Введение в математическую логику
(осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 11

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов в сигнатуре Ω — это аксиоматическая система гильбертовского типа. Она обозначается через PC_Ω и задается следующими аксиомами и правилами вывода.

I. 10 схем аксиом исчисления высказываний CL (см. лекцию 4). Но теперь A, B, C могут быть любыми формулами сигнатуры Ω.

II. Предикатные аксиомы

(1) $\forall x[x/a]A \to [t/a]A$.

(2) $[t/a]A \to \exists x[x/a]A$.

(3) $\forall x[x/a](A \to B) \to (A \to \forall x[x/a]B)$.

(4) $\forall x[x/a](B \to A) \to (\exists x[x/a]B \to A)$.

Здесь A, B — произвольные формулы, t — произвольный терм, a — свободная переменная, x — связанная переменная. Формула $[t/a]A$ получается из A заменой всех вхождений a на t.[1]

Ограничения Переменная x не должна входить в A и B. В аксиомах 3, 4 переменная a не должна входить в A.

III. Правила вывода.

Modus Ponens (MP)

$$\frac{A,\ A \to B}{B},$$

[1] Формально $[t/a]A$ надо определять индукцией по длине A и доказывать, что получается формула.

Gen (правило обобщения)

$$\frac{A}{\forall x[x/a]A}.$$

Здесь предполагается, что x не входит в A.

Определение вывода в исчислении предикатов аналогично исчислению высказываний, но здесь добавляется еще правило *Gen*.

Определение 1. *Пусть* Γ *— некоторое множество формул сигнатуры* Ω*.* Вывод формулы A в PC_Ω из Γ *— это конечная последовательность формул, каждая из которых — аксиома или принадлежит* Γ *или получается из предыдущих по правилу MP или Gen, а последняя формула есть* A*.*

Т.е. это последовательность формул $A_1, \dots, A_n = A$*, где для всех* k *выполняется одно из условий:*

- A_k *— аксиома,*
- $A_k \in \Gamma$*,*
- *существуют* $i, j < k$*, для которых* $A_j = A_i \to A_k$*,*
- *существует* $i < k$ *и переменные* x, a *такие, что* $A_k = \forall x[x/a]A_i$*.*

Формула A выводима из Γ*, если существует ее вывод из* Γ*; обозначение:* $\Gamma \vdash_{PC_\Omega} A$*.*

Для этой выводимости сохраняется лемма 4.2 с тем же доказательством:

Лемма 11.1.

(1) Если $\Delta \subseteq \Gamma$ *и* $\Delta \vdash A$*, то* $\Gamma \vdash A$*.*

(2) Если $\Gamma \vdash A$*, то существует конечное* $\Delta \subseteq \Gamma$*, для которого* $\Delta \vdash A$*.*

(3) Если $\Delta \vdash \Gamma$ *и* $\Gamma \vdash A$*, то* $\Delta \vdash A$*.*

Лемма 11.2. *Пусть* A *— пропозициональная формула,* SA *— ее подстановочный пример в сигнатуре* Ω*. Если* $\vdash_{CL} A$*, то* $\vdash_{PC_\Omega} SA$*.*

Поскольку теоремы CL — это в точности тавтологии (лекция 5), то лемму можно сформулировать так: *все подстановочные примеры тавтологий выводимы в исчислении предикатов.*

Доказательство Индукция по длине вывода A в CL.

1. Если A — аксиома, то SA — аксиома того же вида. Это получается из того, что подстановка S дистрибутивна относительно логических связок. Например, если A — аксиома 1:

$$A = B \to (C \to B),$$

то

$$SA = SB \to (SC \to SB),$$

и это аксиома I.1 (в исчислении предикатов). Аналогично для других аксиом.

2. Пусть A получается по правилу MP из B и $B \to A$. По предположению индукции, в PC_Ω выводимы SB и $S(B \to A)$. Но $S(B \to A) = SB \to SA$. Применив MP в исчислении предикатов, получим $\vdash_{PC_\Omega} SA$. ■

Лемма 11.3. *Некоторые теоремы и допустимые правила в PC_Ω.*

(1) $\forall x[x/a]A \to A$ *(x не входит в A).*

(2) $A \to \exists x[x/a]A$ *(x не входит в A).*

(3) $\dfrac{A \to B}{A \to \forall x[x/a]B}$.

(4) $\dfrac{B \to A}{\exists x[x/a]B \to A}$.

В двух последних правилах переменная x не входит в A, B; переменная a не входит в A.

Правила (3), (4) называются ослабленными *правилами Бернайса.* В исходной (не ослабленной) форме x может входить в A; этот вариант разберем чуть позже.

Доказательство (1), (2) Тривиальные случаи аксиом II.1, II.2 для $t = x$.

(3) (Мы опускаем индекс при $\vdash$.) Рассматриваем выводы из некоторого множества гипотез Γ.

Пусть $\Gamma \vdash A \to B$. По правилу Gen тогда $\Gamma \vdash \forall x[x/a](A \to B)$. По аксиоме II.3, $\Gamma \vdash \forall x[x/a](A \to B) \to (A \to \forall x[x/a]B)$. Теперь $\Gamma \vdash A \to \forall x[x/a]B$ по MP.

(4) Аналогичное рассуждение с аксиомой II.4. (Упражнение.) ■

Лемма 11.4. $\vdash_{PC_\Omega} ⅄y[y/a]A \to ⅄x[x/a]A$,
где $⅄$ — квантор, а переменные x, y не входят в A.

Доказательство Рассмотрим случай $\text{Ꙅ} = \forall$.

$\vdash \forall y[y/a]A \to [x/a]A$ — аксиома II.1. Тогда $\vdash \forall y[y/a]A \to \forall x[x/a]A$ по правилу Бернайса.

Случай $\text{Ꙅ} = \exists$ разбирается аналогично (упражнение). ■

Лемма 11.5. *(Ослабленная теорема дедукции) Если $\Gamma, A \vdash_{PC_\Omega} B$ без применения правила Gen, то $\Gamma \vdash_{PC_\Omega} A \to B$.*

Доказательство Доказательство — такое же, как для теоремы дедукции в CL (см. лекцию 4). ■

Лемма 11.6. *В исчислении предикатов допустимо правило силлогизма*

$$\frac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}.$$

Доказательство Из теоремы дедукции следует, что это правило — производное. См. лекцию 4. ■

Лемма 11.7. *В PC_Ω в выводах из гипотез допустимы правила Бернайса:*

(1) $\dfrac{A \to B}{A \to \forall x[x/a]B}$.

(2) $\dfrac{B \to A}{\exists x[x/a]B \to A}$.

где x не входит в B; переменная a не входит в A.

Доказательство Докажем допустимость 1го правила; второе рассматривается аналогично.

Пусть $\Gamma \vdash A \to B$. Выберем переменную y, не входящую ни в A, ни в B. Тогда по лемме 11.3

$$\Gamma \vdash A \to \forall y[y/a]B.$$

По лемме 11.4,

$$\vdash \forall y[y/a]B \to \forall x[x/a]B.$$

Отсюда по правилу силлогизма

$$\Gamma \vdash A \to \forall x[x/a]B.$$

■

Теорема 11.8. *(Теорема дедукции) Если A — замкнутая формула, то*

$$\Gamma, A \vdash_{PC_\Omega} B \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{PC_\Omega} A \to B.$$

Доказательство Утверждение ($\Leftarrow$) легко получается по MP (для любой A); см. лекцию 4.

($\Rightarrow$) доказываем по индукции. Доказательство — как в лекции 4 и лемме 11.5, но еще надо рассмотреть случай, когда B получается по правилу Gen.

Итак, пусть $B = \forall x[x/a]C$ и $\Gamma, A \vdash C$. По предположению индукции $\Gamma \vdash A \to C$. Тогда по правилу Бернайса (поскольку A замкнута) получаем

$\Gamma \vdash A \to \forall x[x/a]C$, т.е. $\Gamma \vdash A \to B$. ■

Следствие 11.9. *Для любой конечной теории* T *и формулы* A *сигнатуры* Ω

$$T \vdash_{PC_\Omega} A \Leftrightarrow\ \vdash_{PC_\Omega} (\bigwedge T) \to A.$$

Здесь $\bigwedge T$ обозначает конъюнкцию всех формул из T.[2]

Доказательство (Мы опять опускаем индекс при $\vdash$.) По теореме дедукции

(*) $\bigwedge T \vdash A \Leftrightarrow\ \vdash (\bigwedge T) \to A.$

Заметим также, что

(**) $T \vdash A \Leftrightarrow\ \bigwedge T \vdash A.$

Действительно, $T \vdash \bigwedge T$ — по допустимому правилу введения $\wedge$ (см. лекцию 5); его надо применить несколько раз. Поэтому из $\bigwedge T \vdash A$ по транзитивности (лемма 11.1(3)) следует $T \vdash A$.

Обратно, $\bigwedge T \vdash T$ по аксиомам I.3, I.4 и MP. Поэтому из $T \vdash A$ по транзитивности следует $\bigwedge T \vdash A$.

Утверждение следствия получается из (*) и (**). ■

Корректность исчисления предикатов

Теорема 11.10. *(Теорема о корректности исчисления предикатов)*

(1) Пусть T *— теория 1го порядка в сигнатуре* Ω*. Тогда для любой формулы* A *этой сигнатуры*

$$T \vdash_{PC_\Omega} A \Rightarrow T \vDash \overline{\forall} A.$$

[2]Не имеет значения, в каком порядке берутся формулы и расставляются скобки в конъюнкции: утверждение от этого не зависит.

(2) Для любой формулы A сигнатуры Ω

$$\vdash_{PC_\Omega} A \ \Rightarrow \vDash A,$$

т.е. все теоремы исчисления предикатов общезначимы.

Доказательство Очевидно, что (2) следует из (1): надо взять $T = \varnothing$ и вспомнить, что по определению общезначимость A равносильна общезначимости $\overline{\forall} A$ (лекция 9).

(1) доказывается индукцией по длине вывода A в T аналогично теореме корректности для исчисления высказываний (теорема 4.5).

(1.1) Если $A \in T$, то доказывать нечего: A истинна во всех моделях T и $\overline{\forall} A = A$, т.к. A замкнута.

(1.2) Все аксиомы группы I — подстановочные примеры аксиом CL. Например, предикатная формула $A \to (B \to A)$ — пример пропозициональной аксиомы $P_1 \to (P_2 \to P_1)$ и т.д. Аксиомы CL — тавтологии (теорема корректности 4.5). Поэтому аксиомы группы I общезначимы по лемме о тавтологиях (лемма 9.5).

(1.3) Пусть A получается по MP из B и $B \to A$. Выводы этих формул короче, и по предположению индукции

$$T \vDash \overline{\forall} B, \ T \vDash \overline{\forall}(B \to A).$$

Рассмотрим любую модель M теории T и докажем, что $M \vDash \overline{\forall} A$. По лемме 8.3 для этого надо заменить свободные переменные из A (обозначим их список $\overrightarrow{a}$) на произвольные элементы из M (обозначим этот список $\overrightarrow{m}$) и доказать, что полученная оцененная формула (обозначим ее A_1) истинна в M.

Заметим, что при замене $\overrightarrow{a}$ на $\overrightarrow{m}$ в формуле B могут остаться еще какие-то свободные переменные; заменим их тоже на элементы из M (как угодно), и получим оцененную формулу B_1. Поскольку $T \vDash \overline{\forall} B$ и $M \vDash T$, имеем $M \vDash \overline{\forall} B$, и по лемме 8.3, $M \vDash B_1$.

Аналогично $M \vDash \overline{\forall}(B \to A)$, откуда $M \vDash B_1 \to A_1$ по лемме 8.3. Теперь из истинности $B_1 \to A_1$ и B_1 следует истинность A_1 (по определению значения импликации; см. лекцию 7).

(1.4) Пусть A получается по правилу Gen, т.е. $A = \forall x[x/a]B$, $T \vdash B$. Вывод B короче, и по предположению индукции $T \vDash \overline{\forall} B$.

Случай 1 Если a входит в B, то $\overline{\forall} B$ и $\overline{\forall}\forall x[x/a]B$ могут отличаться только порядком кванторов. Из леммы 8.3 следует, что эти формулы равносильны. Поэтому $T \vDash \overline{\forall} A$.

Случай 2 a не входит в B. В этом случае тоже из $M \vDash \overline{\forall} B$ следует $M \vDash \overline{\forall} A$.

В самом деле, пусть $B = B(\overrightarrow{b})$, a не входит в $\overrightarrow{b}$. Допустим, что $M \vDash \overline{\forall} B$. Тогда для всех наборов $\overrightarrow{m}$ элементов из M (той же длины, что $\overrightarrow{b}$) $M \vDash B(\overrightarrow{m})$.

В формуле $A = \forall x[x/a]B(\overrightarrow{b})$ остаются все те же свободные переменные $\overrightarrow{b}$. Поэтому $M \vDash \overline{\forall} \forall x[x/a]B(\overrightarrow{b})$ означает, что для для всех $\overrightarrow{m}$ из M

$$M \vDash \forall x[x/a]B(\overrightarrow{m}).$$

Но это — то же, что $M \vDash B(\overrightarrow{m})$: т.к. переменная a в $B(\overrightarrow{m})$ не входит, любая ее замена оказывается фиктивной. Итак, $M \vDash \overline{\forall} A$.

(1.5) — аксиома II.3:

$$A = \forall x[x/a](C \to B) \to (C \to \forall x[x/a]B),$$

где x не входит в A и B, a не входит в C. Докажем общезначимость этой формулы. Выберем модель M и возьмем произвольную замену свободных переменных на элементы из M. Получим оцененную формулу

$$A_1 = \forall x[x/a](C_1 \to B_1) \to (C_1 \to \forall x[x/a]B_1).$$

Т.к. a не входит в C, здесь C_1 — замкнутая (т.е. тоже оцененная) формула, а B_1 может содержать только одну свободную переменную a (поскольку формула $\forall x[x/a]B_1$ замкнута). Запишем B_1 как $B_1(a)$ и соответственно

$$A_1 = \forall x(C_1 \to B_1(x)) \to (C_1 \to \forall x B_1(x)).$$

Докажем, что $M \vDash A_1$. Предположим

$$M \vDash \forall x(C_1 \to B_1(x))$$

и проверим, что $M \vDash C_1 \to \forall x B_1(x)$. В свою очередь, для этого предположим

$$M \vDash C_1$$

и докажем $M \vDash \forall x B_1(x)$. Возьмем любое $m \in M$. Из $M \vDash \forall x(C_1 \to B_1(x))$ следует

$$M \vDash C_1 \to B_1(m).$$

Тогда из $M \vDash C_1$ следует $M \vDash B_1(m)$. Поскольку m произвольно, получаем $M \vDash \forall x B_1(x)$, что и требовалось.

(1.6) A — аксиома II.4. Этот случай аналогичен предыдущему. Доказательство — упражнение.

Оставшиеся аксиомы II.1, II.2 будут рассмотрены на следующей лекции.

∎