Введение в математическую логику
(осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 10

Лемма 9.9. *(Лемма о тавтологиях) Подстановочные примеры тавтологий общезначимы.*

Доказательство Рассмотрим подстановку S, заменяющую $P_1, \dots, P_n$ на $B_1, \dots, B_n$. Формулы B_i запишем как $B_i(a_1, \dots, a_k)$, считая, что список свободных переменных $a_1, \dots, a_k$ содержит все параметры этих формул.

Рассмотрим произвольную модель M данной сигнатуры и ее элементы $m_1, \dots, m_k$. Обозначим $B'_i := B_i(m_1, \dots, m_k)$ (это — оцененные в M формулы), и построим оценку пропозициональных переменных $\theta : Var \longrightarrow \{0, 1\}$ так:

$$\theta(P_i) := |B'_i|_M.$$

<u>Утверждение</u> Для любой пропозициональной формулы $F(P_1, \dots, P_n)$

$$\theta(F) = |SF(m_1, \dots, m_k)|_M.$$

Это легко проверяется по индукции (по длине F). Действительно, если $F = P_i$, то это следует из определения θ, т.к. $SP_i = B_i$. А шаг индукции очевиден: например, при $F = F_1 \wedge F_2$ имеем: $SF = SF_1 \wedge SF_2$,

$$\theta(F) = \min(\theta(F_1), \theta(F_2)),$$

$$|SF(m_1, \dots, m_k)|_M = \min(|SF_1(m_1, \dots, m_k)|_M, |SF_2(m_1, \dots, m_k)|_M),$$

и можно применить предположение индукции.

Из доказанного утверждения сразу следует, что если F — тавтология, то $M \vDash SF(m_1, \dots, m_k)$ для любой M и при любом выборе $m_1, \dots, m_k$. Это дает общезначимость SF. ∎

Лемма 9.10.

(1) *Если* $F_1 \sim F_2$, *то* $SF_1 \sim SF_2$ *(для любых пропозоциональных формул* F_1, F_2 *и подстановки* S*).*

(2) $\neg\forall x[x/a]A \sim \exists x[x/a]\neg A$.

(3) $\neg\exists x[x/a]A \sim \forall x[x/a]\neg A$.

(4) $\text{Я}x[x/a](A \circ B) \sim (\text{Я}x[x/a]A \circ B)$, *если* a *не входит в* B *(и* x *не входит ни в* A, *ни в* B*).*

Здесь Я *обозначает квантор* $\forall$ *или* $\exists$, *а* $\circ$ — *связку* $\vee$ *или* $\wedge$.

(5) *Если* $A \sim B$, *то* $\neg A \sim \neg B$.

(6) *Если* $A \sim A'$ *и* $B \sim B'$ *то* $(A \circ B) \sim (A' \circ B')$ *(где* $\circ$ — *это* $\vee$, $\wedge$ *или* $\to$*).*

(7) *Если* $A \sim B$, *то* $\text{Я}x[x/a]A \sim \text{Я}x[x/a]B$ *(при условии, что* x *не входит ни в* A, *ни в* B*).*

(8) $\text{Я}x[x/a]A \sim \text{Я}y[y/a]A \sim \text{Я}y[y/b][b/a]A$, *если* x, y, b *не входят в* A *(здесь* $x, y \in BVar$, $a, b \in FVar$*)* .

Доказательство (1) Если $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ — тавтология, то по лемме 9.9 $\models S(F_1 \leftrightarrow F_2)$. Но $S(F_1 \leftrightarrow F_2) = (SF_1 \leftrightarrow SF_2)$. Тогда по определению равносильности $SF_1 \sim SF_2$.

(2) Запишем A как $A(a, \overrightarrow{b})$; надо проверить, что в любой модели для всех $\overrightarrow{m}$

$$|\neg\forall x A(x, \overrightarrow{m})|_M = |\exists x \neg A(x, \overrightarrow{m})|_M.$$

Но это сразу следует из определения истинности:

$$|\neg\forall x A(x, \overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow |\forall x A(x, \overrightarrow{m})|_M = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{не для всех } k \in M \ |A(k, \overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{найдется } k \in M, \text{ для которого } |A(k, \overrightarrow{m})|_M = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{найдется } k \in M, \text{ для которого } |\neg A(k, \overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow |\exists x \neg A(x, \overrightarrow{m})|_M = 1.$$

(3) Доказывается аналогично (2) (упражнение).

(4) Проверим это для $\text{Я} = \exists$ и $\circ = \wedge$; остальные случаи разбираются аналогично.

Запишем A как $A(a, \overrightarrow{b})$, а B — как $B(\overrightarrow{b})$ (поскольку a не входит в B). Надо доказать, что в любой модели M для любого $\overrightarrow{m}$

$$(*) \quad |\exists x(A(x,\overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m}))|_M = 1 \Leftrightarrow |\exists x A(x,\overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m})|_M = 1.$$

В самом деле,

$$|\exists x(A(x,\overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m}))|_M = 1 \Leftrightarrow \text{ найдется } k, \text{ такое что } |A(k,\overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{найдется } k, \text{ такое что } (|A(k,\overrightarrow{m})|_M = 1 \text{ и } |B(\overrightarrow{m})|_M = 1).$$

Но условие $|B(\overrightarrow{m})|_M = 1$ не зависит от k. Поэтому

$$\text{найдется } k, \text{ такое что } (|A(k,\overrightarrow{m})|_M = 1 \text{ и } |B(\overrightarrow{m})|_M = 1) \Leftrightarrow$$

$$(\text{найдется } k, \text{ такое что } |A(k,\overrightarrow{m})|_M = 1) \text{ и } |B(\overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow$$

$$|\exists x A(x,\overrightarrow{m})|_M = 1 \text{ и } |B(\overrightarrow{m})|_M = 1 \Leftrightarrow |\exists x A(x,\overrightarrow{m}) \wedge B(\overrightarrow{m})|_M = 1.$$

Таким образом, $(*)$ выполняется.

(8) Рассмотрим случай $\text{Я} = \exists$. Запишем A как $A(a, \overrightarrow{e})$, где $\overrightarrow{e}$ — список всех параметров, кроме a. По определению истинности, в модели M для любого $\overrightarrow{m}$

$$|\exists x A(x,\overrightarrow{m})|_M = \max_{k \in M} |A(k,\overrightarrow{m})|_M.$$

По тому же определению,

$$|\exists y A(y,\overrightarrow{m})|_M = \max_{k \in M} |A(k,\overrightarrow{m})|_M.$$

Т.е. первая равносильность из (8) очевидна.

Вторая равносильность тоже очевидна, т.к. выражения $[y/a]A$ и $[y/b][b/a]A$ совпадают: если заменить в A все вхождения a на новую букву b, а потом все вхождения b — на y, то это все равно, что сразу заменить все a на y.

Остальные утверждения леммы проверяются достаточно легко. ■

Предваренная нормальная форма

Определение 1. Предваренная нормальная форма (ПНФ) — *это формула вида* $\text{Я}_1 x_1 \dots \text{Я}_n x_n [x_1, \dots, x_n / a_1, \dots, a_n] A$, *где* $\text{Я}_1, \dots, \text{Я}_n$ — *кванторы,* A

— формула без кванторов, $a_1, \dots, a_n$ — (различные) свободные переменные, $x_1, \dots, x_n$ — (различные) связанные переменные, не входящие в A. Формула без кванторов тоже считается ПНФ.

Мы докажем, что всякая формула первого порядка равносильна некоторой ПНФ. Начнем со вспомогательного преобразования формул.

Определение 2. Формула с тесными отрицаниями (ТО) — *это формула, построенная из литералов (т.е. атомарных формул и их отрицаний) с помощью конъюнкции, дизъюнкции и кванторов.*

Точное определение — индуктивное:

- *Если A — атомарная формула, то A и $\neg A$ — ТО-формулы.*
- *Если A, B — ТО-формулы, то $(A \wedge B)$ и $(A \vee B)$ — ТО-формулы.*
- *Если A — ТО-формула, $a \in FVar$, $x \in BVar$, x не входит в A, то $\forall x[x/a]A$ и $\exists x[x/a]A$ — ТО-формулы.*

Лемма 10.1. *Всякая формула первого порядка равносильна некоторой ТО-формуле.*

Доказательство Идея доказательства состоит в том, что импликацию можно выразить через отрицание и дизъюнкцию, а все отрицания можно задвинуть вглубь, используя законы Де Моргана и лемму 9.10 (2),(3).

Аккуратное доказательство проводится по индукции: именно, индукцией по длине формулы A, доказываем, что A равносильна ТО-формуле, в которую входят те же переменные[1].

Предположим, что утверждение доказано для всех формул, которые короче, чем A. По лемме 6.1, возможны следующие случаи.

(1) A — атомарная. Тогда A — ТО-формула, и доказывать нечего.

(2) $A = (B \circ C)$, где $\circ$ — это $\wedge$ или $\vee$. Формулы B, C — короче, и по предположению индукции, найдутся ТО-формулы B_1, C_1, такие что $B \sim B_1$, $C \sim C_1$. Тогда, по лемме 9.10 (6), $A \sim (B_1 \circ C_1)$, а по определению 2, $(B_1 \circ C_1)$ — ТО-формула. Переменные в ней — те же, что в A, т.к. по предположению индукции, они не изменяются при переходе от B к B_1 и от C к C_1.

[1] Последнее дополнение — техническое, оно понадобится далее в случаях (4), (5.5); в лекции оно не упоминалось.

(3) $A = (B \to C)$. Из логики высказываний (лемма 9.10 (1)) получаем $A \sim (\neg B \vee C)$. Формулы $\neg B$, C — короче, чем A, и тогда найдутся ТО-формулы B_1, C_1, такие что $\neg B \sim B_1$, $C \sim C_1$. По лемме 9.10 (6),(9), $A \sim (B_1 \vee C_1)$, и $(B_1 \vee C_1)$ — ТО-формула. Переменные не меняются — по предположению индукции (как и в случае (2)).

(4) $A = \text{Я}x[x/a]B$, x не входит в B. По предположению индукции, $B \sim B_1$ для некоторой ТО-формулы B_1 с теми же переменными. Поэтому x не входит в B_1, и, по лемме 9.10 (7), $A \sim \text{Я}x[x/a]B_1$. Ясно, что $\text{Я}x[x/a]B_1$ — ТО-формула, и переменные из A в ней сохраняются.

(5) $A = \neg B$. Тогда рассмотрим все возможности для B.

(5.1) B — атомарная. Тогда A — ТО-формула, и доказывать нечего.

(5.2) $B = (C \vee D)$. Из логики высказываний (закон Де Моргана) имеем: $A \sim (\neg C \wedge \neg D)$. Формулы $\neg C$, $\neg D$ — короче, поэтому найдутся ТО-формулы C_1, D_1, для которых $\neg C \sim C_1$, $\neg D \sim D_1$. По лемме 9.10, $A \sim (C_1 \wedge D_1)$, и снова получаем ТО-формулу. Переменные, как и раньше, сохраняются.

(5.3) $B = (C \wedge D)$. Этот случай аналогичен (5.2).

(5.4) $B = (C \to D)$. Из логики высказываний, $A = \neg(C \to D) \sim (C \wedge \neg D)$. Т.к. C, $\neg D$ — короче, чем A, имеем ТО-формулы C_1, D_1, для которых $C \sim C_1$, $\neg D \sim D_1$. По лемме 9.10 (6), $A \sim (C_1 \wedge D_1)$.

(5.5) $B = \forall x[x/a]C$, x не входит в C. По лемме 9.10 (2), $A = \neg B \sim \exists x[x/a]\neg C$. Т.к. $\neg C$ — короче, чем A, имеется ТО-формула C_1, такая что $\neg C \sim C_1$. Из-за сохранения переменных, x не входит в C_1. По лемме 9.10 (7),

$$\exists x[x/a]\neg C \sim \exists x[x/a]C_1.$$

Итак, A равносильна ТО-формуле $\exists x[x/a]C_1$ с теми же переменными.

(5.6) $B = \exists x[x/a]C$. Этот случай аналогичен (5.5).

(5.7) $B = \neg C$. По логике высказываний, $A = \neg\neg C \sim C$. По предположению индукции, имеем ТО-формулу $C_1 \sim C$. Итак, $A \sim C_1$. ■

Теорема 10.2. *Любая формула первого порядка равносильна некоторой ПНФ.*

Доказательство Благодаря лемме 10.1, достаточно доказать это для ТО-формул. Т.е. индукцией по длине ТО-формулы A доказываем, что A равносильна ПНФ. По лемме 6.1, возникают такие случаи.

(1) A — литерал. Тогда A — ПНФ, по определению.

(2) $A = (B \circ C)$, где $\circ$ — это $\vee$ или $\wedge$. По предположению индукции, $B \sim B'$, $C \sim C'$ для некоторых ПНФ B', C'. Тогда, по лемме 9.10, $A = (B \circ C) \sim (B' \circ C')$. Теперь нужна еще одна лемма.

Лемма 10.3. *Если A, B — ПНФ, $\circ = \vee$ или $\wedge$, то формула $(A \circ B)$ равносильна ПНФ.*

Доказательство Доказываем индукцией по числу кванторов в $(A \circ B)$.

Если кванторов нет, то это уже ПНФ, и доказывать нечего.

Если есть кванторы, то мы можем считать, что они есть в A: если они есть только в B, можно переставить A и B — т.к. $(A \circ B) \sim (B \circ A)$ (логика высказываний).

Итак, пусть $A = Яx[x/a]A_1$.

Случай 1. a, x не входят в B.

По лемме 9.10,

$$(A \circ B) = (Яx[x/a]A_1 \circ B) \sim Яx[x/a](A_1 \circ B).$$

Число кванторов в $A_1 \circ B$ меньше, чем в $A \circ B$, и, по предположению индукции, $(A_1 \circ B) \sim C$ для некоторой ПНФ C.

(1.1) Если x не входит в C, то, опять по лемме 9.10,

$$Яx[x/a](A_1 \circ B) \sim Яx[x/a]C.$$

Таким образом, $(A \circ B)$ равносильна ПНФ $Яx[x/a]C$.

(1.2) Если x входит в C, то возьмем новую связанную переменную y, которой нет в A_1, B, C. По лемме 9.10, $A = Яx[x/a]A_1 \sim Яy[y/a]A_1$, и далее $(A \circ B) \sim (Яy[y/a]A_1 \circ B)$. Теперь, как в (1.1):

$$(Яy[y/a]A_1 \circ B) \sim Яy[y/a]C.$$

Случай 2. a или x входит в B.

Тогда можно эти переменные переименовать. А именно, выберем $b \in FVar$, $y \in BVar$, которые не входят в B. По лемме 9.10,

$$A = Яx[x/a]A_1 \sim Яy[y/b][b/a]A_1.$$

Формула $Яy[y/b][b/a]A_1$ равносильна ПНФ, согласно случаю 1 (где вместо A_1 надо использовать $[b/a]A_1$). ■

Возвращаемся к доказательству теоремы 10.2, случай (2). По лемме 10.3 получаем, что $(B' \circ C')$ равносильна ПНФ, поэтому и A равносильна ПНФ.

(3) $A = Yx[x/a]B$.

По предположению индукции, имеется ПНФ B', равносильная B. Выберем какую-нибудь связанную переменную y, не входящую ни в B, ни в B'. По лемме 9.10 получаем:

$$A = Yx[x/a]B \sim Yy[y/a]B \sim Yy[y/a]B'.$$

Формула $Yy[y/a]B'$ — ПНФ. ■

Пример Рассмотрим формулу $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$. Она приводится к ПНФ следующим образом:

$$(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)) \sim (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \sim \forall x\, (P(x) \vee \exists y Q(y)) \sim \forall x \exists y\, (P(x) \vee Q(y)).$$

Подробнее, это происходит так:

$$(\forall x[x/a]P(a) \ \vee \ \exists x[x/a]Q(a)) \sim (\forall x[x/a]P(a) \ \vee \ \exists y[y/b]Q(b))$$

$$\sim \forall x\, [x/a](P(a) \ \vee \ \exists y[y/b]Q(b)) \sim \forall x \exists y\, [x, y/a, b](P(a) \ \vee \ Q(b)).$$

Замечание В логике высказываний мы можем выяснить, является ли данная формула тавтологией, приведя ее к СДНФ. В логике предикатов аналогичный метод не работает: у одной и той же формулы могут быть несколько совершенно разных ПНФ. И по данной ПНФ непонятно, как установить общезначимость. В частности, неверно, что

$$\models Yx_1 \ldots Yx_n[x_1, \ldots, x_n/a_1, \ldots, a_n]A \ \Rightarrow \models A.$$

Например, формула $\exists x \forall y\, (P(x) \to P(y))$ общезначима, т.к.

$$\exists x \forall y\, (P(x) \to P(y)) \sim \exists x \forall y\, (\neg P(x) \ \vee \ P(y)) \sim$$

$$\exists x\, (\neg P(x) \ \vee \ \forall y P(y)) \sim (\exists x \neg P(x) \ \vee \ \forall y P(y)) \sim (\neg \forall x P(x) \ \vee \ \forall y P(y))$$

$$\sim (\neg \forall x P(x) \ \vee \ \forall x P(x)).$$

При этом $P(x) \to P(y)$ — совсем не общезначима.