Факультатив по МЛ 20 октября 2022. Деревья решений и вопросная сложность

Пусть $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ – некоторая булева функция. Будем обозначать ее входные переменные через $x_1, \ldots, x_n$. *Деревом решений* T, вычисляющим функцию f, называется двоичное дерево, в котором каждая внутренняя вершина помечена какой-нибудь переменной x_i. Из каждой вершины выходит два ребра, одно из них помечено 0, другое 1. Каждый лист дерева помечен либо 0, либо 1. Вычисление на конкретном наборе входных переменных происходит следующим образом: в начале вычисления мы находимся в корне дерева. Находясь в какой-либо вершине, мы смотрим на значение переменной x_i, соответствующей этой вершине. Если $x_i = 1$, мы переходим в следующую вершину по 1-ребру, если же $x_i = 0$, мы переходим дальше по 0-ребру. Значение, соответствующее листу, которого мы таким образом достигаем, должно быть равно $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим через $\mathcal{T}_f$ множество всех деревьев решений, вычисляющих f. Сложность дерева решний T измеряется его глубиной $d(T)$. *Вопросной сложностью* для функции f называется

$$D(f) = \min_{T \in \mathcal{T}_f} d(T).$$

1. a) Постройте деревья решений, вычисляющие функции $\bigwedge_{i=1}^n x_i$, $\bigvee_{i=1}^n x_i$, $\bigoplus_{i=1}^n x_i$. **b)** Докажите, что всякая булева функция вычисляется некоторым деревом решений глубины n.

2. Докажите, что **a)** $D(\bigoplus_{i=1}^n x_i) = n$; **b)** $D(\bigwedge_{i=1}^n x_i) = n$; **c)** $D(\bigvee_{i=1}^n x_i) = n$.

3. Построить функцию f от трех переменных, у которой все переменные существенны (функцию f нельзя представить как функцию от меньшего количества булевых переменных) и вопросная сложность которой меньше 3.

4*. Построить монотонную функцию f от четырех переменных, у которой все переменные существенны и вопросная сложность которой меньше 4.

5. Пусть $n = k + 2^k$. И пусть функция f от n переменных на входе $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{2^k}$ выдает y_x, где x – число с двоичной записью $x_1 \ldots x_k$. Докажите, что **a)** $D(f) \le k + 1$, **b)** $D(f) \ge k + 1$.

6. Пусть все переменные f существенны. Докажите, что $D(f) \ge \log_2(n+1)$.

7. Пусть $n = k(k-1)/2$. Будем воспринимать набор значений переменных, как матрицу смежности неориентированного графа на k вершинах. **a)** Функция CON от n переменных возвращает 1, если этот граф связен, и возвращает 0, иначе. Докажите, что $D(\mathrm{CON}) = \Omega(n)$ (это означает, что $D(\mathrm{CON}) \ge \varepsilon n$ для некоторого положительного ε и всех достаточно больших n). **b)** Функция CICLE от n переменных возвращает 1, если этот граф содержит цикл, и возвращает 0, иначе. Докажите, что $D(\mathrm{CICLE}) = \Omega(n)$. **c)** Решите аналогичную задачу для функции BIP, которая возвращает 1, если граф двудолен, и возвращает 0, иначе. **d*)** Докажите, что $D(\mathrm{CON}) \ge n$ для всех $n \ge 2$. **e*)** Докажите, что $D(\mathrm{CICLE}) \ge n$ для всех $n > 2$. **f*)** Докажите, что $D(\mathrm{BIP}) \ge n$ для всех $n > 2$.

8*. Граф называется *скорпионом*, если в нем есть три вершины a, b, c такие, что вершина a соединена с вершиной b (и только с ней), вершина b соединена вершинами a и c (и только с ними), а вершина c соединена со всеми вершинами кроме a. Придумайте дерево разрешения глубины $O(k)$, определяющие по графу на k вершинах (заданному $n = k(k-1)/2$ булевыми переменными), является ли он скорпионом.

9*. Пусть функцию f можно записать в виде k-ДНФ (каждая конъюнкция содержит не более k литералов) и в виде m-КНФ (каждая дизъюнкция содержит не более m литералов). Докажите, что тогда функцию f можно вычислить деревом решений глубины km.

10. Докажите, что всякое дерево решений глубины меньше n для функции $\bigoplus_{i=1}^n x_i$ ошибается на половине всех входов.

11. Докажите, что аналогичное утверждение для функции $\bigwedge_{i=1}^n x_i$ неверно.