Программа курса

Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

(2018/2019 уч. год)

1. Предмет математической логики и теории алгоритмов.
   Проблема обоснования математики. Исследование непротиворечивости и полноты аксиоматических теорий. Алгоритмические проблемы в математике.

Логика высказываний

2. Пропозициональные формулы. Лемма об однозначном анализе формул (без док.) Подформулы.
3. Двузначные оценки пропозициональных переменных. Продолжение оценок на формулы. Тавтологии и выполнимые формулы.
4. Булевы функции, отвечающие формулам. Таблицы истинности формул. Равносильные формулы.
5. Примеры равносильных формул.
6. Сигнальные формулы. Теорема о функциональной полноте для булевых финкций.
7. Элементарные конъюнкции. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Теорема существования и единственности СДНФ.
8. Двойственность. Теорема существования и единственности СКНФ (без док.).
9. Булевы алгебры. Булева алгебра подмножеств. Изоморфизм булевых алгебр. Теорема Стоуна (без док.). Примеры счетных булевых алгебр.
10. Оценки в булевой алгебре. Продолжение оценок на формулы. Равносильность и общезначимость формул в булевой алгебре.
11. Теорема: все формулы, общезначимые в нетривиальной булевой алгебре — тавтологии.
12. Исчисление высказываний (CL). Выводы (формальные доказательства) и теоремы CL.
13. Вывод формулы $A \to A$. Вывод из гипотез.
14. Свойства отношения выводимости. Допустимые и производные правила. Примеры допустимых правил.
15. (Мета)теорема о дедукции для CL.
16. (Мета)теорема корректности для CL: общезначимость теорем в булевых алгебрах. Непротиворечивость CL.
17. Непротиворечивые множества формул в CL. Свойства максимальных непротиворечивых множеств (построенных из подформул и их отрицаний).
18. Теорема о семантической полноте CL: выводимость всех тавтологий.
19. Теорема о совпадении множества общезначимых формул для всех нетривиальных булевых алгебр.

Логика предикатов

20. Сигнатура. Термы, атомарные формулы, формулы. Лемма об однозначном анализе термов и формул (без док.).
21. Модель данной сигнатуры. Замкнутые термы. Определение значений замкнутых термов в модели; его корректность.
22. Замкнутые формулы. Определение значений замкнутых атомарных формул в модели; его корректность.
23. Расширенная сигнатура модели. Оцененные термы и формулы. Определения значений оцененных термов и формул в модели; их корректность.
24. Истинность замкнутой формулы в модели. Выполнимость и общезначимость замкнутых формул.
25. Теория первого порядка. Модель теории. Выполнимые (совместные) теории.
26. Чистая теория равенства Eq. Нормальные модели.

27. Отношение логического следования для теорий 1-го порядка и замкнутых формул.
28. Эквивалентные теории. Элементарная теория модели. Элементарно эквивалентные модели.
29. Полные теории. Неполнота теории Eq. Формулы, ограничивающие мощность нормальных моделей.
30. Равносильные условия полноты для выполнимой теории: элементарная эквивалентность всех моделей; эквивалентность всех выполнимых расширений.
31. Изоморфизм и изоморфность моделей.
32. Преобразование значений оцененных термов при изоморфизме моделей.
33. Преобразование значений оцененных формул при изоморфизме моделей.
34. Элементарная эквивалентность изоморфных моделей.
35. Определимые в модели предикаты и отношения; их инвариантность при автоморфизме.
36. Стандартные теории равенства. Лемма о нормализации.
37. Сильно категоричные теории с равенством. Полнота сильно категоричной теории. Примеры сильно категоричных теорий.
38. Сильная категоричность и конечная аксиоматизируемость элементарной теории конечной модели (конечной сигнатуры). Следствие: модель, элементарно эквивалентная конечной модели M, изоморфна M.
39. Универсальное замыкание формулы; условие его истинности в модели.
40. Определение общезначимости и равносильности для незамкнутых формул. Лемма о тавтологиях. Свойства отношения равносильности. Примеры равносильных формул.
41. Лемма о равносильности любой формулы формуле с тесными отрицаниями.
42. Предваренная нормальная форма. Теорема о приведении к предваренной нормальной форме.
43. Исчисление предикатов (PC). Вывод (доказательство); теоремы; вывод из гипотез; допустимые правила. Примеры теорем и допустимых правил; правила Бернайса.
44. Теорема о дедукции для PC.
45. Следствие теоремы о дедукции: выводимость из гипотез сводится к выводимости в PC.
46. Теорема о корректности для PC.
47. Исчисление предикатов с равенством. Теорема корректности для теорий с равенством и нормальных моделей.
48. Противоречивые теории: выводимость любой формулы; невыполнимость.
49. Пример теории 1-го порядка: арифметика Пеано.
50. Модальное исчисление S5: формулы, аксиомы, правила вывода.
51. Модели Крипке-Лейбница. Истинность формулы в мире. Корректность S5 относительно моделей Крипке.
52. Стандартный перевод (Вайсберга) модальных формул в формулы 1-го порядка. Построение классической модели по модели Крипке. Связь истинности формулы в модели Крипке и истинности ее перевода в классической модели.
53. Из выводимости формулы в S5 следует выводимость ее перевода в PC.
54. (Доказуемая) эквивалентность в S5 и ее свойства.
55. Модальные формулы глубины 1; приведение их к «нормальной форме».
56. Конечность числа классов эквивалентности формул глубины 1 от конечного множества переменных в S5.
57. Приведение любой формулы к формуле глубины 1 в S5. Конечность числа классов эквивалентности формул от конечного множества переменных в S5 (локальная табличность).
58. Непротиворечивые множества формул в S5. Свойства максимальных непротиворечивых множеств.
59. Каноническая модель Крипке для S5 (для формул от конечного множества

переменных). Основная лемма о канонической модели.
60. Теорема о полноте S5 относительно конечных моделей Крипке. Равносильность выводимости формулы в S5 и выводимости ее перевода в PC.
61. Выполнимость непротиворечивой теории 1-го порядка (без док.). Нормальная выполнимость непротиворечивой теории с равенством. Условия на мощность моделей.
62. Теорема Гёделя о полноте: связь логического следования и выводимости. Выводимость общезначимых формул.
63. Теорема Гёделя — Мальцева о компактности.
64. Теорема Лёвенгейма — Сколема о понижении мощности (без док.).
65. Теорема о повышении мощности для теорий с равенством.
66. Существование счетных нестандартных моделей арифметики.
67. «Наивная теория множеств»; ее противоречивость (парадокс Рассела).
68. Теория множеств Цермело (Z). Неупорядоченные и упорядоченные пары. Объединение двух множеств. Аксиома степени.
69. Схема аксиом выделения. Классы, собственные классы. Существование пустого множества. Универсальный класс V — собственный.
70. Аксиома бесконечности. Множество натуральных чисел ω.
71. Прямое произведение двух множеств. Функции, инъекции, сюръекции, биекции.
72. Равномощность и вложимость множеств. Теорема Кантора — Бернштейна (без док.). Теорема Кантора о неравномощности множеств $\mathcal{P}(x)$ и x.
73. Аксиома выбора. Сравнимость множеств по мощности (без док.).

Алгоритмы

74. Понятия алгоритма и вычислимой функции.
75. Разрешимые множества слов в конечном алфавите. Булевы операции над разрешимыми множествами.
76. Полуразрешимые множества, их объединение и пересечение.
77. Примеры разрешимых множеств.
78. Теорема Поста (критерий разрешимости).
79. Перечислимые множества; эквивалентность перечислимости и полуразрешимости.
80. Образ и прообраз перечислимого множества, прообраз разрешимого множества относительно тотальной вычислимой функции.
81. Теорема об универсальной вычислимой функции (без док.).
82. Построение перечислимого неразрешимого подмножества **N**.
83. Разрешимость множества формул и множества замкнутых формул в конечной сигнатуре (без док.).
84. Перечислимость множества теорем теории с разрешимым множеством аксиом.
85. Разрешимость множества теорем полной теории с разрешимым множеством аксиом.
86. Теорема Гёделя об определимости перечислимых множеств в стандартной модели арифметики (без док.). Первая теорема Гёделя о неполноте арифметических теорий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов, части 1-3 http://www.mccme.ru.

2. В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. Вводный курс математической логики. Издательство МГУ. М., 1991 и 1997. Физматлит, 2002.

4. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.

5. А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. Математическая логика. Серия "Классический

университетский учебник", 2005.
6. В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.
7. Дж. Булос, Р. Джеффри. Вычислимость и логика. М., Мир, 1994.
8. С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.
9. С.К. Клини. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
10. W. Rautenberg. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.
11. У. Роджерс. Теория рекурсивных функции и эффективная вычислимость. М., 1972.