Вполне упорядоченные множества

1. В конечном слове из нулей и единиц разрешается заменить подслово 01 на 100.
а) Докажите, что рано или поздно получится слово, к которому нельзя применить эту операцию.
б) Зависит ли число операций от порядка, в котором они применяются, или только от начального слова?
в) Разрешим теперь заменять 01 на $100\ldots00$ (единицу с произвольным числом нулей). Может ли теперь получиться бесконечная последовательность операций (начальное слово конечно)?

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными (целыми неотрицательными) коэффициентами. Будем говорить, что P меньше Q, если $P(x) < Q(x)$ для всех достаточно больших x. Существует ли бесконечная последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots$, в которой каждый следующий меньше предыдущего?

3. В шахматном турнире каждый игрок сыграл с каждым по одному разу, при этом ничьих не оказалось, и абсолютного победителя (который бы выиграл у всех) — тоже. Докажите, что есть три игрока А, Б и В, которые выиграли друг у друга по кругу (А у Б, Б у В, В у А).

В *упорядоченном* (или, более точно, *линейно упорядоченном*) множестве для любых двух различных элементов a и b известно, какой из них больше, а какой меньше (мы будем записывать это обычным знаком $a < b$; запись $a \leqslant b$означает, что $a < b$ или $a = b$), и при этом отношение $<$ транзитивно ($a < b$ и $b < c$ влечёт $a < c$) и иррефлексивно ($a < a$ не выполнено ни для какого a).

4. Докажите, что следующие свойства линейно упорядоченного множества M равносильны:
(1) всякое непустое подмножество M имеет наименьший элемент;
(2) не существует бесконечной убывающей последовательности;
(3) выполнен принцип полной индукции: если $A(x)$ есть некоторое свойство элементов множества M, которое (для x) доказано в предположении верности $A(y)$ при любом $y < x$, то $A(x)$ верно при всех x.

Множества с таким свойством называются *вполне упорядоченными*.

5. а) Докажите, что во вполне упорядоченном множестве для любого элемента (кроме наибольшего, если он есть) есть непосредственно следующий (как определить это понятие?), но может не быть непосредственно предыдущего.
б) Докажите, что во вполне упорядоченном множестве любое ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань (дайте соответствующие определения).

Если A и B — два упорядоченных множества, то можно построить множества $A + B$ (все элементы A меньше всех элементов B, внутри каждого из множеств элементы сравниваются как раньше) и $A \times B$ (пара $\langle a, b\rangle$ меньше $\langle a', b'\rangle$, если $b < b'$ или если $b = b'$, но $a < a'$).

6. а) Будут ли множества $A + B$ и $A \times B$ вполне упорядочены, если таковы множества A и B?
б) Допустим, что множество $A + B$ вполне упорядочено. Следует ли отсюда, что A и B тоже вполне упорядочены?
в) Допустим, что множество $A \times B$ вполне упорядочено. Следует ли отсюда, что A и B тоже вполне упорядочены?
г) Будут ли верны следующие равенства? $A + B = B + A$; $A \times B = B \times A$; $A + (B + C) = (A + B) + C$, $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$; $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$; $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$.

Равенство здесь понимается как *изоморфизм*, то есть взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок (элементы в том же порядке, что и соответствующие им).

Будем говорить, что упорядоченное множество A меньше B, если B равно (изоморфно) $A+C$ при непустом C; другими словами, если A изоморфно *начальному отрезку* B (подмножеству, любой элемент которого меньше любого из остальных элементов).

7. Верно ли, что
а) если $A < B$ и $B < C$ в указанном смысле, то $A < C$?
б) вполне упорядоченное множество не может быть меньше самого себя?
в) любое собственное подмножество вполне упорядоченного множества A является вполне упорядоченным и меньше A (в смысле приведённого определения)?

г) если $A < B$, то $A + C < B + C$?
д) если $A < B$, то $C + A < C + B$?
е) если $A < B$, а C непусто, то $C \times A < C \times B$?
ж) если $A < B$, а C непусто, то $A \times C < B \times C$?

8. Докажите, что для любых двух вполне упорядоченных множеств A и B верно ровно одно из трёх: $A < B$, $B < A$ или $A = B$.

9. Компьютер сортирует массив из 100 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

10. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.

11. Дано слово в алфавите из натуральных чисел. Разрешается:
1) удалять последнюю букву, если она равна 0;
2) заменить подслово вида $B(n+1)$ на $(Bn)^k$, если все элементы подслова B превосходят n, где k произвольно. (Напоминание: $(Bn)^k = BnBnBn \dots Bn$ (k раз)). Доказать, что для любого начального слова любая последовательность преобразований такого рода приводит к пустому слову.

12. Рассматриваются слова в алфавите $\{a, b, c\}$. Допустимые подстановки: $aa \to bc$, $bb \to ac$, $cc \to ab$. Докажите, что любая последовательность таких преобразований для любого начального слова сходится (то есть получается слово, к которому нельзя применить никакой подстановки).