphi$  локально следует из теории  $\mathcal{T}$  в ПС;*
- (c) *формула  $\varphi$  глобально следует из теории  $\mathcal{T}$  в ПС.*

**Следствие 0.4.3.** *Для любой формулы  $\varphi$  верны следующие эквивалентности:*

- (a) *формула  $\varphi$  выполнима в БС  $\iff$  то же верно в ПС;*
- (b) *формула  $\varphi$  выполнима относительно теории  $\mathcal{T}$  в БС  $\iff$  то же верно в ПС.*

**Доказательство теоремы 0.4.2.**

(a)  $\Rightarrow$  (b). Пусть  $\mathcal{T} \models \varphi$ . Чтобы доказать, что  $\mathcal{T} \models^{loc} \varphi$ , возьмем произвольную интерпретацию  $\mathcal{I}$  и любой ее элемент  $e \in \Delta$ . По ним построим булеву оценку  $i$ , положив:  $i \models p \iff \mathcal{I}, e \models p$ .

**Утверждение.** *Для любой формулы  $\alpha$  имеем:  $i \models \alpha \iff \mathcal{I}, e \models \alpha$ .*

Доказывается простой индукцией по построению формулы. Пользуясь утверждением, получаем:

$$\mathcal{I}, e \models \mathcal{T} \implies i \models \mathcal{T} \implies i \models \varphi \implies \mathcal{I}, e \models \varphi.$$

Здесь первая и третья импликации следуют из утверждения, а вторая верна ввиду  $\mathcal{T} \models \varphi$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c). Из локального следования всегда вытекает глобальное. Это простое рассуждение, опирающееся на следующий закон логики: если верно  $\forall x (A(x) \Rightarrow B(x))$ , то верно и  $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a). Пусть  $\mathcal{T} \models^{glob} \varphi$ . Чтобы доказать, что  $\mathcal{T} \models \varphi$ , возьмем произвольную оценку  $i$ . По ней построим интерпретацию  $\mathcal{I} = (\{e\}, \cdot^{\mathcal{I}})$ , где  $\mathcal{I}, e \models p \iff i \models p$ . Очевидно, что  $\mathcal{I}, e \models \alpha \iff \mathcal{I} \models \alpha$ , для всякой формулы  $\alpha$ .

**Утверждение.** *Для любой формулы  $\alpha$  имеем:  $\mathcal{I} \models \alpha \iff i \models \alpha$ .*

Доказывается простой индукцией по построению формулы. Пользуясь утверждением, получаем:

$$i \models \mathcal{T} \implies \mathcal{I} \models \mathcal{T} \implies \mathcal{I} \models \varphi \implies i \models \varphi.$$

Теорема доказана.

**Выводы.**

1. Логика высказываний описывает не только законы, которым подчиняются логические операции над высказываниями (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и др.) и логическое следование между высказываниями, но также и законы, которым подчиняются операции над множествами (пересечение, объединение, дополнение) и включение между множествами.
2. В логике высказываний все проблемы (общезначимость формул, логическое следование (локальное, глобальное) формулы из конечной теории) сводятся к одной — выполнимости формул.
3. Булеву оценку можно рассматривать как одноэлементную интерпретацию.
4. Произвольная интерпретация является объединением никак не связанных между собой одноэлементных интерпретаций, то есть (в свете предыдущего замечания) совокупностью нескольких не связанных между собой булевых оценок.

Далее в курсе будут рассматриваться более выразительные языки, для которых понятия локального и глобального следования уже не эквивалентны (конечно, из локального по-прежнему будет вытекать глобальное, но не наоборот). В этих языках помимо связок  $\wedge, \vee, \neg$  имеются имена для двуместных отношений на области интерпретации, «связывающие» элементы интерпретации в единую структуру.