Введение в математическую логику
(осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 7

Определение 1. *Теории T_1, T_2 одной сигнатуры называются* эквивалентными (равносильными)*, если у них одни и те же модели; обозначение:* $T_1 \sim T_2$.

Обозначим через $[T]$ множество всех логических следствий теории T. Заметим, что

$$T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow [T_1] = [T_2].$$

Действительно, если модели у теорий T_1, T_2 одинаковые, то и формулы, которые верны в этих моделях — одни и те же, т.е. $[T_1] = [T_2]$. Наоборот, если следствия у теорий одинаковые, то любая формула из T_2 является следствием T_1, т.е. верна во всех моделях T_1. Значит, всякая модель T_1 оказывается моделью T_2. Аналогично, всякая модель T_2 является моделью T_1.

Определение 2. *Модели M_1, M_2 одной сигнатуры называются* элементарно эквивалентными*, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы, т.е. $Th(M_1) = Th(M_2)$; обозначение: $M_1 \equiv M_2$.*

Лемма 7.1. *Пусть T — выполнимая теория. Следующие условия эквивалентны:*

(1) T полна.

(2) Любое выполнимое расширение теории T эквивалентно T.

(3) $[T] = Th(M)$ для некоторой модели M.

(4) Все модели T элементарно эквивалентны.

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть T полна, докажем (2). Пусть $T' \supseteq T$; тогда очевидно, что $[T'] \supseteq [T]$. Предположим, что $T' \not\sim T$. Тогда найдется формула $A \in ([T'] \setminus [T])$. Поскольку $T \not\models A$ и T полна, получаем $T \models \neg A$. Но тогда и $T' \models \neg A$. С другой стороны, $T' \models A$. Значит, T' невыполнима.

(2) $\Rightarrow$ (3). Предположим (2). Если $M \models T$, то $T \subseteq Th(M)$. Теория $Th(M)$ выполнима, поэтому она эквивалентна T (в силу (2)). Тогда $[T] = [Th(M)]$. Но $[Th(M)] = Th(M)$, т.к. все логические следствия $Th(M)$ истинны в M.

(3) $\Rightarrow$ (4). Предположим (3). Тогда из $M' \models T$ следует $M' \models Th(M)$. Значит, всякая замкнутая формула, истинная в M, будет истинной в M'. И наоборот, если $M \not\models A$, т.е. $M \models \neg A$, то $M' \models \neg A$, т.е. $M' \not\models A$. Итак, $M \equiv M'$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Предположим (4) и допустим, что T неполна. Тогда для некоторой замкнутой формулы A, $T \not\models A$ и $T \not\models \neg A$. Это означает, что обе теории $T \cup \{\neg A\}$, $T \cup \{A\}$ выполнимы. Их модели оказываются моделями T, которые не элементарно эквивалентны. ■

Определение истинности в модели

Пусть M — модель сигнатуры Ω; предполагаем, что ее носитель $\underline{M}$ состоит из совершенно новых элементов, которые не являются словами, содержащими символы из Ω. Через $\Omega \cup M$ обозначим *расширенную сигнатуру модели* M, которая получается из Ω добавлением множества новых констант $\underline{M}$; т.е. $Const_{\Omega \cup M} = Const_\Omega \cup \underline{M}$, в остальном же $\Omega \cup M$ не отличается от Ω. [1]

Определение 3. *Пусть M — модель сигнатуры Ω.* Терм, оцененный в M *— это замкнутый терм расширенной сигнатуры M; аналогично,* формула, оцененная в M *— это замкнутая формула сигнатуры $\Omega \cup M$.*

Согласно нашим обозначениям, $CTm_{\Omega \cup M}$ — множество всех термов, оцененных в M; а $CFm_{\Omega \cup M}$ — множество всех формул, оцененных в M.

Определение 4. *Для терма t, оцененного в модели M, индукцией по длине определяется его* значение $|t|_M$*:*

[1] Техническое требование, чтобы все элементы из $\underline{M}$ были новыми, нужно для корректности дальнейших определений. Чтобы его обойти, для всех элементов можно ввести “новые имена”, т.е. добавить к $Const_\Omega$ не $\underline{M}$, а другое множество, которое находится с ним в биективном соответствии и состоит из новых элементов. Мы не будем этим заниматься.

- $|c|_M := c_M$ *для* $c \in Const_\Omega$,
- $|m|_M := m$ *для* $m \in \underline{M}$,
- $|f(t_1, \dots, t_n)|_M := f_M(|t_1|_M, \dots, |t_n|_M)$
для $f^n \in Fun_\Omega$, $t_1, \dots, t_n \in CTm_{\Omega \cup M}$.

Корректность этого определения проверяется, как в лемме 6.2.

Определение 5. *Для формулы C, оцененной в модели M, ее "логической длиной" назовем число вхождений в нее логических связок и кванторов. Индукцией по логической длине формулы C определяется ее* значение $|C|_M$*:*

- $|P(t_1, \dots, t_n)|_M := P_M(|t_1|_M, \dots, |t_n|_M)$
для $P^n \in Fun_\Omega$, $t_1, \dots, t_n \in CTm_{\Omega \cup M}$.
- $|A \wedge B|_M := \min(|A|_M, |B|_M)$,
- $|A \vee B|_M := \max(|A|_M, |B|_M)$,
- $|A \to B|_M := \max(1 - |A|_M, |B|_M)$,
- $|\neg A|_M := 1 - |A|_M$,
- $|\exists x[x/a]A|_M := 1 \Leftrightarrow$ *существует* $m \in \underline{M}$, *такой что* $|[m/a]A|_M = 1$,
- $|\forall x[x/a]A|_M := 1 \Leftrightarrow$ *для всех* $m \in \underline{M}$, $\quad |[m/a]A|_M = 1$,

Здесь $[m/a]A$ обозначает оцененную формулу, полученную из A заменой всех вхождений a на m.[2]

Заметим, что последние 2 пункта определения можно записать и так:

$$|\exists x[x/a]A|_M = \max_{m \in \underline{M}} |[m/a]A|_M,$$

$$|\forall x[x/a]A|_M = \min_{m \in \underline{M}} |[m/a]A|_M.$$

Докажем корректность этих определений.

[2] Строго говоря, надо доказывать, что это — действительно формула; доказательство рутинное, по индукции. Мы определяем значения только для замкнутых формул. Заметим, что если формула $\forall x[x/a]A$ (или $\exists x[x/a]A$) замкнута, то A не может содержать никаких свободных переменных, кроме a. И тогда $[m/a]A$ снова оказывается замкнутой. Т.е. определение осмысленно.

Лемма 7.2. *(1) Для любой модели M существует единственное отображение $t \mapsto |t|_M$ оцененных в M термов в $\underline{M}$, удовлетворяющее условиям из определения 4.*

(2) Для любой модели M существует единственное отображение $A \mapsto |A|_M$ оцененных в M формул в $\{0,1\}$, удовлетворяющее условиям из определения 5.

Доказательство (1) Рассуждаем, как в лемме 6.2. Лемма 6.1 об однозначном анализе сохраняется для оцененных термов с небольшим отличием: они бывают 3 видов. При этом важно, что элементы M не являются константами Ω и не представляются в виде $f(t_1, \dots, t_n)$. Но это уже было оговорено.

(2) Аналогично лемме 2.1. Применим лемму 6.1 об однозначном анализе формул (для оцененных формул она не меняется).

1. Если $A = P(t_1, \dots, t_n)$ — атомарная, то $|A|_M$ однозначно определено — по лемме 6.3.

2. Если $A = (B \wedge C)$, то надо положить $|A|_M = min(|B|_M, |C|_M)$. Формулы B, C единственны по лемме 6.1, а $|B|_M,\ |C|_M$ определены однозначно по предположению индукции (B, C — меньшей длины, чем A). Поэтому $|A|_M$ задается однозначно.

3, 4, 5. Аналогично рассуждаем в случаях $A = \neg B,\ (B \vee C),\ (B \to C)$.

6. Пусть $A = \exists x[x/a]B$. Тогда надо определить $|A|_M = \max\limits_{m \in M} |[m/a]B|_M$. B и $[m/a]B$ — меньшей длины, чем A, поэтому $|A|_M$ задается однозначно при данном выборе B.

Однако теперь уже B не единственна. Рассмотрим другую формулу B', такую что $A = \exists x[x/a']B'$ для некоторой свободной переменной a', причем x не входит в B'. Тогда $[x/a']B' = [x/a]B$, поэтому B' получается из B при замене a на a' (или: заменой сначала всех a на x, а потом всех x на a'). Т.е. $B' = [a'/a]B$.

Отсюда получаем, что при всех $m \in M$

$$[m/a']B' = [m/a'][a'/a]B = [m/a]B.$$

Поэтому если мы определили

$$|A|_M = \max_{m \in M} |[m/a]B|_M,$$

то также получаем и

$$|A|_M = \max_{m \in M} |[m/a']B'|_M.$$

Таким образом, $|A|_M$ и в этом случае определено однозначно — независимо от того, используем мы B или B' для построения A.

7. Случай $A = \forall x[x/a]B$ рассматривается аналогично. ■

Пример Рассмотрим *сигнатуру колец*, содержащую равенство (=), константы $0, 1$ и функциональные символы: $\cdot, +$ (2-местные).

В термах записываем их привычным образом: $t_1 \cdot t_2,\ t_1 + t_2$.

Рассмотрим формулу $\exists x(x \cdot x = 1 + 1)$ в моделях $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$ (с обычным пониманием нуля, единицы, сложения и умножения). Имеем:

$$\mathbf{R} \models \exists x(x \cdot x = 1 + 1),$$

т.к.

$$\mathbf{R} \models \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 + 1.$$

Отметим, что здесь возникает оцененная формула $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 + 1$, с константами двух видов: 1 берется из исходной сигнатуры, а $\sqrt{2}$ — из модели; в сигнатуре колец такого символа нет.

С другой стороны,

$$\mathbf{Q} \models \neg\exists x(x \cdot x = 1 + 1),$$

т.к.

$$\mathbf{Q} \not\models r \cdot r = 1 + 1$$

для всех $r \in \mathbf{Q}$.

Изоморфизмы моделей

Определим теперь точно, какие модели будут считаться “одинаковыми”.

Определение 6. *Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω. Отображение $\alpha : \underline{M} \longrightarrow \underline{M'}$ называется* изоморфизмом M на M', *если*

- *α — биекция,*
- *$\alpha(c_M) = c_{M'}$ для всех $c \in Const_\Omega$,*
- *$\alpha(f_M(m_1, \ldots, m_k)) = f_{M'}(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k))$ для всех $f^k \in Fun_\Omega$ и $m_1, \ldots, m_k \in \underline{M}$,*
- *$P_M(m_1, \ldots, m_k) = P_{M'}(\alpha(m_1), \ldots, \alpha(m_k))$ для всех $P^k \in Pred_\Omega$ и $m_1, \ldots, m_k \in \underline{M}$.*

Если говорить не совсем строго, изоморфизм сохраняет значения всех констант, предикатов и функций из нашей сигнатуры.

Запись $\alpha : M \cong M'$ означает, что α — изоморфизм M на M'.

Лемма 7.3.

(1) Если $\alpha : M \cong M'$ и $\beta : M' \cong M''$, то $\beta\alpha : M \cong M''$ ($\beta\alpha$ обозначает композицию).

(2) Если $\alpha : M \cong M'$, то $\alpha^{-1} : M' \cong M$.

Доказательство — непосредственной проверкой (упражнение).

Определение 7. *Модели M, M' называются* изоморфными *(обозначение: $M \cong M'$), если существует изоморфизм $\alpha : M \cong M'$.*

Очевидно, что $M \cong M$, а из леммы 7.3 получаем, что изоморфность моделей также обладает свойствами симметричности и транзитивности, т.е. $\cong$ задает отношение эквивалентности на классе всех моделей данной сигнатуры.

Посмотрим, как изменяются значения термов и формул при изоморфизме.

Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω, $\alpha : M \cong M'$. Для терма t, оцененного в M, обозначим через $\alpha{\cdot}t$ терм, полученный заменой всех констант m из M на их образы $\alpha(m)$. Формально $\alpha{\cdot}t$ надо определять по индукции и доказывать, что $\alpha{\cdot}t$ — терм, оцененный в M'. (Это — простое упражнение.)

Аналогично по формуле A, оцененной в M, строится формула $\alpha{\cdot}A$, оцененная в M'.

Теорема 7.4. *Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω, $\alpha : M \cong M'$.*

(1) Если $t \in CTm_{\Omega \cup M}$, то $|\alpha{\cdot}t|_{M'} = \alpha(|t|_M)$.

(2) Если $A \in CFm_{\Omega \cup M}$, то $|\alpha{\cdot}A|_{M'} = |A|_M$.

Доказательство (1) Рассуждаем индукцией по длине t. Возможны 3 случая.

(1.1) (базис индукции). $t = c$, для $c \in Const_\Omega$.

Тогда $\alpha{\cdot}t = t = c$. Имеем:

$$|\alpha{\cdot}t|_{M'} = c_{M'} = \alpha(c_M) = \alpha(|t|_M)$$

по определению значения терма (опр. 4) и определению изоморфизма (опр. 6).

(1.2) (базис индукции). $t = m$, для $m \in \underline{M}$. Тогда $\alpha \cdot t = \alpha(m)$, и утверждение очевидно:

$$|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(m) = \alpha(|t|_M)$$

по определению значения терма (опр. 4).

(1.3) (шаг индукции). $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ для функционального символа f^n и термов $t_1, \ldots, t_n$. Тогда

$$\alpha \cdot t = f(\alpha \cdot t_1, \ldots, \alpha \cdot t_n).$$

Получаем:

$$(*) \quad |\alpha \cdot t|_{M'} = f_{M'}(|\alpha \cdot t_1|_{M'}, \ldots, |\alpha \cdot t_n|_{M'}) = f_{M'}(\alpha(|t_1|_M), \ldots, \alpha(|t_n|_M))$$

по опр. 4 и предположению индукции для термов t_i. Далее,

$$(**) \ f_{M'}(\alpha(|t_1|_M), \ldots, \alpha(|t_n|_M)) = \alpha(f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)) = \alpha(|t|_M)$$

по определению изоморфизма (опр. 6) и опр. 4. Утверждение (1) следует из (*) и (**). ■

Утверждение (2) докажем на следующей лекции.